PROBABILITÉS

PREMIER CERCLE

R. 1 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E et soit B une partie de E.

- $\boxed{B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)}$ $\boxed{B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)}$ $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)}$
- $\boxed{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)}$ $\boxed{\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{A_i}}$ $\boxed{\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}}$

R. 2 Image réciproque d'une partie par une application

Soit f une application de E dans F.

- Si B est une partie de F : $\boxed{f^{-1}(B) = \{x\in E \mid f(x)\in B\}}$
- Si B_1 et B_2 sont deux parties de F : $\boxed{f^{-1}(B_1\cup B_2) = f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)}$ $\boxed{f^{-1}(B_1\cap B_2) = f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)}$

Plus généralement si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de F :

$$\boxed{f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)} \quad \text{et} \quad \boxed{f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)}$$

- Si B est une partie de F : $\boxed{f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}}$.
- Si B_1 et B_2 sont deux parties de F : $\boxed{B_1\subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2).}$

R. 3 Cardinal d'une partie

A est une partie d'un ensemble fini E.

$\boxed{\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, E}$ $\boxed{\text{Card}\, \overline{A} = \text{Card}\, E - \text{Card}\, A}$ $\boxed{\text{Card}\, A = \text{Card}\, E \text{ donne } A = E}$

R. 4 Cardinal d'une réunion

Soient E_1, E_2, ..., E_n n ensemble fini.

- $E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$ est un ensembles finis.
- $\boxed{\text{Card}(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\text{Card}(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})}$
- Si E_1, E_2, ..., E_n sont $\boxed{\text{deux à deux disjoints}}$: $\boxed{\text{Card}(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n) = \text{Card}\, E_1 + \text{Card}\, E_2 + \cdots + \text{Card}\, E_n}$

R. 5 Cardinal d'un produit cartésien

• n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Si E_1, E_2, ..., E_n sont n ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \mathrm{Card}\, E_1 \times \mathrm{Card}\, E_2 \times \cdots \times \mathrm{Card}\, E_n}$$

• n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Si E est un ensemble fini alors E^n est un ensemble fini et : $\boxed{\mathrm{Card}(E^n) = (\mathrm{Card}\, E)^n}$

R. 6 **p-listes**

p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n.L'ensemble des p-listes de E est fini et de cardinal $\boxed{n^p}$

R. 7 **p-listes sans répétition**

p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini non vide de cardinal n.

L'ensemble des p-listes sans répétition de E est fini. Si $p > n$ cet ensemble est vide.

Si $p \leqslant n$ le cardinal de cet ensemble est : $\boxed{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

R. 8 **Permutations**

Le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n est $n!$

R. 9 **Nombre de parties d'un ensemble fini**

• Le nombre de parties d'un ensemble fini de cardinal n est $\boxed{2^n}$

• Le nombre de parties de p éléments d'un ensemble fini de cardinal n est 0 si $p > n$ et

$$\boxed{\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p} \text{ si } p \leqslant n}$$

R. 10 **Coefficients binômiaux** n, p et k sont trois entiers.

• $\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$ $\boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{si } n \geqslant 1}$ $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{si } p \leqslant n}$

• $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad \text{si } 1 \leqslant p < n}$

• Si $1 \leqslant k \leqslant n$. $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$

• $\boxed{\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}}$

R. 11 **Formule du binôme**

Soient a et b deux réels (resp. complexes) et n un élément de $\mathbb{N}$. $\boxed{(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$

R. 12 **Formule de Vandermonde**

n, p et q sont des éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $n \leqslant p + q$. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=\mathrm{Max}(0,n-q)}^{\mathrm{Min}(p,n)} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}}$

R. 13 **Quelques sommes classiques**

• n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n}$ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0}$ $\boxed{\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}}$

• n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $n\geqslant p$. $\boxed{\displaystyle\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\cdots+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}}$

Dans toute la suite $(\Omega,\mathcal{A},P)$ est un espace probabilisé.

