Exercice 1 $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = e^x + e^y + e^z$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x+y+z=0$. R. (0,0,0) mini

---

<u>Etape 1.</u>.. Le décor.. Posons $\forall X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(X)=x+y+z$ et $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^3 \,/\, g(X)=0\}$.

g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$. Posons aussi $\mathcal{H}=\operatorname{Ker} g$. Ici $\mathcal{H}=\mathcal{C}$!

<u>Etape 2.</u>.. Notons que f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ ainsi si f admet un extremum local en un point A de $\mathcal{C}$, $\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp$; A est un point critique dans l'optimisation de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Cherchons ces points critiques.

* Soit A un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp = \operatorname{Vect}(\nabla g(X))$ où X est un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Posons $A=(a,b,c)$. $\nabla f(A)=(e^a,e^b,e^c) \in \operatorname{Vect} \nabla g(A) = \operatorname{Vect}((1,1,1))$.

$\exists \lambda\in\mathbb{R}$, $e^a=\lambda$, $e^b=\lambda$, $e^c=\lambda$. $e^a=e^b=e^c$. $a=b=c$.

Or $A\in\mathcal{C}$ donc $a+b+c=0$. Ainsi $a=b=c=0$. $A=(0,0,0)$.

* Supposons que $A=(0,0,0)$. $\nabla f(A)=(e^0,e^0,e^0)=(1,1,1)\in\operatorname{Vect}((1,1,1))=\mathcal{H}^\perp$.

Donc A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ car $A\in\mathcal{C}$.

Ainsi $A=(0,0,0)$ est l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

<u>Etape 3.</u>.. Regardons si f admet en $A=(0,0,0)$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$. $f(A)=3$.

$\forall z\in\mathbb{R}$, $e^z \geq z+1$ (inégalité de convexité classique).

Soit $\overset{=(x,y,z)}{X}\in\mathcal{C}$. $x+y+z=0$. $f(X)=e^x+e^y+e^z \geq x+1+y+1+z+1 = x+y+z+3 = 3 = f(A)$.

$\forall X\in\mathcal{C}$, $f(X)\geq f(A)$

<u>f admet en $A=(0,0,0)$ un minimum global sous la contrainte qui vaut 3.</u>

$\boxed{\text{Exercice 13}}$ **Pratiquement 8**

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{1+2x^2+y^2+z^2}.$

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x-y+z=5$. R. (1,-2,2) max

Etape 1.- Le décor.- Posons $\Omega=\mathbb{R}^3$ et $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{1+2x^2+y^2+z^2}$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ (!) et f est de classe C^1 sur Ω.

Notons que $\forall X=(x,y,z)\in\Omega$, $\nabla f(X)=\left(\dfrac{-4x}{(1+2x^2+y^2+z^2)^2},\dfrac{-2y}{(1+2x^2+y^2+z^2)^2},\dfrac{-2z}{(1+2x^2+y^2+z^2)^2}\right)$

Posons $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $g_1(x,y,z)=x-y+z$ et $b_1=5$.

Posons encore $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^3\mid g_1(X)=b_1\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+z=5\}$.

g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ et $\forall X\in\mathbb{R}^3$, $\nabla g(X)=(1,-1,1)$.

Le problème consiste à étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Etape 2 On cherche les points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette en un point $A=(a,b,c)$ de $\Omega\cap\mathcal{C}$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Alors $\nabla f(A)\in\mathcal{K}^\perp=\operatorname{Ker} g_1^\perp$ ou $\nabla f(A)\in\operatorname{Vect}(\nabla g_1(X))$ où $X\in\mathbb{R}^3$.

Ainsi $\left(\dfrac{-4a}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2},\dfrac{-2b}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2},\dfrac{-2c}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2}\right)\in\operatorname{Vect}((1,-1,1))$

Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $\dfrac{-4a}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2}=\dfrac{\boxed{+}2b}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2}=\dfrac{-2c}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2}=\lambda$; donc $-4a=2b=-2c$.

Alors $c=2a$, $b=-2a$. Or $a-b+c=5$. Ainsi $5=a+2a+2a$; $a=1$, $b=-2$, $c=2$.

Si f possède un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A\in\mathcal{C}\cap\Omega$ alors $A=(1,-2,2)$.

Etape 3 Etudions si f possède un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A=(1,-2,2)$.

Soit $X=(x,y,z)\in\mathcal{C}\cap\Omega$. $x-y+z=5$. Posons $H=X-A=(\alpha,\beta,\gamma)$.

$\alpha-\beta+\gamma=(x-1)-(y-(-2))+(z-2)=x-y+z-5=0$. $\underline{\alpha-\beta+\gamma=0}$.

Notons que $f(A)=\dfrac{1}{1+2+4+4}=\dfrac{1}{11}$.

