# III FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

*Une remarque introductive* Si $f$ est une fonction numérique dérivable sur l'intervalle **ouvert** $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ et si $f$ possède un extremum local en $x_0$ alors $f'(x_0)=0$ ... la réciproque est certes fausse mais ce résultat permet de faire une bonne sélection au niveau des points suceptibles de donner à $f$ un extremum local.

Ce qui suit propose de développer des idées analogues pour les fonctions numériques de plusieurs variables. La première étape consiste à définir la notion de dérivée. Mais comment donc dériver avec plusieurs variables ? Tout simplement par rapport à chaque variable !

★ Dans la suite les fonctions sont le plus souvent définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

## ▸ 1. Applications partielles

**Déf. 21** $f$ est une application d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est un élément de $\Omega$ et $i$ un élément de $[\![1,n]\!]$.

La **i$^{\text{ème}}$ application partielle de $f$ en A** est la fonction numérique de la variable réelle

$$t \to f(a_1,\dots,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n).$$

Nous la noterons $f_{A,i}$.

*Remarque* Il est essentiel de comprendre qu'une application partielle associée à $f$ est une fonction numérique de la variable réelle et qu'elle se définit à partir de **deux** éléments : un point du domaine de $f$ et un indice donnant le rang de la variable active.

**Th. 27** $f$ est une application d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est un élément de $\Omega$.

1. Pour tout élément $i$ de $[\![1,n]\!]$, le domaine de définition de $f_{A,i}$ est l'ensemble $\{t\in\mathbb{R} \mid (a_1,\dots,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n)\in\Omega\}$ ; c'est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2. Si $f$ est continue en $A$, pour tout élément $i$ de $[\![1,n]\!]$, $f_{A,i}$ est continue en $a_i$. La réciproque est fausse.

★ Posons : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=0\end{cases}$. $f$ n'est pas continue en $A=(0,0)$ mais $f_{A,1}$ et $f_{A,2}$ sont continues en 0.

## ▸ 2. Dérivées partielles d'ordre 1

**Déf. 22** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est un point de $\Omega$ et $i$ un élément de $[\![1,n]\!]$.

On dit que **f admet en A une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle d'ordre 1 ou première**, ou que **f est dérivable en $A$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable ou la $i^{\text{ème}}$ place** si la fonction numérique de la variable réelle $f_{A,i}$ est dérivable en $a_i$.

Dans ce cas la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle d'ordre 1 de $f$ en $A$ est le nombre dérivé $f'_{A,i}(a_i)$ de $f_{A,i}$ en $a_i$.

Nous la noterons $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$. $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)=f'_{A,i}(a_i).}$

**Th. 28** ★ $\boxed{\textbf{P}}$ Les hypothèses sont celles de la définition précédente. $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $f$ admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle première en $A$ ;

ii) $t \to \dfrac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t - a_i}$ admet une limite finie en $a_i$ ;

iii) $h \to \dfrac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}$ admet une limite finie en 0 ;

iii') $h \to f(A + h\,E_i)$ est dérivable en 0 ;

*Remarque* Dans la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, $\partial x_i$ ne fait qu'indiquer le rang de la variable par rapport à laquelle on dérive.

Par commodité nous serons amenés à écrire $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Il importe de remarquer que les “deux $x_i$” ont des natures différentes. Le premier indique la place par rapport à laquelle on dérive ; le second est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du point où l'on calcule cette dérivée partielle.

*Notations usuelles*

Pour $n = 2$ nous écrirons le plus souvent $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$ à la place de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ à la place de $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(A)$.

Pour $n = 3$, les trois dérivées partielles premières de $f$ en $A$ seront notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)$.

★★ $f$ peut admettre des dérivées partielles premières en $A$ par rapport à toutes les variables sans être continue en $A$.