R. 14 **σ-additivité**

Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ **deux à deux incompatibles** :

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty}A_n\Big)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}P(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n}P(A_k)}$$

R. 15 **Propriétés élémentaires des probabilités**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$.

$\boxed{P(\emptyset)=0}$ $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$ $\boxed{A\subset B \text{ donne } P(A)\leqslant P(B)}$ $\boxed{P(B\backslash A)=P(B)-P(A\cap B)}$

$\boxed{A\subset B \text{ donne } P(B\backslash A)=P(B)-P(A)}$

R. 16 **Probabilité d'une réunion finie d'événements incompatibles**

A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)}$$

R. 17 **Formule du crible** ou **formule de Poincaré**

A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})}$$

R. 18 **Probabilité d'une réunion ou d'une intersection**

$(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}P\Big(\bigcup_{k=n_0}^{n}A_n\Big)} \qquad \boxed{P\Big(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}P\Big(\bigcap_{k=n_0}^{n}A_n\Big)}$$

R. 19 **Limite monotone**

$(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{A}$.

• Si $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite **croissante** : $\boxed{P\big(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$

• Si $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite **décroissante** : $\boxed{P\big(\bigcap_{k=n_0}^{+\infty} A_k\big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$

R. 20 Système complet ou quasi-complet d'événements

$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout élément de B de $\mathcal{A}$: $\boxed{P(B) = P\Big(\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)\Big) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i).}$

R. 21 Les probabilités composées

• On suppose que A_1, A_2, ..., A_n sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que : $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}) \neq 0$

$$\boxed{P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_n) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)}$$

R. 22 La formule des probabilités totales

$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall i\in I,\ P(A_i)\neq 0$. Alors pour tout élément B de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)\,P_{A_i}(B)}$$

R. 23 La formule de Bayes

$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\forall i\in I,\ P(A_i)\neq 0$.

Pour tout élément B de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout élément k de I :

$$\boxed{P_B(A_k) = \frac{P(A_k)\,P_{A_k}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)\,P_{A_k}(B)}{\sum_{i\in I} P(A_i)\,P_{A_i}(B)}}$$

R. 24 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x) = \sum_{z\in X(\Omega)\cap]-\infty,x]} P(\{X=z\}) = \sum_{z\leqslant x} P(\{X=z\})}$$

R. 25 Variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend ses valeurs dans $\boxed{\mathbb{Z}}$

• Soit k un élément de $\mathbb{Z}$.

$\boxed{P(X=k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1)}$ et $\boxed{P(X=k) = P(X < k+1) - P(X < k)}$

$\boxed{P(X=k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1)}$ et $\boxed{P(X=k) = P(X > k-1) - P(X > k)}$

• $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k=-\infty}^{\mathrm{Ent}(x)} P(X=k)$.

R. 26 **Moment de l'indicatrice d'un événement**

Soit A un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $\boxed{E(\mathbb{1}_A) = P(A) \quad \text{et} \quad V(\mathbb{1}_A) = P(A)\, P(\overline{A})}$

R. 27 **Variable de Bernoulli**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant des lois de Bernoulli.

• $\boxed{E(X) = P(X=1)}$ et $\boxed{V(X) = P(X=1)\, P(X=0)}$

• XY suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(\{X=1\} \cap \{Y=1\})$ et $\boxed{E(XY) = P(\{X=1\} \cap \{Y=1\})}$

R. 28 **Lois discrètes usuelles**

Nom	**Notation**	**Paramètre(s)**	**Valeurs**	**Loi**	$E(X)$	$V(X)$
De Bernoulli	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1-p$ $P(X=1) = p$	p	pq
Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$n \in \mathbb{N}^*$	$[\![1,n]\!]$	$P(\{X=k\}) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$	$(a,b) \in (\mathbb{Z})^2$ $a \leqslant b$	$[\![a,b]\!]$	$P(\{X=k\}) = \dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiale	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$	$[\![0,n]\!]$	$P(\{X=k\}) = \dbinom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Géométrique	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$p \in]0,1[$	$[\![1,+\infty[\![$	$P(\{X=k\}) = p\, q^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
Hypergéo-métrique	$X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$	$(N,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $n \leqslant N$, $p \in [0,1]$ $N\,p \in \mathbb{N}$	$[\![\mathrm{Max}(0, n-Nq),$ $\mathrm{Min}(Np, n)]\!]$	$P(\{X=k\}) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\, \dfrac{N-n}{N-1}$
De Poisson	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{R}^{+\,*}$	$\mathbb{N}$	$P(\{X=k\}) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$	λ	λ