$f(X)-f(A)=\dfrac{1}{1+2x^2+y^2+z^2}-\dfrac{1}{11}=\dfrac{11-1-2x^2-y^2-z^2}{11(1+2x^2+y^2+z^2)}$. $f(X)-f(A)$ est du signe de $10-2x^2-y^2-z^2$.

$$10 - 2x^2 - y^2 - z^2 = 10 - 2(1+\alpha)^2 - (-2+\beta)^2 - (2+\gamma)^2$$

$$= 10 - 2 - 2\alpha^2 - 4\alpha - 4 - \beta^2 + 4\beta - 4 - 4\gamma - \gamma^2$$

$$= -2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - 4(\alpha - \beta + \gamma)$$

$$= -2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \quad \text{car } \alpha - \beta + \gamma = 0 .$$

Donc $10 - 2x^2 - y^2 - z^2 \leq 0$. Ainsi $f(X) - f(A) \leq 0$.

$\forall X \in \mathcal{C}\cap\mathcal{L}$, $f(X) \leq f(A)$. **f possède au point $A = (1, -2, 2)$ un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.**

Exercice 1 $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$, $f(x,y,z) = x\ln x + y \ln y + z \ln z$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x+y+z = 3a$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$). R. (a,a,a) mini

---

<u>Etape 1.-</u> le décor. Posons $\Omega = (\mathbb{R}^{+*})^3$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ comme produit de trois ouverts de $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x) = x+y+z$, $\mathcal{H} = \ker g$ et $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = 3a\}$

(g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$).

<u>Il convient d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

<u>Etape 2.-</u>

Notons que f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω.

* Supposons que f admette un extremum en $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.

A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp$.

$\forall x = (x,y,z) \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \ln x + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x) = \ln y + 1$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x) = \ln z + 1$.

donc $\nabla f(A) = (\ln \alpha + 1, \ln \beta + 1, \ln \gamma + 1) \in \mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g(x))$ où x est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$. $\forall x = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla g(x) = (1,1,1)$.

Alors $(\ln \alpha + 1, \ln \beta + 1, \ln \gamma + 1) \in \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\ln \alpha + 1 = \lambda$, $\ln \beta + 1 = \lambda$, $\ln \gamma + 1 = \lambda$. $\ln \alpha = \ln \beta = \ln \gamma$; $\alpha = \beta = \gamma$.

Or $A \in \mathcal{C}$ donc $\alpha + \beta + \gamma = 3a$. Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = a$. $A = (a,a,a)$.

* Réciproquement posons $A = (a,a,a)$. $A \in \mathcal{C}$ car $a+a+a = 3a$, $A \in \Omega$ car $a > 0$ et $\nabla f(A) = (\ln a + 1, \ln a + 1, \ln a + 1) \in \mathrm{Vect}((1,1,1)) = \mathcal{H}^\perp$. Donc A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

<u>$A = (a,a,a)$ est l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Etape 3. – Regardons si f admet en $A=(a,a,a)$ un optimum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = x\ln x$. φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \ln x$ et $\varphi''(x) = \frac{1}{x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi''(x)\geq 0$ donc φ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans ces conditions : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall (x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$, $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi(x_i)$

Posons $n=3$ et $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$.

Alors $\lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0, \lambda_3\geq 0$ et $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. Alors $\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\leq\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2)+\lambda_3\varphi(x_3)$.

Ainsi $\forall(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varphi\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z\right)\leq\frac{1}{3}\varphi(x)+\frac{1}{3}\varphi(y)+\frac{1}{3}\varphi(z)$.

ou $\forall(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varphi\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\leq\frac{\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)}{3}$.

Soit $X=(x,y,z)\in\Omega\cap\mathcal{C}$. $x>0$, $y>0$, $z>0$ et $x+y+z=3a$.

Alors $\varphi(a)=\varphi\left(\frac{3a}{3}\right)=\varphi\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\leq\frac{\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)}{3}=\frac{x\ln x+y\ln y+z\ln z}{3}=\frac{1}{3}f(X)$.

Donc $3\varphi(a)\leq f(X)$. Or $f(A)=a\ln a+a\ln a+a\ln a=3a\ln a=3\varphi(a)$.

Par conséquent : $\forall X\in\Omega\cap\mathcal{C}$, $f(A)\leq f(X)$.

f admet en $A=(a,a,a)$ un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 6 **Pratiquement 2**

Extr. $[x^2+y^2+z^2+t^2]$
S.c. $| x + y = 2$
$| z + t = 0$

Etape 1.. On pose le problème.

Posons $\Omega=\mathbb{R}^4$, $\forall X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4=\Omega$, $f(X)=x^2+y^2+z^2+t^2$, $g_1(X)=x+y$,

$g_2(X)=z+t$, $b_1=2$ et $b_2=0$. Posons encore $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^4 \mid g_1(X)=b_1$ et $g_2(X)=b_2\}$.