C'est le cas en $O = (0, 0)$ pour la fonction $f$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

**Déf. 23** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. $i$ est un élément de $[\![1, n]\!]$.

La fonction $A \to \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est appelée **fonction dérivée partielle d'ordre 1 ou première de f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable** ou encore **la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle d'ordre 1 ou première de f**.

On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

★★ Il est fondamental de remarquer que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est une fonction numérique de $n$ variables (même si elle est obtenue par dérivation de fonctions numériques d'une variable).

## ▸ 3. Dérivée directionnelle première

**Prop. 13** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. $A$ est un point de $\Omega$ et $U$ un élément (non nul) de $\mathbb{R}^n$.

Le domaine de définition de la fonction $g : t \to f(A + t\,U)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

★ $\boxed{\textbf{P}}$ Ces fonctions $t \to f(A + t\,U)$ sont importantes. Elles permettent de transférer beaucoup de résultats des fonctions numériques d'une variable à des fonctions numériques de plusieurs variables.

**Déf. 24** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. $A$ est un point de $\Omega$ et $U$ un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

**f admet une dérivée partielle première en A dans la direction de U** ou **f est dérivable en A dans la direction de U** si $g : t \to f(A + t\,U)$ est dérivable en 0.

La dérivée partielle première en $A$ dans la direction de $U$ ou la dérivée de $f$ en $A$ dans la direction de $U$ est, lorsqu'elle existe, la dérivée de $g : t \to f(A+t\,U)$ en 0 ; c'est à dire la limite en 0 de $t \to \dfrac{f(A+t\,U) - f(A)}{t}$. Nous la noterons $f'_U(A)$.

★ $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, $A$ est un point de $\Omega$ et $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $i$ un élément de $[\![1, n]\!]$. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ existe si et seulement si $f$ admet une dérivée partielle première en $A$ dans la direction de $E_i$. En cas d'existence : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = f'_{E_i}(A)$.

## ▶ 4. Notion de gradient

**Déf. 25** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles premières en $A$ par rapport à toutes les variables.

Le **gradient** de $f$ en $A$ est $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(A) \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$. Nous le noterons $\nabla f(A)$ ou $\nabla f_A$.

★ $\nabla f(A)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$. $\nabla$=nabla !

## ▶ 5. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

**Déf. 26** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$f$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur $\Omega$ si pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie et continue sur $\Omega$.

## ▶ 6. Opérations usuelles

**Th. 29** $i$ est un élément de $[\![1, n]\!]$, $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A$ est un point de $\Omega$ et $f$ et $g$ sont des applications de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $f$ et $g$ admettent en $A$ une dérivée partielle première par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable.

Il en est alors de même pour $f + g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $fg$ et $f^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ :

$$\boxed{\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(A)} \quad \boxed{\frac{\partial (\lambda f)}{\partial x_i}(A) = \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)} \quad \boxed{\frac{\partial (fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\,g(A) + f(A)\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(A)}$$

$$\boxed{\frac{\partial f^p}{\partial x_i} = p\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\,f^{p-1}(A)}$$

**Th. 30** Les hypothèses sont celles du résultat précédent. On suppose de plus que $g$ ne s'annule pas en $A$.

Alors $\dfrac{f}{g}$ et $g^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ admettent en $A$ une dérivée partielle première par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et :

$$\boxed{\frac{\partial \left(\dfrac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(A) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)\,g(A) - f(A)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(A)}{g^2(A)}} \quad \boxed{\frac{\partial g^p}{\partial x_i} = p\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(A)\,g^{p-1}(A)}$$

**Cor. 1** $i$ est un élément de $[\![1,n]\!]$, $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ et $g$ sont des applications de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $f$ et $g$ admettent en tout point de $\Omega$ une dérivée partielle première par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable.

