Exercice Etudier l'existence d'une limite pour f en $(0,0)$ dans les cas suivants.

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+xy^3}{x^3+y^3}$ c) $f(x,y) = \dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$.

---

a) Supposons que f admette une limite L en $(0,0)$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = 0$.

Comme $\lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{t\to 0} v(t) = 0$, par composition on a $\lim_{t\to 0} f(u(t),v(t)) = L$

Ainsi $L = \lim_{t\to 0} f(u(t),v(t)) = 0$ car $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(u(t),v(t)) = 0$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{u}(t) = \tilde{v}(t) = t$.

$\lim_{t\to 0} \tilde{u}(t) = \lim_{t\to 0} \tilde{v}(t) = 0$. Alors par composition $\lim_{t\to 0} f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = L = 0$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} = \lim_{t\to 0} f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = 0$!!

<u>f n'a pas de limite en $(0,0)$.</u>

b) Supposons que f admette une limite L en 0.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$, $v(t) = 0$, $\tilde{u}(t) = 0$ et $\tilde{v}(t) = t$.

$\lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{t\to 0} v(t) = \lim_{t\to 0} \tilde{u}(t) = \lim_{t\to 0} \tilde{v}(t) = 0$.

Alors par composition : $\lim_{t\to 0} f(u(t),v(t)) = \lim_{t\to 0} f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = L$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(u(t),v(t)) = 1$ et $f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = 0$

Ainsi $L = \lim_{t\to 0} f(u(t),v(t)) = 1$ et $L = \lim_{t\to 0} f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = 0$!!

<u>f n'a pas de limite en $(0,0)$.</u>

c) Supposons que f admette pour limite L en $(0,0)$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t)=t$, $v(t)=0$, $\tilde{u}(t)=t^2$ et $\tilde{v}(t)=t$.

$\lim\limits_{t \to 0} u(t) = \lim\limits_{t \to 0} v(t) = \lim\limits_{t \to 0} \tilde{u}(t) = \lim\limits_{t \to 0} \tilde{v}(t) = 0.$

Par composition $\lim\limits_{t \to 0} f(u(t),v(t)) = \lim\limits_{t \to 0} f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) =$

Or $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(u(t),v(t)) = 0$ et $f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = \dfrac{t^8}{t^{12}+t^8} = \dfrac{1}{t^4+1}$.

Alors $L = \lim\limits_{t \to 0} f(u(t),v(t)) = 0$ et $L = \lim\limits_{t \to 0} f(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)) = 1$!!

f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice f est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Q2. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$; sont-elles continues ?

Q3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Q1 Posons $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

$(x,y) \mapsto \dfrac{y}{x}$ est de classe C^2 sur Ω (c'est une fonction rationnelle définie sur Ω) et $t \mapsto \sin t$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par composition $(x,y) \mapsto \sin \dfrac{y}{x}$ est de classe C^2 sur Ω.

La fonction polynôme $(x,y) \mapsto x^2$ étant de classe C^2 sur Ω, par produit f est de classe C^2 sur Ω.

En particulier <u>f est continue sur l'ouvert Ω donc en tout point de Ω.</u>

Soit $A = (0,b) \in \mathbb{R}^2 - \Omega$. Montrons que f est continue en A. Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Supposons que $X \in \Omega$. $|f(X) - f(A)| = |f(X)| = x^2 \left|\sin \dfrac{y}{x}\right| \leqslant x^2 \leqslant x^2 + (y-b)^2 = \|X - A\|^2$.
- Si $X \in \mathbb{R}^2 - \Omega$, $|f(X) - f(A)| = 0 \leqslant \|X - A\|^2$

Alors $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $|f(X) - f(A)| \leqslant \|X - A\|^2$ et $\lim\limits_{X \mapsto A} \|X - A\|^2 = 0$. Par encadrement il vient alors $\lim\limits_{X \mapsto A} f(X) = f(A)$; f est continue en A.

Finalement <u>f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.</u>

Q2 Nous savons déjà que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Ω. Soit $A = (0,b) \in \mathbb{R}^2 - \Omega$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{A,1}(x) = f(x,b) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{b}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et $f_{A,2}(x) = f(0,x) = 0$.

Alors $f_{A,2}$ est dérivable en 0 et de dérivée nulle ; <u>$\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ existe et vaut 0.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left| \dfrac{f_{A,1}(x) - f_{A,1}(0)}{x - 0} \right| = |x| \left|\sin \dfrac{b}{x}\right| \leqslant |x|$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} |x| = 0$ donc $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f_{A,1}(x) - f_{A,1}(0)}{x - 0} = 0$.