Le problème revient à étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

- Ω est un ouvert.
- f est de classe C^1 sur Ω.
- g_1 et g_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$.
- b_1 et b_2 sont deux réels.

Etape 2.. On cherche les points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point $A=(a,b,c,d)$ de $\Omega\cap\mathcal{C}$.

Alors $\nabla f(A)\in\mathrm{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X))$ où X est un point quelconque de $\mathbb{R}^4$. $\nabla f(A)\in\mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1))$.

$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A)=\lambda(1,1,0,0)+\mu(0,0,1,1)$.

Or $\nabla f(A)=(2a,2b,2c,2d)$.

Donc $(2a,2b,2c,2d)=\lambda(1,1,0,0)+\mu(0,0,1,1)$

$$\begin{cases}2a=\lambda\\2b=\lambda\\2c=\mu\\2d=\mu\end{cases}$$; $a=b=\lambda$; et $c=d=\mu$. Or $a+b=2$ et $c+d=0$.

Ainsi $a=b=1$ et $c=d=0$.

Si f possède un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point A de $\mathcal{C}\cap\Omega$

alors $A=(1,1,0,0)$.

Etape 3 .. Etudions l'existence d'un extremum local pour f sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A = (1,1,0,0)$.

(V1)

Soit $X = (x,y,z,t) \in \mathcal{C}$. Posons $H = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = X - A$.

$x+y=2$ et $z+t=0$. Alors $\alpha+\beta = (x-1)+(y-1) = 0$ et $\gamma+\delta = (z-0)+(t-0) = 0$.

$$f(X)-f(A) = f(A+H) - f(A) \underset{f(A)=2}{=} (\alpha+1)^2+(\beta+1)^2+(\gamma+0)^2+(\delta+0)^2-2.$$

$$f(X)-f(A) = \alpha^2+2\alpha+1+\beta^2+2\beta+1+\gamma^2+\delta^2-2 \underset{\alpha+\beta=0}{=} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \geq 0.$$

$\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(X) \geq f(A)$.

<u>f possède un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A = (1,1,0,0)$.</u>

(V2) Soit $X = (x,y,z,t) \in \mathcal{C} \cap \Omega$. $x+y=2$ et $z+t=0$

Cauchy-Schwarz donne : $x+y \leq |x+y| \leq \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

Alors $2^2 = (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$; $4 \leq 2(x^2+y^2)$; $2 \leq x^2+y^2$

Donc $f(A) = 2 \leq x^2+y^2 \leq x^2+y^2+z^2+t^2 = f(X)$.

$\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(A) \leq f(X)$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 1 Étudier le problème suivant. Extr. $[x^2 - 2xy + yz + y - z]$ $(4/5, 3/5, 1/5)$ max

S.c. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Etape 1.. Position du problème.

Posons $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(X)= x^2-2xy+yz+y-z$, $g_1(X)= 2x-y$, $g_2(X)= x+z$,

$b_1=b_2=1$, $\mathcal{K}=\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2$ et $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(X)=b_1 \text{ et } g_2(X)=b_2\}$.

g_1 et g_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$.

Il s'agit d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Etape 2.. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Cherchons les points critiques de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* Soit $A=(a,b,c)$ un tel point. $\nabla f(A) \in \mathcal{K}^\perp = \operatorname{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X))$ où X est un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

$\nabla f(A) = (2a-2b, -2a+c+1, b-1)$

$\forall X\in\mathbb{R}^3$, $\nabla g_1(X)=(2,-1,0)$ et $\nabla g_2(X)=(1,0,1)$

Ainsi $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $(2a-2b, -2a+c+1, b-1)=\alpha(2,-1,0)+\beta(1,0,1)$.

Notons également que $A\in\mathcal{C}$.

Alors $\begin{cases} 2a-2b= 2\alpha+\beta \\ -2a+c+1=-\alpha \\ b-1=\beta \\ 2a-b=1 \\ a+c=1 \end{cases}$; $\begin{cases} b=\beta+1 \\ 2a=2b+2\alpha+\beta= 3\beta+2\alpha+2 \\ c=2a-\alpha-1= 3\beta+2\alpha+2-\alpha-1=\alpha+3\beta+1 \\ 0=1-2a+b=1-3\beta-2\alpha-2+\beta+1=-2\beta-2\alpha \\ 2=2a+2c=3\beta+2\alpha+2+2\alpha+6\beta+2 \end{cases}$

$\begin{cases} a=\frac{1}{2}(3\beta+2\alpha+2) \\ b=\beta+1 \\ c=\alpha+3\beta+1 \\ \beta=-\alpha \\ 9\beta+4\alpha=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} a=\frac{1}{2}(3\beta+2\alpha+2) \\ b=\beta+1 \\ c=\alpha+3\beta+1 \\ \alpha=2/5 \\ \beta=-2/5 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha=2/5 \\ \beta=-2/5 \\ a=\frac{1}{2}\left(-\frac{6}{5}+\frac{4}{5}+2\right)=4/5 \\ b=-2/5+1=3/5 \\ c=+2/5-3\times 2/5+1=1/5 \end{cases}$

$A=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Si A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

* Réciproquement il est aisé de montrer que si $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ alors

$A \in \mathcal{C}$ et $\nabla f(A) \in \mathrm{Vect}\left((2,-1,0),(1,0,1)\right) = \mathcal{H}^{\perp}$.