Il en est alors de même pour $f+g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $fg$ et $f^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ et :

$$\boxed{\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}} \quad \boxed{\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}} \quad \boxed{\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \frac{\partial g}{\partial x_i}} \quad \boxed{\frac{\partial f^p}{\partial x_i} = p\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\, f^{p-1}}$$

**Cor. 2** Les hypothèses sont celles du résultat précédent. On suppose de plus que $g$ ne s'annule pas sur $\Omega$.

Alors $\dfrac{f}{g}$ et $g^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ admettent en tout point de $\Omega$ une dérivée partielle première par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et :

$$\boxed{\frac{\partial\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, g - f\, \dfrac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}} \quad \boxed{\frac{\partial g^p}{\partial x_i} = p\, \frac{\partial g}{\partial x_i}\, g^{p-1}}$$

**Cor. 3** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A$ est un élément de $\Omega$ et $f$ et $g$ sont des applications de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $f$ et $g$ admettent un gradient en $A$. Alors il en est de même pour $f+g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $fg$ et $f^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ et :

$$\boxed{\nabla(f+g)(A) = \nabla f(A) + \nabla g(A)} \quad \boxed{\nabla(\lambda f)(A) = \lambda\, \nabla f(A)}$$

$$\boxed{\nabla(f\, g)(A) = g(A)\, \nabla f(A) + f(A)\, \nabla g(A)} \quad \boxed{\nabla f^p(A) = p\, \big(f(A)\big)^{p-1}\, \nabla f(A)}$$

**Cor. 4** Les hypothèses sont celles du résultat précédent. On suppose de plus que $g$ ne s'annule pas en $A$.

Alors $\dfrac{f}{g}$ et $g^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ possèdent un gradient en $A$ et :

$$\boxed{\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(A) = \frac{1}{\big(g(A)\big)^2}\Big(g(A)\, \nabla f(A) - f(A)\, \nabla g(A)\Big)} \quad \boxed{\nabla g^p(A) = p\, \big(g(A)\big)^{p-1}\, \nabla g(A)}$$

**Cor. 5** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ et $g$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. $f+g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $fg$ et $f^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.
2. Si $g$ ne s'annule pas sur $\Omega$, $\dfrac{f}{g}$ et $g^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.

**Cor. 6**
1. Une fonction polynôme de $n$ variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Une fonction rationnelle de $n$ variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

**Th. 31** **Une première composition.** $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que $f(\Omega) \subset I$.

$A$ est un élément de $\Omega$ et $i$ un élément de $[\![1, n]\!]$.

Si $f$ admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en $A$ et si $\varphi$ est dérivable en $f(A)$, alors $\varphi \circ f$ admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en $A$ et :

$$\boxed{\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_i}(A) = \varphi'(f(A)) \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)}$$

**Cor. 1** Le cadre est celui du théorème précédent. $A$ est un élément de $\Omega$. Si le gradient de $f$ existe en $A$ et si $\varphi$ est dérivable en $f(A)$, alors $\varphi \circ f$ possède un gradient en $A$ et :

$$\boxed{\nabla(\varphi \circ f)(A) = \varphi'(f(A)) \; \nabla f(A)}$$

**Cor. 2** Le cadre est celui du théorème précédent.

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ et si $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.

## ► 7. Développement limité d'ordre 1. Approximation locale par une fonction affine

**Déf. 27** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A$ s'il existe une fonction polynôme $P$ de $n$ variables de degré au plus 1, c'est à dire une fonction affine de $n$ variables telle que :

$$f(A + H) = P(H) + \mathrm{o}(\|H\|) \quad (1)$$

(1) signifie que $\displaystyle\lim_{H \to O} \left[ \frac{1}{\|H\|} \big( f(A + H) - P(H) \big) \right] = 0.$

(1) signifie encore qu'il existe une boule de centre $O$, de rayon $r$, et une application $\varepsilon$ de $B(O, r)$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\boxed{\forall H \in B(O, r), \; f(A + H) = P(H) + \|H\| \, \varepsilon(H) \text{ et } \lim_{H \to O} \varepsilon(H) = 0.}$$

*Remarque* On peut remplacer (1) par : $f(X) = P(X - A) + \mathrm{o}(\|X - A\|)$ (2).