R. 29 Lois continues usuelles

Nom de la loi	Notations	Valeurs		Une densité	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$a<b$	$f(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t\in[a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda>0$	$f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$X \hookrightarrow \gamma(\nu)$	$\mathbb{R}^+$	$\nu>0$	$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}\,e^{-t}}{\Gamma(\nu)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } t\in]-\infty,0] \end{cases}$	ν	ν
Gamma	$X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$	$\mathbb{R}^+$	$b>0$ $\nu>0$	$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}\,e^{\frac{-t}{b}}}{b^\nu\Gamma(\nu)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } t\in]-\infty,0] \end{cases}$	$b\,\nu$	$b^2\nu$
Normale centrée réduite	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$		$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$	0	1
Normale	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\sigma>0$	$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

R. 30 Variance

• Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ possèdant une variance. $X(\Omega)=\{x_k\,;\,k\in[\![n_0,+\infty[\![\}$.

$$\boxed{V(X)=E\Big(\big(X-E(X)\big)^2\Big)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{k=n_0}^{+\infty}x_k^2\,P(X=x_k)-(E(X))^2=\sum_{k=n_0}^{+\infty}\big(x_k-E(X)\big)^2\,P(X=x_k)}$$

• Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ possèdant une variance. Soit f une densité de X.

$$\boxed{V(X)=E\Big(\big(X-E(X)\big)^2\Big)=E(X^2)-(E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2f(t)\,\mathrm{d}t-(E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2f(t)\,\mathrm{d}t}$$

R. 31 Variance de $\mathbf{Y=aX+b}$

X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, a et b sont deux réels.

Si X possède une variance, $aX+b$ aussi et : $\boxed{V(aX+b)=a^2V(X)}$

R. 32 Markov

• Soit X une variable aléatoire réelle discrète ou à densité sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ prenant ses valeurs dans $[0,+\infty[$ et admettant une espérance.

$$\forall\lambda\in]0,+\infty[,\ \ P(X\geqslant\lambda)\leqslant\frac{E(X)}{\lambda}.$$

• Soit X une variable aléatoire réelle discrète ou à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Pour tout réel ε strictement positif :

$$\boxed{P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}}$$

• Soit X une variable aléatoire réelle discrète ou à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre r. Pour tout réel ε strictement positif :

$$\boxed{P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}}$$

R. 33 **Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire réelle discrète ou à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Pour tout réel ε strictement positif :

$$\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$$

R. 34 **Variable aléatoire centrée (resp. centrée réduite)**

Soit X une variable aléatoire réelle discrète ou à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• Si X possède une espérance $X - E(X)$ est une variable centrée.

• Si X possède une variance non nulle $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

R. 35 **Espérance d'une somme de deux variables aléatoires**

• X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent une espérance.

Alors $X + Y$ possèdent une espérance et $\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$

• X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possède une espérance.

Alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ possède une espérance et $\boxed{E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}$

R. 36 **Croissance de l'espérance**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent une espérance.

Si l'on a presque sûrement $X \leqslant Y$ (autrement dit si $P(X \leqslant Y) = 1$) alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

R. 37 **Variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes**

X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent une variance.

Alors $X + Y$ possède une variance et $\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$

R. 38 **Covariance**

X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2 ou une variance.

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big] = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

R. 39 **Propriétés de la covariance**

X, Y, et Z sont trois variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2.

- $\boxed{\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \text{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \,\text{cov}(X, Z) + \beta \,\text{cov}(Y, Z)}$
- $\boxed{\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \text{cov}(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha \,\text{cov}(X, Y) + \beta \,\text{cov}(X, Z)}$
- $\boxed{\text{cov}(Y, X) = \text{cov}(X, Y)}$
- $\boxed{\text{cov}(X, X) = V(X)}$
- Si X (resp. Y) est constante (ou quasi-constante) : $\text{cov}(X, Y) = 0$.
- $\boxed{\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \,\text{cov}(X, Y)}$
- $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} : \text{cov}(X, Y) = 0}$

R. 40 **Variance d'une somme de n variables aléatoires indépendantes**

X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2.