$\left(\nabla f(A) = \frac{2}{5}(2,-1,0) - \frac{2}{5}(1,0,1)\right)$.

<u>Etape 3..</u> Etudions si f admet en $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ un opt local sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{H}$. $2\alpha - \beta = 0$ et $\alpha + \gamma = 0$. $\underline{\beta = 2\alpha}$ et $\underline{\gamma = -\alpha}$

$f(A+H) - f(A) = \left(\frac{4}{5}+\alpha\right)^2 - 2\left(\frac{4}{5}+\alpha\right)\left(\frac{3}{5}+\beta\right) + \left(\frac{3}{5}+\beta\right)\left(\frac{1}{5}+\gamma\right) + \frac{3}{5} + \beta - \frac{1}{5} - \gamma - f(A)$.

$f(A) = \frac{1}{5}$:

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 + \frac{8}{5}\alpha - \frac{6}{5}\alpha - \frac{8}{5}\beta - 2\alpha\beta + \frac{3}{5}\gamma + \frac{1}{5}\beta + \beta\gamma + \beta - \gamma$

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 + \frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta - \frac{2}{5}\gamma - 2\alpha\beta + \beta\gamma$.

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 + \underbrace{\frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{5}(2\alpha) - \frac{2}{5}(-\alpha)}_{=0} - 2\alpha(2\alpha) + (2\alpha)(-\alpha)$.

$\left|\begin{array}{l} \beta = 2\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{array}\right.$

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 - 4\alpha^2 - 2\alpha^2 = -5\alpha^2 \leq 0$.

$\forall H \in \mathcal{H}$, $f(A+H) \leq f(A)$

Donc $\forall X \in \mathcal{C}$, $f($

<u>f admet en $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Exercice 1 Extr.$[x^2 + y^2 + z^2 + t^2]$

S.c. $| x + y + z - t = 3$

$| 2x - y + z + t = -6$

<u>Etape 1</u>.- Le décor. Posons $\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $f(X) = x^2+y^2+z^2+t^2$, $g_1(X) = x+y+z-t$

$g_2(X) = 2x-y+z+t$, $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2$ et $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid g_1(X) = 3 \text{ et } g_2(X) = -6\}$.

Notons que g_1 et g_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$.

Il s'agit d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

f, g_1 et g_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^4$.

$\forall X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $\nabla f(X) = (2x, 2y, 2z, 2t)$, $\nabla g_1(X) = (1,1,1,-1)$ et $\nabla g_2(X) = (2,-1,1,1)$.

<u>Etape 2</u>.- Recherche des points critiques de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* Supposons que $A = (a,b,c,d)$ soit un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp$. $\mathcal{H}^\perp = \operatorname{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X)) = \operatorname{Vect}((1,1,1,-1),(2,-1,1,1))$.

Alors $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(2a, 2b, 2c, 2d) = \nabla f(A) = \alpha(1,1,1,-1) + \beta(2,-1,1,1)$.

Donc $\begin{cases} 2a = \alpha + 2\beta \\ 2b = \alpha - \beta \\ 2c = \alpha + \beta \\ 2d = -\alpha + \beta \end{cases}$. Rappelons que $A \in \mathcal{C}$ donc $\begin{cases} a+b+c-d = 3 \\ 2a-b+c+d = -6 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 6 = 2a+2b+2c-2d = \alpha+2\beta+\alpha-\beta+\alpha+\beta+\alpha-\beta = 4\alpha+\beta \\ -12 = 4a-2b+2c+2d = 2\alpha+4\beta-\alpha+\beta+\alpha+\beta-\alpha+\beta = \alpha+7\beta \end{cases}$. $\begin{cases} 4\alpha+\beta = 6 \\ \alpha+7\beta = -12 \end{cases}$

$\beta = 6-4\alpha$ et $-12 = \alpha + 42 - 28\alpha$. $\alpha = \frac{54}{27} = 2$ et $\beta = 6-8 = -2$.

Donc $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(2-4) = -1 \\ b = \frac{1}{2}(2+2) = 2 \\ c = \frac{1}{2}(2-2) = 0 \\ d = \frac{1}{2}(-2-2) = -2 \end{cases}$ $\underline{A = (-1, 2, 0, -2)}$.