(2) signifie $\displaystyle\lim_{X \to A} \left[ \frac{1}{\|X - A\|} \big( f(X) - P(X - A) \big) \right] = 0$

(2) signifie encore qu'il existe une boule de centre $A$, de rayon $r$, et une application $\varepsilon$ de $B(A, r)$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall X \in B(A, r), \; f(X) = P(X - A) + \|X - A\| \, \varepsilon(X) \text{ et } \lim_{X \to A} \varepsilon(X) = 0.$$

**Th. 32** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A$ si et seulement si il existe $n + 1$ réels $\lambda_0$, $\lambda_1$, ..., $\lambda_n$ tels que :

$$f(A + H) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k + \mathrm{o}(\|H\|) \quad \text{ou} \quad f(X) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - a_k) + \mathrm{o}(\|X - A\|).$$

**Th. 33** **Une condition nécessaire d'existence d'un développement limité d'ordre 1**

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A$. Ainsi il existe $n+1$ réels $\lambda_0$, $\lambda_1$, ..., $\lambda_n$ tels que :

$$f(A+H) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k + \mathrm{o}(\|H\|) \quad \text{ou} \quad f(X) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - a_k) + \mathrm{o}(\|X - A\|).$$

Alors :

- $f$ est continue en $A$ et $\lambda_0 = f(A)$.
- Pour tout $i$ élément de $[\![1, n]\!]$, $f$ admet une dérivée partielle première par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable en $A$ et $\lambda_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$.

★★ Notons que la continuité et l'existence de dérivées partielles en $A$ sont des conditions **nécessaires** pour que $f$ admette un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A$ mais **pas suffisantes**.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$.

$f$ est continue en $O$, admet des dérivées partielles premières en $O$ mais n'admet pas de dl1 au voisinage de $O$.

**Th. 34** **Unicité d'un développement limité d'ordre** 1

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A$. Alors :

- Il existe une unique fonction polynôme $P$ de degré au plus 1 telle que :

$$f(A+H) = P(H) + \mathrm{o}(\|H\|) \quad (1).$$

- $\forall H = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ P(H) = f(A) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\, h_k$.
- (1) s'écrit :

$$\boxed{f(A+H) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\, h_k + \mathrm{o}(\|H\|)} \text{ ou } \boxed{f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \mathrm{o}(\|H\|)}$$

Cela constitue **le développement limité** d'ordre 1 de $f$ au voisinage de $A$. $P$ en est sa **partie régulière**.

*Remarque* Sous les hypothèses du résultat précédent, le développement limité d'ordre 1 de $f$ en $A$ est encore :

$$\boxed{f(X) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\, (x_k - a_k) + \mathrm{o}(\|X - A\|)} \text{ ou } \boxed{f(X) = f(A) + < \nabla f(A), X - A > + \mathrm{o}(\|X - A\|)}.$$

**Déf. 28** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

La fonction $X \to f(A) + < \nabla f(A), X - A >$ ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(A) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,(x_k - a_k)$ est **la fonction affine tangente à $f$ en $A$.**

Le graphe de cette fonction est appelé **hyperplan affine tangent au graphe de $f$ en $A$.**

**Prop. 14** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A$.

1. L'hyperplan affine tangent au graphe de $f$ en $A$ a pour équation

$$f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,(x_k - a_k) - x_{n+1} = 0 \text{ ou } \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,x_k - x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,a_k - f(A).$$

L'hyperplan affine tangent de $f$ en $A$ passe par le point $(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(A))$. Il a pour direction :

• l'hyperplan (vectoriel), de $\mathbb{R}^{n+1}$, d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,x_k - x_{n+1} = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ ;

• ou encore l'hyperplan (vectoriel), de $\mathbb{R}^{n+1}$, engendré par les vecteurs :

$\left(1, 0, \ldots, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A)\right)$, $\left(0, 1, \ldots, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(A)\right)$, ... $\left(0, 0, \ldots, 1, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$.

