ALGÈBRE

Sauf mention du contraire dans la suite E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

FORMULES DU PREMIER CERCLE

▶ Polynômes

R. 1 Produit de deux polynômes

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{PQ = \Big(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{q} b_k X^k\Big) = \sum_{k=0}^{p+q}\Big(\sum_{i=\text{Max}(0,k-q)}^{\text{Min}(p,k)} a_i b_{k-i}\Big) X^k}$$

R. 2 Degré d'un polynôme

P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. λ est un élément non nul de $\mathbb{K}$.

$\boxed{\deg(P+Q) \leqslant \text{Max}\left(\deg P, \deg Q\right)}$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$.

$\boxed{\deg(\lambda P) = \deg P}$ $\boxed{\deg(PQ) = \deg P + \deg Q}$

R. 3 Dimension de $\mathbb{K}_n[X]$

$\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1}$

R. 4 Dérivées successives d'un polynômes

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

- Pour tout i dans $[\![0, n]\!]$, $P^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-i+1)\, a_k\, X^{k-i}$.
- $P^{(n)} = a_n\, n!$.
- Pour tout i dans $[\![n+1, +\infty[\![$, $P^{(i)} = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

R. 5 Formule de Taylor pour les polynômes

n est dans $\mathbb{N}$ et a dans $\mathbb{K}$. Soit P un élément de $\boxed{\mathbb{K}_n[X]}$. $\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}$

▶ Espaces vectoriels

R. 6 **Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels**

F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G.$$

Ou en dimension finie :

$$\boxed{\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)}.$$

R. 7 **Dimension de la somme directe de p sous-espaces vectoriels**

F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.

Si F_1, F_2, ..., F_p sont **en somme directe** : $\boxed{\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right)=\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} F_k\right)=\sum_{k=1}^{p}\dim F_k.}$

Si la dimension de E est finie : F_1, F_2, ..., F_p sont en somme directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right)=\sum_{k=1}^{p}\dim F_k$.

R. 8 **Des dimensions classiques**

- $\boxed{\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}=1}$ $\boxed{\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^n=n}$ $\boxed{\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1}$ $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2}$
- E_1, E_2, ..., E_p sont p espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. $\boxed{\dim(E_1\times E_2\times\cdots\times E_p)=\dim E_1+\dim E_2+\cdots+\dim E_p}$
- Si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : $\boxed{\dim\mathcal{L}(E,E')=\dim E\times\dim E'}$
- $\boxed{\dim\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})=pq}$ $\boxed{\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=n^2}$ $\boxed{\dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})=n}$ $\boxed{\dim\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})=n}$
- $\boxed{\dim\mathbb{K}_n[X]=\boxed{\text{n+1}}}$

▶ Applications linéaires

R. 9 **Opération sur les applications linéaires**

$(f_1,f_2,\dots,f_p)$ est une famille d'applications linéaires de E dans E' et $(g_1,g_2,\dots,g_n)$ une famille d'applications linéaires de E' dans E''. $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ et $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p)$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,g_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^{p}\beta_j\,f_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\alpha_i\beta_j\,g_i\circ f_j.}$$

R. 10 **Identités remarquables**

f et g sont deux endomorphismes de E $\boxed{\textbf{qui commutent}}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},(f+g)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k\circ g^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,f^k\circ g^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{n-k}\circ g^k=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,f^{n-k}\circ g^k}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f^n-g^n=(f-g)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\circ g^{n-1-k}\right)=(f-g)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^{n-k-1}\circ g^k\right)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}\right) \circ (f-g) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{n-k-1} \circ g^k\right) \circ (f-g)}$$

R. 11 **Polynôme d'endomorphisme**

f est un endomorphisme de E, P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et α est un élément de $\mathbb{K}$.

$$\boxed{(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)} \quad \boxed{(\alpha P)(f) = \alpha P(f)} \quad \boxed{(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)}$$