* Réciproquement pour $A = (-1, 2, 0, -2)$.

$-1+2+0-(-2) = 3$ et $2(-1)-(2)+0+(-2) = -6$; $A \in \mathcal{C}$.

$\nabla f(A) = (2(-1), 2\times(2), 2\times(0), 2(-2)) = (-2, 4, 0, -4)$.

De plus $2(1,1,1,-1) - 2(2,-1,1,1) = (2,2,2,-2) - (4,-2,2,2) = (-2,4,0,-4) = \nabla f(A)$.

Alors $\nabla f(A) \in \mathrm{Vect}((1,1,1,-1),(2,-1,1,1)) = \mathcal{H}^{\perp}$.

Ceci achève de montrer que A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

<u>$A = (-1, 2, 0, -2)$ est l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

<u>Etape 3.</u> Regardons si f admet en $A = (-1, 2, 0, -2)$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{H}$.

$f(A+H) - f(A) = (-1+\alpha)^2 + (2+\beta)^2 + (0+\gamma)^2 + (-2+\delta)^2 - [(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2]$

$f(A+H) - f(A) = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + 4 + 4\beta + \beta^2 + \gamma^2 + 4 - 4\delta + \delta^2 - 9 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2\alpha + 4\beta - 4\delta$.

$H = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{H}$ donc $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$

$(1) - (2)$ donne $-\alpha + 2\beta - 2\delta = 0$, ainsi $-2\alpha + 4\beta - 4\delta = 0$.

Alors $f(A+H) - f(A) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0$.

$\forall H \in \mathcal{H}$, $f(A+H) - f(A) \geq 0$. Alors : $\forall X \in \mathcal{C}$, $f(X) - f(A) \geq 0$.

$\forall X \in \mathcal{C}$, $f(X) \geq f(A)$.

<u>f admet en $A = (-1, 2, 0, -2)$ un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ qui vaut 9.</u>

Exercice **Pratiquement 4**

Etudier le problème $\quad \text{Extr.}[\sum_{k=1}^{n}(x_k)^4]$

$\text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k = n \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k > 0 \right.$

Etape 1.- Le décor. Posons $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $f(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^4$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω car f est polynomiale.

$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\nabla f(X) = (4x_1^3, 4x_2^3, \dots, 4x_n^3)$.

Posons $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $g_1(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $b_1 = n$ et $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_1(X) = b_1\}$.

g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\nabla g_1(X) = (1, 1, \dots, 1)$.

Le problème consiste à étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Etape 2.- Chercher les points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\Omega \cap \mathcal{C}$.

Alors $\nabla f(A) \in \mathcal{B}^{\perp} = (\operatorname{Ker} g_1)^{\perp}$ or $\nabla f(A) \in \operatorname{Vect}(\nabla g_1(X))$ où $X \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi $\nabla f(A) \in \operatorname{Vect}((1, \dots, 1))$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $(4a_1^3, 4a_2^3, \dots, 4a_n^3) = \lambda(1, \dots, 1)$.

Donc $4a_1^3 = \dots = 4a_n^3 = \lambda$; $a_1^3 = \dots = a_n^3$; $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Or $A \in \mathcal{C}$ donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$

Donc $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. Si f possède un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point A de $\mathcal{C} \cap \Omega$ alors $A = (1, 1, \dots, 1)$.

Etape 3.- Etudions si f possède en $A = (1, \dots, 1)$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$f(A) = \sum_{k=1}^{n} 1^4 = n$. Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \cap \mathcal{C}$.

$n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \left|\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ d'après Cauchy-Schwarz.

Alors $n^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n\left|\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k^2\right| \underset{\text{CS}}{\leq} n\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^4} = n\sqrt{n}\sqrt{f(X)}$; $n^2 \leq n\sqrt{n}\sqrt{f(X)}$.

Ainsi $n^4 \leq n^2 n f(X)$ or $n \leq f(X)$ or $f(A) \leq f(X)$. $\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(A) \leq f(X)$.

f possède en $A = (1, 1, \dots, 1)$ un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ qui vaut n.

Exercice 5 **Pratiquement 1**

Traiter le problème $\quad \text{Extr.}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \right.$

$\boxed{\text{E1}}$ Posons $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, $g_1(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $b_1 = 1$.

Posons aussi $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_1(X) = b_1\}$.

Le problème revient à étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

- Ω est un ouvert. • b_1 est un réel.
- f est de classe C^1 sur Ω
- g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{E2}}$ Supposons que f admette un extremum (local) sous la contrainte $\mathcal{C}$ et en un point $A = (a_1, \dots, a_n)$ de $\Omega \cap \mathcal{C}$.