**Th. 35** **Une condition suffisante d'existence** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^1}$ sur $\Omega$.

Alors $f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de tout point $A$ de $\Omega$.

$\boxed{\textit{Remarque}}$ L'hypothèse $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ est une condition **suffisante** pour obtenir un dl1 en un point $A$ de $\Omega$ mais **pas nécessaire**.

Posons $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. $f$ admet un dl1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Th. 36** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{SI}}$ $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ alors $f$ est continue en tout point de $\Omega$.

Une fonction peut évidemment être continue sans être de classe $\mathcal{C}^1$.

Posons $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Notons que $f$ admet des dérivées partielles premières par rapport aux deux variables en tout point de $\mathbb{R}^2$.

## ► 8. "Dérivation de la seconde composition"

**Th. 37** **Une seconde composition.** $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ sont $n$ applications $\boxed{\text{dérivables}}$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^1}}$ (★).

On suppose de plus que $\forall t \in I$, $\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big) \in \Omega$.

Alors $g : t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$ est une application dérivable sur $I$ et pour tout $t$ dans $I$ :

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$$

Notons que si $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ alors $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

★★ Dans ce résultat l'hypothèse $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ est essentielle.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\forall t \in \mathbb{R},\ u_1(t) = u_2(t) = t$.

$u_1$ et $u_2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^1$), $f$ possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$ ($f$ est même continue sur $\mathbb{R}^2$) et pourtant $g : t \to f\big(u_1(t), u_2(t)\big)$ n'est pas dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ ($\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{|t|}{\sqrt{2}}$).

Une conséquence importante.

**Th. 38** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega}$.

$A$ est un point de $\Omega$ et $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

1. Le domaine de définition de la fonction $g : t \to f(A + t\,U)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

2. $g : t \to f(A + t\,U)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine définition et :

$$\forall t \in D_g,\ g'(t) =< \nabla f(A + t\,U), U >= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A + tU)\, u_k.$$

3. En particulier, lorsque $U$ n'est pas nul, $f$ admet une dérivée partielle première en $A$ dans la direction de $U$ qui vaut :

$$f_U'(A) =< \nabla f(A), U >= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\, u_k.$$

**Prop. 15** Les hypothèses sont celles du théorème précédent. On suppose $\nabla f(A)$ non nul.

Si $\|U\| = 1$, $|f_U'(A)| \leqslant |\nabla f(A)|$ avec égalité si et seulement si $U$ est colinéaire à $\nabla f(A)$.

Le gradient indique la ligne de plus grande pente.

★ Ceci est une simple conséquence de Cauchy-Schwarz.

## ▶ 9. Théorème des accroissements finis

**Th. 39** **L'énoncé du programme** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^1}$ sur $\Omega$.

$A$ et $H$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, A+H]$ soit contenu dans $\Omega$.

Alors il existe un réel $\theta$ appartenant à $]0,1[$ tel que :

$$f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A+\theta H), H > \text{ ou } f(A+H) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A+\theta H)\, h_k.$$

**Cor.** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^1}$ sur $\Omega$.

$A$ et $B$ sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, B]$ soit contenu dans $\Omega$.

Alors il existe un élément $C$ de $]A, B[$ tel que : $f(B) - f(A) = < \nabla f(C), B - A >$

## ▶ 10. Complément : "dérivation de la seconde composition version forte"

**Th. 40** **La version forte de la seconde composition.** $\boxed{\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

$\Omega'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ sont $n$ applications $\Omega'$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières en tout point de $\Omega'$.

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^1}}$.

On suppose de plus que $\forall T \in \Omega'$, $\big(u_1(T), u_2(T), \ldots, u_n(T)\big) \in \Omega$.