R. 12 **Image d'une sous-espace vectoriel par une application linéaire**

f est une application linéaire de E dans E'. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille d'éléments de E :

$$\boxed{f\big(\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)\big)}$$

R. 13 **Image d'une application linéaire**

f est une application linéaire de E dans E' et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big)}$$

R. 14 **Rang d'une application linéaire**

f est une application linéaire de E dans E'. $\boxed{\operatorname{rg} f \leqslant \dim E \text{ et } \operatorname{rg} f \leqslant \dim E'}$ ou $\boxed{\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{Min}(\dim E, \dim E')}$

R. 15 **Dimension de l'image d'une sous-espace vectoriel par une application linéaire**

f est une application linéaire de E dans E' et F est un sous-espace vectoriel de E. $\boxed{\dim f(F) \leqslant \dim F}$

R. 16 **Téorème du rang**

f est une application linéaire de E dans E'.

$$\boxed{\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E}} \text{ ou } \boxed{\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = \dim E}}$$

R. 17 **Composée de deux applications linéaires bijectives**

f est une application linéaire bijective de E dans E' et g est une application linéaire bijective de E' dans E''.

Alors $g \circ f$ est une application linéaire bijective de E dans E'' et $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$

▶ Matrices

R. 18 **Produit de deux matrices**

$A = (a_{ij})$ est une matrice de type (n, p) à éléments dans $\mathbb{K}$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de type (p, q) à éléments dans $\mathbb{K}$.

$C = AB = (c_{ij})$ est une matrice de type (n, q) à éléments dans $\mathbb{K}$ et

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad \text{ou} \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{A retenir : "Type } (n,p) \times \text{Type } (p,q) = \text{Type } (n,q)\text{".}}$

R. 19 "Extraction" des éléments d'une matrice

$A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. i et j sont dans $[\![1, n]\!]$.

$\boxed{\text{La } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } A \text{ est } AE_j}$ $\boxed{\text{La } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } A \text{ est } {}^tE_iA}$ $\boxed{a_{ij} = {}^tE_iAE_j}$

R. 20 Identités remarquables

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent** $(AB = BA)$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p - B^p = (A-B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\Big)(A-B) = (A-B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k} B^k\Big) = \cdots}$$

R. 21 Polynômes de matrices

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et α est un élément de $\mathbb{K}$.

$\boxed{(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)}$ $\boxed{(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A)}$ $\boxed{(PQ)(A) = P(A)\, Q(A) = Q(A)\, P(A)}$

R. 22 Produit de matrices diagonales

Soient $A = \text{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B = \text{Diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\boxed{AB = \text{Diag}(a_1\, b_1, a_2\, b_2, \ldots, a_n\, b_n)}$ $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \text{Diag}(a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p).}$
- Si P est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $\boxed{P(A) = \text{Diag}\big(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)\big)}$

R. 23 Matrice et application linéaire

f est une application linéaire de E dans E', $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de E'. $A = (a_{ij}) = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

- $\boxed{\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e'_i}$
- u est un élément de E de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est la matrice de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{Y = AX} \text{ ou } \boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j}$$

R. 24 Matrice de la composée de deux endomorphismes

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E. f et g sont deux endomorphismes de E.

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f)}$$

R. 25 **Matrice de la composée de deux applications linéaires**

E, E' et E'' sont de dimensions finies non nulles. $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ en sont des bases respectives. f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''. Alors :

$$\boxed{M(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = M(g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \times M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

R. 26 **Matrice de l'inverse d'un automorphisme**

$\mathcal{B}$ est une base de E et f un automorphisme de E. $\boxed{M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(M_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}}$

R. 27 **Matrice de l'inverse d'un isomorphisme**

$\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{B}'$ est une base de E' et f est un isomorphisme de E sur E'.

$$\boxed{M(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \big(M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\big)^{-1}}$$

R. 28 **Produit de matrices inversibles**

• A et B sont deux éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors AB est inversible et : $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}}$.