Alors $\nabla f(A) \in (\operatorname{Ker} g_1)^{\perp}$ ou $\nabla f(A) \in \operatorname{Vect}(\nabla g_1(X))$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$. $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\nabla g_1(X) = (1, \dots, 1)$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla f(A) = \lambda (1, \dots, 1)$. Donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \lambda$

Or $A \in \mathcal{C}$ donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$. Ainsi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$.

Finalement si f possède un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ et en un point A de $\Omega \cap \mathcal{C}$ alors $A = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

$\boxed{\text{E3}}$ Etudions l'existence d'un extremum local pour f sous la contrainte $\mathcal{C}$ en A.

Notons que $A \in \Omega \cap \mathcal{C}$! Notons également que $f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

V1 Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \cap \mathcal{C}$. Utilisons Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

$$1 = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{n}\ \sqrt{f(X)}$$

Alors $1 \leq n \times f(X)$; $\frac{1}{n} \leq f(X)$; $f(A) \leq f(X)$.

donc $\forall X \in \mathcal{B} \cap \Omega$, $f(A) \leq f(X)$.

f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point $A = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$

qui vaut $\frac{1}{n}$.

V2 Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C} \cap \Omega$. Posons $H = X - A = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$f(X) - f(A) = f(A+H) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + h_k\right)^2 - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2} + h_k^2 + 2\frac{h_k}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

$$f(X) - f(A) = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} h_k^2 + \frac{2}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} h_k}_{=0} - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} h_k^2 \geq 0.$$

Finalement $\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(X) \geq f(A)$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 1 p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ une famille de réels strictement positifs. β est un réel strictement positif.

Etudier le problème $\quad \text{Extr.}\left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k^2}{x_k}\right]$

$$\text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^{p} x_k = \beta \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k > 0 \right.$$

(on pourra utiliser dans une deuxième phase Cauchy-Schwarz ; $\sum_{k=1}^{p} \sqrt{x_k}\,\frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}}$)

Etape 1.. le décor.. Posons $\Omega = \{X=(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p \mid \forall i\in[\![1,p]\!],\ x_i>0\}$

Posons $\mathcal{C} = \{(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p \mid \sum_{k=1}^{p} x_k = \beta\}$.

Posons encore $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $g_1(X)=\sum_{k=1}^{p} x_k$ et $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\Omega$, $f(X)=\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k^2}{x_k}$.

- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ car $\Omega = (]0,+\infty[)^p$ (produit de p
- f est de classe C^1 sur Ω (fraction rationnelle).
- g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{C} = \{X\in\mathbb{R}^p \mid g_1(X)=\beta\}$.

Etape 2. Recherche des points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette en $A\in\Omega\cap\mathcal{C}$ un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Posons $A=(a_1,a_2,\dots,a_p)$ et $H=\operatorname{Ker} g_1$.

$\nabla f(A) \in H^\perp = \operatorname{Vect} \nabla g_1(X)$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^p$.

$\nabla f(A) = \left(-\frac{\alpha_1^2}{a_1^2}, -\frac{\alpha_2^2}{a_2^2}, \dots, -\frac{\alpha_p^2}{a_p^2}\right)$ et $H^\perp = \operatorname{Vect}((1,1,\dots,1))$.

Alors $\exists \lambda\in\mathbb{R},\ \forall \ell\in[\![1,p]\!],\ -\frac{\alpha_\ell^2}{a_\ell^2} = \lambda$. Donc $\frac{\alpha_1^2}{a_1^2} = \frac{\alpha_2^2}{a_2^2} = \dots = \frac{\alpha_p^2}{a_p^2}$.

Alors $\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_2} = \dots = \frac{\alpha_p}{a_p}$ car tous ces réels sont positifs.

Donc $\forall \ell\in[\![1,p]\!],\ \frac{\alpha_\ell}{a_\ell} = \frac{\alpha_1}{a_1}$; $\forall k\in[\![1,p]\!],\ a_k = \frac{a_1}{\alpha_1}\alpha_k$.

Alors $\beta \underset{\uparrow A\in\mathcal{C}}{=} \sum_{k=1}^{p} a_k = \frac{a_1}{\alpha_1}\sum_{k=1}^{p}\alpha_k = \frac{a_1}{\alpha_1} S$ en posant $S=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k$.

Ainsi $u_1 = \frac{\alpha_1 \beta}{S}$ ou $\frac{u_1}{\alpha_1} = \frac{\beta}{S}$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\frac{u_k}{\alpha_k} = \frac{u_1}{\alpha_1}$; $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $u_k = \alpha_k \frac{\beta}{S}$.