- $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ possède une variance et $\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{cov}(X_i, X_j)}$.
- Si X_1, X_2, ..., X_n sont $\boxed{\text{deux à deux}}$ indépendantes : $\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)}$.

R. 41 **Matrice de covariance**

X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possèdant un moment d'ordre 2. et $A = (\text{cov}(X_i, X_j))$ est la matrice de covariance de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Si α_1, α_2, ..., α_n sont des réels et $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ alors : $\boxed{V(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n) = {}^tUAU}$

R. 42 **Coefficient de corrélation**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant une variance non nulle.

- Le **coefficient de corrélation** du couple (X, Y) est le réel noté $\rho_{X,Y}$ et égal à $\dfrac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$.
- $\boxed{|\rho_{X,Y}| \leqslant 1}$ et $|\rho_{X,Y}| = 1$ si et seulement si Y est une fonction quasi- affine de X.
- Posons $U = aX + b$ et $V = cX + d$ avec a et c dans $\mathbb{R}^*$ et b et d dans $\mathbb{R}$. $|\rho_{U,V}| = |\rho_{X,Y}|$.

R. 43 Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une densité de X. F_X est la fonction de répartition de X. x est un réel. a et b sont deux réels tels que $a < b$.

- $\boxed{P(X = x) = 0}$ $\boxed{F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{P(X > x) = P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$.
- $\boxed{P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a)}$

R. 44 **Fonction affine d'une loi normale**

a et b sont deux réels. a est non nul. $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \text{donne} \quad Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(am + b, (|a|\sigma)^2\Big)}$

R. 45 **Fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite**

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite.

- $\boxed{P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \Phi(0) = 1/2}$
- Pour tout réel x : $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$ ou $\boxed{P(X \leqslant -x) = 1 - P(X \leqslant x) = P(X \geqslant x)}$
- Pour tout réel x positif : $\boxed{P(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1}$ et $\boxed{P(|X| \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x))}$

R. 46 **D'une loi normale à la loi normale centrée réduite**

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. X est une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X.

$$\boxed{\text{Si} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \text{alors} \quad \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)}$$

R. 47 **Stabilité et lois binômiales**

- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles $\boxed{\textbf{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\boxed{\text{Si} \quad X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p) \quad \text{alors} \quad X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)}$$

- X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles de Bernoulli sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\boxed{\textbf{mutuellement indépendantes}}$ et de paramètre p alors : $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est une variable aléatoire réelle suivant une loi binômiale de paramètres n et p

R. 48 **Stabilité et lois de Poisson**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles $\boxed{\textbf{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\boxed{\text{Si} \quad X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu) \quad \text{alors} \quad X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$$

R. 49 **Stabilité et lois gamma**

- Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires $\boxed{\textbf{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi gamma de paramètres b et ν_1, et b et ν_2.

$X_1 + X_2$ suit une loi gamma de paramètres b et $\nu_1 + \nu_2$.

- Plus généralement X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles $\boxed{\textbf{mutuellement indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\boxed{\text{Si} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i) \quad \text{alors} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)}$$

- X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles $\boxed{\textbf{mutuellement indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi gamma de paramètre $\frac{1}{\lambda}$ et n.

R. 50 **Stabilité et lois normales**

• Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires $\boxed{\text{indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi normale de paramètres m_1 et σ_1^2, et m_2 et σ_2^2.

$X_1 + X_2$ suit une loi normale de paramètres $m_1 + m_2$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

• Plus généralement soient λ_1, λ_2, ..., λ_n n réels non tous nuls et X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles $\boxed{\textbf{mutuellement indépendantes}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit une loi normale de paramètres m_i et σ_i. Alors :

$$\boxed{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_n m_n, \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \sigma_n^2\Big)}$$

R. 51 **Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binômiale**

On peut approximer la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p, par la loi binômiale de paramètres n et p lorsque N est sensiblement supérieur à $10\,n$.

R. 52 **Approximation d'une une loi binômiale par une loi de Poisson**

On peut approximer la loi binômiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre np lorsque $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0.1$ et $np \leqslant 15$.

R. 53 **Approximation d'une loi binômiale par une loi normale**

On peut approximer la loi binômiale de paramètres n et p par la loi normale de paramètres np et $\left(\sqrt{np(1-p)}\right)^2$ lorsque $n \geqslant 20$ ou 30, p pas trop petit (!), $np \geqslant 10$ et $nq \geqslant 10$.