$f_{A,1}$ est dérivable en 0 et $f'_{A,1}(0) = 0$. <u>$\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$ existe et vaut 0.</u>

Notons aussi que : $\forall (x,y)\in\Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\cos\frac{y}{x}$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ 2x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x^2} & \text{si } x\neq 0\end{cases}\quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x\cos\frac{y}{x} & \text{si } x\neq 0\end{cases}$$

Nous savons déjà que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en tout point de Ω.

Soit $A=(0,b)$ un point de $\mathbb{R}^2-\Omega$. Étudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en A.

Commençons par $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(X)-\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right|=|x|\left|\cos\frac{y}{x}\right|\leq |x|\leq \max(|x|,|y-b|)\leq \|X-A\|$.

$\forall X\in\Omega$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(X)-\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right|\leq\|X-A\|$, mieux $\forall X\in\mathbb{R}^2$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(X)-\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right|\leq\|X-A\|$.

Il vient alors par encadrement : $\lim\limits_{X\to A}\frac{\partial f}{\partial y}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(A)$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en A.

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Étudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $A=(0,b)$.

<u>1er cas</u> - $b=0$. $A=(0,0)$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(X)-\frac{\partial f}{\partial x}(A)\right|=\left|2x\sin\frac{y}{x}-y\cos\left(\frac{y}{x^2}\right)\right|\leq 2|x|\left|\sin\frac{y}{x}\right|+|y|\left|\cos\frac{y}{x^2}\right|$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(X)-\frac{\partial f}{\partial x}(A)\right|\leq 2|x|+|y|\leq 3\max(|x|,|y|)\leq 3\|X\|=3\|X-A\|$.

$\forall X\in\Omega$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(X)-\frac{\partial f}{\partial x}(A)\right|\leq 3\|X-A\|$; mieux $\forall X\in\mathbb{R}^2$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(X)-\frac{\partial f}{\partial x}(A)\right|\leq 3\|X-A\|$.

Par encadrement il vient $\lim\limits_{X\to A}\frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial x}(A)$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $A=(0,0)$.

<u>2e cas</u> $b\neq 0$. Supposons $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue en A. $\lim\limits_{X\to A}\frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial x}(A)=0$.

En particulier $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,b)\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{b}{x}-b\cos\frac{b}{x^2}\right)=0$.

Or $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{b}{x}\right)=0$; par différence il vient $\lim\limits_{x\to 0}\left(-b\cos\frac{b}{x^2}\right)=0$.

ceci donne encore : $\lim_{x \to 0} \left(\cos \frac{b}{x^2}\right) = 0$ car $b \neq 0$.

Pour $b>0$ on obtient alors $\lim_{y \to +\infty} \cos y = 0$! et pour $b<0$ on obtient $\lim_{y \to +\infty} \cos y = 0$! Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut être continue en $A=(0,b)$ si $b \neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 - \mathcal{R} \cup \{(0,0)\}$.

(Q3) Etudions l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Posons $O=(0,0)$.

Posons $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $h = \frac{\partial f}{\partial y}$. Il s'agit donc d'étudier l'existence de $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $g_{0,2}(y) = g(0,y) = 0$; $g_{0,2}$ est dérivable en 0 et $g'_{0,2}(0) = 0$.

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0 ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h_{0,1}(x) = h(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \cos \frac{0}{y} = x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_{0,1}(x) = x$.

$h_{0,1}$ est dérivable en 0 et $h'_{0,1}(0) = 1$; $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 1.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.

Remarque.. cela confirme que f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$!!

Exercice.. Etudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$ pour $A \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{R}$.

Etudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A)$ pour $A \in \mathbb{R}^2 - (\mathcal{R} \cup \{O\})$.

Etudier la continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice **Fonction ayant un dl 1 sans être de classe $\mathcal{C}^1$.**

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Montrer que f possède un développement limité d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$ $(0=(0,0))$.

$\dfrac{f(X)}{\|X\|}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=\|X\|\sin\dfrac{1}{\|X\|^2}$.

$\left|\dfrac{f(X)}{\|X\|}\right|=\|X\|\left|\sin\dfrac{1}{\|X\|^2}\right|\leq\|X\|$ et $\lim\limits_{X\to0}\|X\|=0$.