<u>Nécessairement $A = \frac{\beta}{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$.</u>

<u>Etape 3.</u>- Vérifions si f admet en $A = \frac{\beta}{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ un optimum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}$.

$$S = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{x_k}\,\frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}} \quad ; \quad S^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} \sqrt{x_k}\,\frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}}\right)^2.$$

Cauchy-Schwarz donne alors :

$$S^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} (\sqrt{x_k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k^2}{x_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) f(X) = \quad f(X).$$

Donc $f(X) \geq S^2/\beta$.

$$f(A) = f\left(\frac{\beta}{S}\alpha_1, \frac{\beta}{S}\alpha_2, \dots, \frac{\beta}{S}\alpha_p\right) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k^2}{\frac{\beta}{S}\alpha_k} = \frac{S}{\beta}\sum_{k=1}^{p}\alpha_k = \frac{S}{\beta^2}.$$

Alors $\forall X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{R}$, $f(X) \geq \frac{S^2}{\beta} = f(A)$.

<u>f admet un minimum global en $A = \frac{\beta}{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

FNPV

Exercice 17 Dans toute la suite n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

Q0. α_1, α_2, ..., α_n sont n réels. On suppose que l'un au moins de ces réels est strictement positif et que l'un au moins est strictement négatif.

Montrer que la fonction numérique de la variable réelle $h : t \to \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e^{-\alpha_k t}$ admet un zéro et un seul dans $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $\Omega = \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Q2. On pose $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega,\ f(X) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k \ln x_k)$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

b) Soit $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un point de Ω. Étudier le signe de la forme quadratique q_A associée à la hessienne de f en A.

Q3. u_1, u_2, ..., u_n sont n réels tels que $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$. v est un réel.

a) Montrer que f possède un point critique sous la contrainte $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = v$ si et seulement si $v \in]u_1, u_n[$ et qu'en cas d'existence ce point critique est unique.

b) En supposant que $v \in]u_1, u_n[$, montrer que ce point critique correspond à un maximum.

Voir Q0 à la fin de Q2.

Q1 • $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme produit de ouverts de $\mathbb{R}$.

• Montrons que Ω est convexe. Soit $\lambda \in [0,1]$ et soient $A = (a_1, \dots, a_n)$ et $B = (b_1, \dots, b_n)$ deux points de Ω.

$\lambda A + (1-\lambda) B = (\lambda a_1 + (1-\lambda) b_1, \dots, \lambda a_n + (1-\lambda) b_n)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $1-\lambda \geqslant 0$ et ($\lambda > 0$ ou $1-\lambda > 0$).

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda a_i + (1-\lambda) b_i > 0$. Ainsi $\lambda A + (1-\lambda) B \in \Omega$.

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (A,B) \in \Omega^2$, $\lambda A + (1-\lambda) B \in \Omega$.

Ainsi $\forall (A,B) \in \Omega^2$, $[A,B] \subset \Omega$. Ω est convexe.

Q2 a) Posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $p_k(x) = x_k$.

Posons aussi $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = t \ln t$.

. Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, p_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω (fonction polynôme).

. $\forall X \in \Omega$, $p_k(X) > 0$ et ceci pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

• φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi \circ p_k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Par combinaison linéaire, $f = -\sum_{k=1}^{n} \varphi \circ p_k$ est de classe C^2 sur Ω.

b) Soit $A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. $f(A) = -\sum_{k=1}^{n} a_k \ln a_k$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = -\ln a_i - a_i \times \frac{1}{a_i} = -\ln a_i - 1$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \begin{cases} -\frac{1}{a_i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Ainsi $\nabla^2 f(A) = \mathrm{Diag}\left(-\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, \dots, -\frac{1}{a_n}\right)$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ sont strictement négatives.

Notons q_A la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(A)$. D'après ce qui précède

$\forall H \in \mathbb{R}^n$, $H \neq 0 \Rightarrow q_A(H) < 0$ ... et ceci pour tout A dans Ω (← important pour Q34)

⚠ $\boxed{Q0}$ h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(-d_k^2 e^{-d_k t}\right) < 0$ (l'un au moins des réels d_k n'est pas nul !)

h est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc h définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $h(\mathbb{R})$.

Posons $K_1 = \{k \in [\![1,n]\!], d_k > 0\}$ et $K_2 = \{k \in [\![1,n]\!], d_k < 0\}$. K_1 et K_2 ne sont pas vides et $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \sum_{k \in K_1} d_k e^{-d_k t} + \sum_{k \in K_2} d_k e^{-d_k t}$.

$\forall k \in K_1$, $\lim_{t \to +\infty} \left(d_k e^{-d_k t}\right) = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} \left(d_k e^{-d_k t}\right) = +\infty$.

$\forall k \in K_2$, $\lim_{t \to +\infty} \left(d_k e^{-d_k t}\right) = -\infty$ et $\lim_{t \to -\infty} \left(d_k e^{-d_k t}\right) = 0$

Donc $\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\infty$ et $\lim_{t \to -\infty} h(t) = +\infty$

Dans ces conditions h définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\exists! t_0 \in \mathbb{R}$, $h(t_0)=0$.

h admet un zéro et un seul dans $\mathbb{R}$.