Alors $g : T \to f\big(u_1(T), u_2(T), \ldots, u_n(T)\big)$ est une application de $\Omega'$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières en tout point de $\Omega'$.

Si $T = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ est un élément de $\Omega'$ :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial t_i}(t_1, t_2, \ldots, t_p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial t_i}(t_1, t_2, \ldots, t_p)\, \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(u_1(t_1, t_2, \ldots, t_p), u_2(t_1, t_2, \ldots, t_p), \ldots, u_n(t_1, t_2, \ldots, t_p)\big)}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial t_i}(T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial t_i}(T)\, \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(u_1(T), u_2(T), \ldots, u_n(T)\big)}$$

Notons que si $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega'$ alors $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega'$.

*Remarque* Ces résultats sont très utiles pour faire des changements de variable particulièrement dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

---

## IV FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^2$

### ▶ 1. Définitions

**Déf. 29** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ et $A$ un point de $\Omega$. $i$ et $j$ sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$.

On dit que $f$ admet en $A$ une **dérivée partielle d'ordre 2 ou seconde par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et la $j^{\text{ème}}$ variable** $\boxed{\textbf{successivement}}$ si :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur une boule de centre $A$ ;
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle première en $A$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable.

Le réel $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(A)$ est appelé dérivée partielle d'ordre 2 ou seconde de $f$ en $A$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et la $j^{\text{ème}}$ variable successivement. Nous noterons $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(A)$ cette dérivée partielle.

**Déf. 30** Les hypothèses sont celles de la définition précédente.

La fonction $A \to \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)$ est appelée **fonction dérivée partielle d'ordre 2 ou seconde de f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et la $j^{\text{ème}}$ variable successivement**. Nous la noterons $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ !

**Déf. 31** Les hypothèses sont celles de la définition précédente.

La fonction $A \to \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)$ est appelée **fonction dérivée partielle d'ordre 2 ou seconde par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et la $j^{\text{ème}}$ variable successivement**. Nous la noterons $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ !

★★ On est prié de ne pas confondre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)$ donc de faire attention à l'ordre de dérivation.

En effet $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(A)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}(A)\cdot$

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$ existe et vaut 1 ; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

*Remarques* 1. Pour $i = j$ on écrit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ à la place de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

2. Si $n = 2$ les quatre fonctions dérivées partielles d'ordre 2 sont usuellement notées :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Pour $n = 3$ je vous laisse deviner et écrire !

**Déf. 32** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que $f$ est **de classe $\mathcal{C}^2$** sur $\Omega$ si pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ est définie et continue sur $\Omega$.

## ▶ 2. Opérations usuelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

★ On peut à ce niveau donner des résultats ponctuelles concernant les opérations sur les dérivées partielles seconde. C'est long, fastidieux et inutile ( ?) car une dérivée partielle seconde étant une dérivée partielle première ( !) cela a déjà été fait en amont. Nous nous contenterons d'énoncés globaux.

**Th. 41** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $f$ et $g$ sont deux applications de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$.

1. $f+g$, $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $fg$ et $f^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$.
2. Si $g$ ne s'annule pas sur $\Omega$, $f/g$ et $g^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$.

**Th. 42**

1. Une fonction polynôme de $n$ variables est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Une fonction rationnelle de $n$ variables est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.

**Th. 43** $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose de plus que $f(\Omega) \subset I$.

Alors $\varphi \circ f$ est de $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$.

**Th. 44** $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ sont $n$ applications de $I$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f$ est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose encore que : $\forall t \in I,\ \big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big) \in \Omega$.

Alors $g : t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$.

**Th. 45** $\boxed{\textit{Complément}}$ $\Omega'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ sont $n$ applications de $\Omega'$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f$ est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose encore que : $\forall T \in \Omega',\ \big(u_1(T), u_2(T), \dots, u_n(T)\big) \in \Omega$.