Par encadrement $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{f(X)}{\|X\|}=0$; $f(X)\underset{X\to0}{=}o(\|X\|)$.

$f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}0+0\times x+0\times y+o(\|(x,y)\|)$. __Ainsi f admet un dl 1 au voisinage de 0.__

$(x,y)\mapsto\dfrac{1}{x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{0\}$ (fonction rationnelle) et sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition $(x,y)\mapsto\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{0\}$.

$(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynôme). Par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{0\}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{0,1}(x)=f(x,0)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \left|\dfrac{f_{0,1}(x)-f_{0,1}(0)}{x}\right|=\left|x\sin\dfrac{1}{x^2}\right|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\leq|x|$ et $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$

Par encadrement $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_{0,1}(x)-f_{0,1}(0)}{x}=0$; $f_{0,1}$ est dérivable en 0 et $f'_{0,1}(0)=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)$ existe et vaut 0. De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)$ existe et vaut 0.

Montrons alors par l'absurde que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en 0. Supposons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue en 0.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\left[-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}\right]$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\left|2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}\right| = 2|x| \left|\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x| \leq 2\|X\|$ et $\lim\limits_{X \to 0} 2\|X\| = 0$.

Par encadrement $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = 0 - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = 0$

$\lim\limits_{t\to 0} u(t) = \lim\limits_{t \to 0} v(t) = 0$. Alors par composition $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2u(t)}{(u(t))^2+(v(t))^2} \cos \dfrac{1}{(u(t))^2+(v(t))^2} = 0$

donc $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{2}{t} \cos \dfrac{1}{t^2}\right) = 0$. Or $\lim\limits_{t \to 0} t = 0$.

Par produit $\lim\limits_{t\to 0} \cos \dfrac{1}{t^2} = 0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos \dfrac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2n\pi) = 1$!!

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en 0. Il en est de même de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Donc <u>f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.</u>

Exercice **L'existence des dérivées partielles secondes n'est ni nécessaire ni suffisante pour avoir un dl 2.**

Q1. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède un dl2 au vosinage de $0 = (0,0)$ mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$ n'existe pas.

Q2. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $O = (0,0)$ mais n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Q1 $\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$, $\left|\dfrac{f(x,y)}{\|X\|^2}\right| = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left|(x^2+y^2)^2 \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| = (x^2+y^2)\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$, $\left|\dfrac{f(x,y)}{\|X\|^2}\right| \leq (x^2+y^2) = \|X\|^2$ et $\lim\limits_{X\to 0}\|X\|^2 = 0$.

Par encadrement : $\lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{f(X)}{\|X\|^2}\right) = 0$. Alors $f(X) \underset{X\to 0}{=} o(\|X\|^2)$.

ce qui montre que f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre 2 dont la partie régulière est le polynôme nul.

Remarque .. Cela montre en particulier que f est continue en 0 et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)$ existent et valent 0 car si f admet un dl 2 au voisinage de 0, f admet un dl 1.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = 2x \cdot 2(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)^2\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = 4x(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - 2x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Posons $g = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et étudions l'existence de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0)$ donc de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $g_{0,1}(x) = g(x,0) = 4x^3\sin\dfrac{1}{x^2} - 2x\cos\dfrac{1}{x^2}$ et $g_{0,1}(0) = g(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$

d'après la remarque 1. Alors $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{g_{0,1}(x)-g_{0,1}(0)}{x-0} = 4x^2\sin\dfrac{1}{x^2} - 2\cos\dfrac{1}{x^2}$.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f_{0,2}(y) = f(0,y) = 0$. $f_{0,2}$ est dérivable en 0 et $f'_{0,2}(0) = 0$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$ existe et vaut 0.

Finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\left[3x^2+y^2\right] & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Posons $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $h = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{0,1}(x) = g(x,0) = 0$. $g_{0,1}$ est dérivable en 0 et $g'_{0,1}(0) = 0$.

$\frac{\partial g}{\partial x}(0)$ existe et vaut 0 ; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$ existe et vaut 0.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $g_{0,2}(y) = g(0,y) = \begin{cases} y^5/y^4 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} = y$. $g_{0,2}$ est dérivable en 0 et

$g'_{0,2}(0) = 1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$ existe et vaut 1.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h_{0,1}(x) = h(x,0) = 0$; $h_{0,1}$ est dérivable en 0 et $h'_{0,1}(0) = 0$.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $h_{0,2}(y) = h(0,y) = 0$; $h_{0,2}$ est dérivable en 0 et $h'_{0,2}(0) = 0$.