R. 54 **Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale**

On peut approximer la loi de Poisson de paramètre λ par la loi normale de paramètres λ et $\left(\sqrt{\lambda}\right)^2$ lorsque $n > 10$.

DEUXIÈME CERCLE

R. 55 **Majoration de la probabilité d'une réunion**

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

• Si A_1, A_2, ..., A_n sont n éléments quelconques de $\mathcal{A}$: $\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)}$

• Soit $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\boxed{\textbf{la série de terme général } P(A_n)}$ converge :

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n)}$$

R. 56 **Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.**

Soit X une variable aléatoire réelle discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P(\{X > k\})$ est convergente.

En cas de convergence : $\boxed{E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X>k\})}$

R. 57 **Variable aléatoire réelle discrète de variance nulle**.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui possède une variance.

La variance de X est nulle si et seulement X est presque sûrement constante.

R. 58 **Loi géométrique**.

• Si X suit une loi géométrique de paramètre p et si $q=1-p$: $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ P(X>k)=q^k}$

• X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mutuellement indépendantes et qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

$\text{Min}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ suit la loi géométrique de paramètre $1-q^n$.

R. 59 **Loi de Pascal**.

r est un élément de $\mathbb{N}^*$ et p est un élément de $]0,1[$. On pose $q=1-p$.

Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ suit une **loi de Pascal** de paramètres r et p si :

$$\boxed{X(\Omega)=[\![r,+\infty[\![\quad \text{et} \quad \forall k\in[\![r,+\infty[\![,\ P(\{X=k\})=\binom{k-1}{r-1}p^r\,q^{k-r}=\mathrm{C}_{k-1}^{r-1}\,p^r\,q^{k-r}}$$

On écrit alors $X\hookrightarrow\mathcal{P}(r,p)$. Dans ces conditions : $\boxed{E(X)=\dfrac{r}{p} \quad \text{et} \quad V(X)=r\,\dfrac{q}{p^2}}$

R. 60 **Stabilité et loi de Pascal**.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suivent respectivement une loi de Pascal de paramètres r_1 et p, et r_2 et p.

X_1+X_2 suit la loi de Pascal de paramètres r_1+r_2 et p.

R. 61 **Loi exponentielle**.

X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mutuellement indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

$\text{Min}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ suit la loi exponentielle de paramètre $n\,\lambda$.

R. 62 **Densités pour $Y=aX+b$ et $Y=X^2$**

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et f une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

• Si a est un réel non nul et b un réel, $Y=aX+b$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction $\boxed{g:x\to\dfrac{1}{|a|}\,f\Big(\dfrac{x-b}{a}\Big)}$.

• $Y=X^2$ est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall x\in\,]-\infty,0],\ g(x)=0 \quad \text{et} \quad \forall x\in\,]0,+\infty[,\ g(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})\Big).}$$

R. 63 **Densités et intégrales classiques**

$\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

$\boxed{\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}}$ $\boxed{\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}}$

R. 64 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. X possède un moment d'ordre n pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ m_{2k}(X) = E(X^{2k}) = \dfrac{(2k)!}{2^k\, k!}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ m_{2k+1}(X) = E(X^{2k+1}) = 0$.

R. 65 **Loi du khi-deux**

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = X^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$.

• Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** qui suivent une loi normale centrée réduite alors $T = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n}{2})$.

R. 66 **Simulation d'une loi exponentielle** λ est un réel strictement positif. X est une variable aléatoire réelle.

Si X suit la loi uniforme sur $[0,1]$: $-\dfrac{1}{\lambda}\ln X$ et $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

LES THÉORÈMES LES MOINS ÉVIDENTS DU COURS DE PROBABILITÉS

R. 67 **Espérance conditionnelle et système complet**.

Th. 1 Soient X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose : $I' = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$. X possède une espérance si et seulement si :

1. Pour tout élément i de I', $E(X|A_i)$ existe (ce qui assure l'existence de $E(|X|\,|\,A_i)$! !) ;
2. $\displaystyle\sum_{i\in I'} E(|X|\,|\,A_i)\,P(A_i)$ existe.