• A_1, A_2, ..., A_p sont p matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$. Alors $A_1\, A_2 \cdots A_p$ est une matrice inversible et :

$$\boxed{\big(A_1\, A_2 \cdots A_p\big)^{-1} = A_p^{-1}\, A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}}.$$

• A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A^{-1} est inversible et : $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.

R. 29 **Inversibilité des matrices d'ordre 2**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

• A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

• Si A est inversible : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

R. 30 **Inverse d'une matrice de passage**

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible et $\boxed{\big(\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\big)^{-1} = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B})}$

R. 31 **Changement de base dans un espace vectoriel**

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E.

Si u est un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$ alors : $\boxed{X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X}$.

R. 32 **Changement de base pour un endomorphisme**

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$ et A' dans $\mathcal{B}'$.

P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{A' = P^{-1}AP} \qquad \boxed{A = PA'P^{-1}} \qquad \boxed{M_{\mathcal{B}'}(f) = \big(\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\big)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)\, \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

R. 33 **Changement de base pour une application linéaire**

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont deux bases de E et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.

$\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'_1$ sont deux bases de E' et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}_1^{'}$.

f est une application linéaire de E dans E'.

$$\boxed{M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1') = Q^{-1}M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')P \quad \text{ou} \quad M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1') = (\text{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B}_1'))^{-1}\ M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')\ \text{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)}$$

R. 34 **Polynômes de matrices semblables**

A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

- $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ B^k = P^{-1}A^kP}$
- Si Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$: $\boxed{Q(B) = P^{-1}Q(A)P}$

R. 35 **Transposée**

- Soient α un élément de $\mathbb{K}$, A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB} \quad \boxed{{}^t(\alpha A) = \alpha\,{}^tA} \quad \boxed{{}^t({}^tA) = A}.$$

- Soient A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$
- Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\boxed{\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)}$
- Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ${}^tA$ est inversible et $\boxed{\left({}^tA\right)^{-1} = {}^tA^{-1}}$

▶ Réduction

R. 36 f est un endomorphisme de E ($\dim E \in \mathbb{N}^*$) et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Card}\,\text{Sp}\,f \leqslant \dim E} \quad \boxed{\text{Card}\,\text{Sp}\,A \leqslant n} \quad \boxed{\sum_{\lambda\in\text{Sp}\,f} \dim \text{SEP}\ (f,\lambda) \leqslant \dim E} \quad \boxed{\sum_{\lambda\in\text{Sp}\,A} \dim \text{SEP}\ (A,\lambda) \leqslant n}$$

R. 37 **Dimension d'un sous-espace propre**

f est un endomorphisme de E ($\dim E \in \mathbb{N}^*$) et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. λ est une valeur propre de f et de A.

$$\boxed{\dim \text{SEP}\ (f,\lambda) = \dim E - \text{rg}(f - \lambda\,\text{Id}_E)} \quad \boxed{\dim \text{SEP}\ (A,\lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda\,I_n)}$$

R. 38 f est un endomorphisme de E, u est un élément de E et λ un élément de $\mathbb{K}$. Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k u \text{ et } Q(f)(u) = Q(\lambda)\,u}$$

R. 39 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$. Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

$$\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ A^kX = \lambda^kX \text{ et } AX = \lambda X \text{ donne } Q(A)X = Q(\lambda)\,X}$$

R. 40 **Valeurs propres d'une matrice d'ordre 2**

a, b, c, d et λ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

$$\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ si et seulement si } (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0}$$

R. 41 **Valeurs propres d'une matrice triangulaire**

$A = (a_{ij})$ est une matrice **triangulaire** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\boxed{\text{Sp}\, A = \{a_{ii}\,;\, i \in [\![1, n]\!]\}}$; autrement dit les valeurs propres de A sont les éléments de sa diagonale.

Algèbre bilinéaire

R. 42 **Inégalité de Cauchy Schwarz**

x et y sont deux éléments de E. $\boxed{|<x,y>| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$. $|<x,y>| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si (x, y) est liée.