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)$ existent et valent 0.

Ainsi <u>f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $O = (0,0)$.</u>

<u>Remarque</u> : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0) = 1 \neq 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$.

Supposons que $\frac{\partial g}{\partial x}(0)$ existe et vaut ℓ.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g_{0,1}(x)-g_{0,1}(0)}{x-0} = \ell$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[4x^2\sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2}\right] = \ell$ (1)

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\left|4x^2\sin\frac{1}{x^2}\right| = 4x^2\left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \le 4x^2$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}4x^2=0$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(4x^2\sin\frac{1}{x^2}\right)=0$. (2)

Par soustraction de (1) et (2), il vient $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(2\cos\frac{1}{x^2}\right) = -\ell$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2} = -\frac{\ell}{2}$. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$ et $v_n=\sqrt{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n = \lim_{n\to+\infty}v_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{u_n^2} = \lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{v_n^2} = -\frac{\ell}{2}$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\cos\frac{1}{u_n^2}=\cos(2n\pi)=1$ et $\cos\frac{1}{v_n^2}=\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$!!

Finalement $g_{0,1}$ n'est pas dérivable en 0. Ainsi $\frac{\partial g}{\partial x}(0)$ n'existe pas.

Donc <u>f admet un DL 2 au voisinage de 0 sans que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$ n'existe.</u>

Q2 f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ comme fonction rationnelle.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x)= \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\left(1(x^2+y^2)-x\cdot 2x\right) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{0,1}(x)=f(x,0)=0$. $f_{0,1}$ est dérivable en 0 et $f'_{0,1}(0)=0$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ existe et vaut 0.

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\left[3y^2(x^2+y^2)-y^3x\,2y\right]$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\left[3x^2+y^2\right]$.

Montrons en raisonnant par l'absurde que f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0. Supposons que cela soit le cas.

Alors $\exists (a,b,c,\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^6$, $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} a + bx + cy + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + o(\|(x,y)\|^2)$.

On a également $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} a + bx + cy + o(\|(x,y)\|)$. C'est le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de $O=(0,0)$.

Par conséquent $a = f(0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ et $c = \frac{\partial f}{\partial y}(0)$. Donc $a=b=c=0$.

Par conséquent $f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + o(\|(x,y)\|^2)$.

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\dfrac{f(x,y) - (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)}{\|(x,y)\|^2}\right] = 0$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\frac{xy^3}{x^2+y^2} - (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)}{x^2+y^2} = 0$.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left[\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} - (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)\right]$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = 0$. $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = \lim\limits_{t\to 0} v(t) = 0$

Alors $0 = \lim\limits_{t\to 0} \varphi(u(t), v(t)) = \dfrac{1}{t^2}[-\alpha t^2] = -\alpha$; $\underline{\alpha = 0.}$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{u}(t) = 0$ et $\hat{v}(t) = 0$. $\lim\limits_{t\to 0} \hat{u}(t) = \lim\limits_{t\to 0} \hat{v}(t) = 0$.

Alors $0 = \lim\limits_{t\to 0} \varphi(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t^2}[-\gamma t^2] = -\gamma$; $\underline{\gamma = 0.}$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left[\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} - \beta xy\right] = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}(y^2 - \beta(x^2+y^2))$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_1(t) = v_1(t) = t$ et $u_2(t) = 2t$ et $v_2(t) = t$.

$\lim\limits_{t\to 0} u_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} v_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} u_2(t) = \lim\limits_{t\to 0} v_2(t) = 0$.

$$0 = \lim_{t\to 0} \psi(u_1(t), v_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{(t^2+t^2)^2}\left[t^2 - 2\beta t^2\right] = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{4t^4}(1-2\beta) = \frac{1-2\beta}{4}.$$

Alors $\beta = \frac{1}{2}$.

$$0 = \lim_{t\to 0} \psi(u_2(t), v_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{2t\times t}{(4t^2+t^2)^2}\left(t^2 - \beta(4t^2+t^2)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^4}{25t^4}(1-5\beta) = \frac{2(1-5\beta)}{25}.$$

Alors $\beta = \frac{1}{5}$!!

Ainsi <u>f n'admet pas de dl 2 au voisinage de $O=(0,0)$ mais f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $O=(0,0)$.</u>