Si $E(X)$ existe : $E(X) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(X|A_i)\,P(A_i)$.

★★ L'énoncé proposé dans le programme est grossièrement faux. L'énoncé proposé par le “Précis” de Bréal (édition 2004) est simplement faux... qu'on se le dise.

Cor. X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $I' = \{i \in I \mid P(X = x_i) \neq 0\}$. Y possède une espérance si et seulement si :

1. Pour tout élément i de I', $E(Y|\{X = x_i\})$ existe ;
2. $\displaystyle\sum_{i\in I'} E(|Y|\,|\,\{X = x_i\})\,P(\{X = x_i\})$ existe.

Si $E(Y)$ existe : $E(Y) = \displaystyle\sum_{i\in I'} E(Y|\{X = x_i\})\,P(\{X = x_i\})$.

R. 68 **Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète infinie.**

Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie. On pose : $X(\Omega) = \{x_k\,, k \in [\![n_0, +\infty [\![\ \}$.

g est une fonction numérique de la variable réelle dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$.

$g \circ X$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_k)\, p(\{X = x_k\})$ est absolument convergente. En cas d'existence :

$$\boxed{E(g \circ X) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} g(x_k)\, p(\{X = x_k\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\, P(\{X = x\})}$$

R. 69 **Espérance de Z=g(X,Y).**

Th. 2 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$.

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète finie et :

$$\boxed{E(Z) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} g(x_i, y_j)\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}$$

Th. 3 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, I et J étant deux intervalles de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$).

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. $Z = g(X, Y)$.

- Z possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |g(x_i, y_j)|\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$ existe.
- Si Z possède une espérance :

$$E(Z) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g(x_i, y_j)\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} g(x_i, y_j)\ P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

R. 70 **Théorème de tranfert pour les variables aléatoires à densité**

Th. 4 Soit X une variable aléatoire réelle à densité prenant ses valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b avec : $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit f une densité de X et φ une fonction définie et continue sur I éventuellement privé d'un nombre fini de points.

$\varphi \circ X$ possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente. En cas d'existence

$$E(\varphi \circ X) = \int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

★★ On se gardera bien de dire que si φ est une fonction continue et X une variable aléatoire à densité, alors $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité.

R. 71 Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes

Th. 5 X et Y sont deux variables aléatoires réelle **indépendantes** de densités respectives f_X et f_Y.

Si $h : x \to \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $x \to \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\,\mathrm{d}t$) est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité admettant h pour densité.

h est la convolée de f_X et f_Y ou le produit de convolution de f_X et f_Y.

★★★ PPP Le programme dit que : **en cas d'utilisation du produit de convolution, la preuve de sa légitimité n'est pas exigible des candidats**. Rien que du bonheur ! !

Th. 6 X et Y sont deux variables aléatoires réelle **indépendantes** de densités respectives f_X et f_Y.

On suppose que f_X ou f_Y est bornée.

Alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \to \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$

(resp. $x \to \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\,\mathrm{d}t$) en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

R. 72 Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire

Th. 7 ! ! X est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X suit une loi exponentielle si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ P(X > x) > 0 \quad \text{et} \quad P(X > x+y / X > x) = P(X > y)$$

On parle de processus sans mémoire.

R. 73 Loi faible des grands nombres

Th. 8 $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles suivant la même loi ayant une espérance m et une variance σ^2 $(\sigma > 0)$.

On suppose que les variables aléatoires réelles de cette suite sont deux à deux indépendantes.

Alors la suite de terme général $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle certaine égale à m.

R. 74 Deux énoncés du théorème de la limite centrée.

Th. 9 $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** suivant la même loi ayant une espérance m et une variance σ^2 $(\sigma > 0)$

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

La suite de terme général $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite.

Ainsi, pour tout réel x : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{S_n^*}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n^* \leqslant x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$

Th. 10 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** suivant la même loi ayant une espérance m et une variance σ^2 $(\sigma > 0)$

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $F_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

La suite de terme général $F_n^* = \dfrac{F_n - E(F_n)}{\sqrt{V(F_n)}} = \dfrac{F_n - E(F_n)}{\sigma(F_n)} = \dfrac{F_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite.

Ainsi, pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{F_n^*}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n^* \leqslant x) = \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.