(Q3) a) Posons 1) $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $g_1(X)=\sum_{i=1}^n x_i$ et $g_2(X)=\sum_{i=1}^n u_i x_i$.

2) $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^n \mid g_1(X)=1 \text{ et } g_2(X)=v\}$

3) $\mathcal{H}=\ker g_1 \cap \ker g_2$.

Rappelons que $\mathcal{H}^\perp=\mathrm{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X))$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Alors $\mathcal{H}^\perp=\mathrm{Vect}((1,1,\dots,1),(u_1,u_2,\dots,u_n))$.

Soit $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathcal{C}$. $\nabla f(A)=(-\ln a_1-1,-\ln a_2-1,\dots,-\ln a_n-1)$.

A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$

$\Updownarrow$ $A\in\mathcal{C}$ et $\nabla f(A)\in\mathcal{H}^\perp$

$\Updownarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i=1$, $\sum_{i=1}^n u_i a_i=v$ et $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A)=\alpha(1,\dots,1)+\beta(u_1,\dots,u_n)$.

$\Updownarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i=1$, $\sum_{i=1}^n u_i a_i=v$, $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $-\ln a_i-1=\alpha+\beta u_i$

$\Updownarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}$, $\sum_{i=1}^n e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}=1$ et $\sum_{i=1}^n u_i e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}=v$

$\Updownarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}$, $e^{\alpha+1}=\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}$ et $\sum_{i=1}^n u_i e^{-\beta u_i}=v\,e^{\alpha+1}=v\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}$

$\Updownarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}$, $\alpha+1=\ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}\right)$ et $\sum_{i=1}^n (v-u_i)e^{-\beta u_i}=0$

$\Updownarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1-\beta u_i}$, $\alpha=-1+\ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}\right)$ et $\sum_{i=1}^n (v-u_i)e^{-\beta u_i}e^{\beta v}=0$

$\Updownarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1-\beta u_i}$, $\alpha=-1+\ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}\right)$ et $\sum_{i=1}^n (v-u_i)e^{\beta(v-u_i)}=0$.

A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\Updownarrow$ il existe deux réels α et β tels que :

1°/ $\sum_{i=1}^{n} (v-u_i) e^{\beta(v-u_i)} = 0$ ou $\sum_{i=1}^{n} (u_i - v) e^{-\beta(u_i - v)} = 0$ (multiplication par -1 !!).

①

2°/ $\alpha = -1 + \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta u_i}\right)$

3°/ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = e^{-\alpha-1-\beta u_i}$.

Notons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e^{-\alpha-1-\beta u_i} \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors * s'il n'existe pas de réel β vérifiant ① alors il n'y a pas de point critique pour f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* s'il existe un réel β vérifiant ① alors f possède un point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* s'il existe un réel β et un seul vérifiant ① alors f possède un point critique et un seul dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

1er cas.. $v \in]-\infty, u_1]$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u_i - v \geq 0$ et $u_2 - v > 0$.

Alors $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} (u_i - v) e^{-\beta(u_i - v)} > 0$. Il n'existe pas de réel β vérifiant ①

2e cas.. $v \in [u_n, +\infty[$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u_i - v \leq 0$ et $u_1 - v < 0$.

Alors $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} (u_i - v) e^{-\beta(u_i - v)} < 0$. Il n'existe pas de réel β vérifiant ①

3e cas.. $v \in]u_1, u_n[$. Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k = u_k - v$.

Alors $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_n > 0$

d'après Q0 : $\exists ! \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-\alpha_k \beta} = 0$

Donc il existe un réel β et un seul vérifiant ①

Si $v \notin]u_1, u_n[$, f ne possède pas de point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Si $v \in]u_1, u_n[$, f possède un point critique et un seul dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

b) On suppose que $v \in]u_1, u_n[$. Soit A l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $X \in \mathcal{C}$. Posons $H = X - A$. $H \in \mathcal{H}$ car X et A sont dans $\mathcal{C}$.

A et X sont dans Ω et Ω est convexe donc $[A, A+H] = [A, X] \subset \Omega$.

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 montre l'existence d'un réel θ appartenant à $[0,1]$ tel que :

forme quadratique associée à $D^2 f(A+\theta H)$.

$f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$.

Or $\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp$ et $H \in \mathcal{H}$. Ainsi $f(X) = f(A+H) = f(A) + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$.

$f(X) - f(A) = \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$.

Or $A + \theta H \in \Omega$ donc Q2 b) donne $q_{A+\theta H}(H) \leq 0$ (et même < 0 si $H \neq 0$).

Donc $f(X) - f(A) \leq 0$; $f(X) \leq f(A)$.

$\forall X \in \mathcal{C}$, $f(X) \leq f(A)$. Alors f admet en A un maximum sous la contrainte $\mathcal{C}$.