Alors $g : T \to f\big(u_1(T), u_2(T), \dots, u_n(T)\big)$ est une application de $\Omega'$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

## ▶ 3. Théorème de Schwarz

**Th. 46** **Théorème de Schwarz**

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ et $A$ un point de $\Omega$. $i$ et $j$ sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$.

On suppose que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont définies sur une boule de centre $A$ et $\boxed{\text{continues en } A}$.

Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A).$$

**Cor.** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^2}$ sur $\Omega$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

## ▸ 4. Notion de hessienne

**Th. 47** et **déf. 33** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ et $A$ un point de cet ouvert.

La matrice d'ordre $n$ à coefficients réels $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right)$ est une matrice symétrique.

On l'appelle la **hessienne de f en A**. Nous la noterons $\nabla^2 f(A)$ ou $\nabla^2 f_A$.

Conformément au programme nous noterons $q_A$ la forme quadratique associée à cette matrice symétrique réelle.

$$\boxed{\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ q_A(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)\, x_i\, x_j.}$$

Les hypothèses sont celles du résultat précédente.

$$\text{Si } n = 2 \ :\ \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix} \text{ si } n = 3 \ :\ \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) \end{pmatrix}$$

## ▸ 5. Dérivée directionnelle seconde

**Déf. 34** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. $A$ est un point de $\Omega$ et $U$ un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

$f$ admet une **dérivée partielle seconde en $A$ dans la direction de** $U$ si $g : t \to f(A + t\,U)$ est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 et si sa dérivée est dérivable en 0.

Dans ces conditions on dit encore que **f est deux fois dérivable en A dans la direction de U**.

La dérivée partielle seconde en $A$ dans la direction de $U$ est, lorsqu'elle existe, la dérivée seconde de $g$ en 0. Nous la noterons $f''_U(A)$.

**Prop. 16** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega}$.

$A$ est un point de $\Omega$ et $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

1. Le domaine de définition de la fonction $g : t \to f(A + t\,U)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

2. $g : t \to f(A + t\,U)$ est deux fois dérivable en tout point de son domaine de définition et :

$$\forall t \in D_g,\ g''(t) = q_{A+t\,U}(U) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A + t\,U)\, u_i\, u_j$$

3. En particulier, si $U$ est non nul, $f$ admet une dérivée partielle seconde en $A$ dans la direction de $U$ qui vaut :

$$\boxed{f''_U(A) = q_A(U) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)\, u_i\, u_j}.$$

## ▶ 6. Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

**Th. 48** **L'énoncé du programme**

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^2}$ sur $\Omega$.

$A$ et $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, A+H]$ soit contenu dans $\Omega$.

Alors il existe un réel $\theta$ appartenant à $]0,1[$ tel que :

$$f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \frac{1}{2}\, q_{A+\theta H}(H)$$

$$\text{ou} \quad f(A+H) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\, h_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A+\theta H)\, h_i\, h_j.$$

**Cor.** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^2}$ sur $\Omega$.

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, X]$ soit contenu dans $\Omega$.

Alors il existe un élément $C$ de $C \in ]A, X[$ tel que :

$$f(X) = f(A) + < \nabla f(A), X - A > + \frac{1}{2}\, q_C(X - A) \text{ ou}$$

$$f(X) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,(x - a_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(C)\,(x_i - a_i)\,(x_j - a_j).$$

## ▶ 7. Développement limité d'ordre 2

**Déf. 35** $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$f$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de $A$ s'il existe une fonction polynôme $P$, de $n$ variables et de degré au plus 2 telle que :

$$f(A+H) = P(H) + \mathrm{o}(\|H\|^2) \quad (1).$$

★ $\boxed{\textbf{P}}$ (1) signifie que $\displaystyle\lim_{H \to O} \left[ \frac{1}{\|H\|^2} \big( f(A+H) - P(H) \big) \right] = 0$.

