Exercice 1 **Une caractérisation importante des fermés.**

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\boxed{F \text{ est un fermé si et seulement si toute suite de } F \text{ qui converge a sa limite dans } F.}$$

Exercice 2 **Les parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^n$.**

Montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seules parties de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 3 **Quelques limites.**

Étudier l'existence d'une limite pour f en $(0,0)$ dans les cas suivants.

a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\dfrac{x^3+xy^3}{x^3+y^3}$ c) $f(x,y)=\dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$.

Exercice 4 **Un exemple pathologique mais presque.**

Q1. Montrer que $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Q2. Etudier la continuité de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$

Exercice 5 **Fonction continue sur un fermé borné.**

f est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x,y)\neq(1,1)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,1)\end{cases}$.

Q1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$ (si nécessaire on pourra remarquer que $1-x\leqslant 1-xy$ pour...).

Q2. En déduire que f possède un maximum M et un minimum m sur $[0,1]^2$.

Q3. Préciser m et les points où f prend cette valeur.

Exercice 6 **Point critique.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$, f est l'application de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in[0,1]^n,\ f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}+\dots+\sqrt{1-x_n^2}\right)$$

Q1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega=]0,1[^n$.

Q2. Montrer que f possède un point critique et un seul sur Ω (on pourra remarquer que $t\to\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est injective sur $[0,1[$).

Exercice 7 **Un cas où $\dfrac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{y}}$ et $\dfrac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}\partial \mathbf{x}}$ ne coïncident pas.**

f est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Q2. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$; sont-elles continues ?

Q3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 8 **Fonction ayant un dl 1 sans être de classe $\mathcal{C}^1$.**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \left(\dfrac{1}{x^2+y^2} \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f possède un développement limité d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 **L'existence des dérivées partielles secondes n'est ni nécessaire ni suffisante pour avoir un dl 2.**

Q1. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède un dl2 au vosinage de $0 = (0,0)$ mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$ n'existe pas.

Q2. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $O = (0,0)$ mais n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.