(1) signifie encore qu'il existe une boule de centre $O$, de rayon $r$, et une application $\varepsilon$ de $B(O,r)$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\boxed{\forall H \in B(O,r),\ f(A+H) = P(H) + \|H\|^2\, \varepsilon(H) \text{ et } \lim_{H \to O} \varepsilon(H) = 0.}$$

$\boxed{\textit{Remarque}}$ On peut remplacer (1) par : $f(X) = P(X - A) + \mathrm{o}(\|X - A\|^2)$ (2).

(2) signifie $\displaystyle\lim_{X \to A} \left[ \frac{1}{\|X - A\|^2} \big( f(X) - P(X - A) \big) \right] = 0$

(2) signifie encore qu'il existe une boule de centre $A$, de rayon $r$, et une application $\varepsilon$ de $B(A,r)$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall X \in B(A,r),\ f(X) = P(X - A) + \|X - A\|^2\, \varepsilon(X) \text{ et } \lim_{X \to A} \varepsilon(X) = 0.$$

**Th. 49** et **déf. 36** **Unicité d'un dl2**

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

Si $f$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de $A$ il existe une **unique** fonction polynôme $P$ de $n$ variables de degré au plus 2 telle que : $f(A+H) = P(H) + \mathrm{o}(\|H\|^2)$

$P$ est **la partie régulière** du développement limité d'ordre 2 de $f$ au voisinage de $A$.

**Th. 50** **D'un dl2 à un dl1**

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

Si $f$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de $A$ de partie régulière $P$, alors $f$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $A$ dont la partie régulière est la troncature à "l'ordre 1" de $P$.

**Th. 51** **Concrètement**

$\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$f$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de $A$ si et seulement si il existe deux familles de réels $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ telles que :

$$f(A+H) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} h_i h_j + \mathrm{o}(\|H\|^2) \quad (3)$$

ou

$$f(X) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \mathrm{o}(\|X - A\|^2) \quad (4)$$

★ Cette caractérisation est dans beaucoup de littérature une définition. On notera que si la famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est unique ce n'est pas le cas de la famille $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ ; l'égalité $2\,h_i\,h_j + 3\,h_j\,h_i = h_i\,h_j + 4\,h_j\,h_i$ peut sans doute vous en convaincre.

*Remarque* Les hypothèses sont celles du résultat précédent. On peut encore dire que $f$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de $A$ si et seulement si il existe deux familles de réels $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $(\beta_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ telles que :

$$f(A+H) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \beta_{ij} h_i h_j + o(\|H\|^2) \quad (5)$$

$$\text{ou} \quad f(X) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a_i) + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \beta_{ij} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + o(\|X - A\|^2) \quad (6)$$

Ici les deux familles sont uniques !

On pourra s'entrainer à passer de l'écriture (3) (resp. (4)) à l'écriture (5) (resp. (6)) et réciproquement.

**Th. 52** **Une condition suffisante d'existence. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$.

1. $f$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de tout point de $\Omega$.
2. Si $A$ est un point de $\Omega$ le développement limité d'ordre 2 de $f$ au voisinage de $A$ est :

$$\boxed{f(A+H) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\, h_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)\, h_i h_j\right) + o(\|H\|^2).}$$

ou $\boxed{f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \frac{1}{2}\, q_A(H) + \text{o}(\|H\|^2)}$.

*Remarque* La première égalité s'écrit encore :

$$f(A+H) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\, h_i + \frac{1}{2}\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(A)\, h_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)\, h_i h_j + \text{o}(\|H\|^2).$$

★★ L'existence de dérivées partielles d'ordre 2 pour $f$ n'est pas une condition nécessaire pour que $f$ possède un développement limité d'ordre 2.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. $f$ possède un dl2 au voisinage de $0 = (0,0)$ mais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$ n'existe pas.

★★ Ce n'est pas davantage une condition suffisante.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\, y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. $f$ possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $O = (0,0)$ mais n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.