R. 43 **Inégalité de Cauchy Schwarz dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$**

Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a, b]$. $\boxed{\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}}$

R. 44 **Inégalité de Cauchy Schwarz dans $\mathbb{R}^n$**

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$. $\boxed{\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}}$

R. 45 **Identités remarquables**

x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 <x,y> + \|y\|^2} \quad \boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 <x,y> + \|y\|^2}$$

$$\boxed{<x+y, x-y> = \|x\|^2 - \|y\|^2}$$

x_1, x_2, ..., x_p sont p éléments de E. $\boxed{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_p\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} <x_i, x_j>}$

R. 46 **Pythagore**.

Deux éléments x et y de E sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

R. 47 **Orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\boxed{\text{espace vectoriel euclidien}}$ E.

- $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ et $\boxed{F^{\perp\perp} = F}$.
- $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.

R. 44 **Coordonnées d'un vecteur dans une base ortnonormée**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soit x un élément de E.

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > \; e_k} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \big(< x, e_k > \big)^2}}$$

R. 45 **Base orthonormée et produit scalaire**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans cette base. Soient X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k = {}^t XY} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{{}^t XX}}$$

R. 46 **Base orthonormée et projection orthogonale**

F est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est $\boxed{\text{une base orthonormée de } F}$.

p_F est la projection orthogonale sur F. Pour tout élément x de E :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, e_k > \; e_k}$$

R. 47 **Décomposition d'une matrice symétrique à coefficients réels**

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, X_k \, {}^t X_k}$$

FORMULES DU SECOND CERCLE

▶ Polynômes

R. 48 **Factorisations classiques**

- $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \; X^2 - 2\cos\theta \, X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).}$
- Si n appartient à $\mathbb{N}^*$, $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{ik\frac{2\pi}{n}} \right).}$
- $\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \; X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right).}$
- $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; X^{2n+1} - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1 \right).}$

R. 49 **"Dérivée logarithmique"**

r est dans $\mathbb{N}^*$. λ, x_1, x_2, ..., x_r sont des éléments de $\mathbb{K}$. On suppose λ non nul.

Si $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)$ alors $\boxed{\forall x \in \mathbb{K} - \{x_1, x_2, \ldots, x_r\},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{x - x_k}}\cdot$

R. 50 **Relations entre racines et coefficients d'un polynôme.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n dans $\mathbb{N}^*$. Soient x_1, x_2,..., x_n les racines de P comptées avec leurs ordres de multiplicité. Ainsi $P = a_n(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$.

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$ on pose : $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ (σ_k est la somme des produits k à k des racines).

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$: $\boxed{\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}\cdot}$

En particulier $\boxed{\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$ et $\boxed{\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}$.

▸ Espaces vectoriels

R. 51 **Dimension de l'intersection de deux hyperplans distincts**

H_1 et H_n sont deux hyperplans **distincts** d'un espace vectoriel de dimension n.

$$\boxed{\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2}.$$

R. 52 **Minoration de la dimension de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels**

F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension n.

$$\boxed{\dim(F \cap G) \geqslant \dim F + \dim G - n}.$$

▸ Applications linéaires

R. 53 **Polynôme annulateur d'un endomorphisme et inversibilité**

f est un endomorphisme de E et $P = \sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un polynôme annulateur de f tel que $a_0 = P(0) \neq 0$.

f est un automorphisme de E et $\boxed{f^{-1} = -\sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{a_0}\right) f^{k-1}.}$

R. 54 **Conservation de la dimension par une application linéaire injective**

f est une application linéaire **injective** de E dans E' et F est un sous-espace vectoriel de E.

$$\boxed{\dim f(F) = \dim F}$$

▸ Matrices

R. 55 **Produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne**

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

• ${}^tXY$ et ${}^tYX$ sont des scalaires. $\boxed{{}^tXY = {}^tYX = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\, y_k}$.

• $X{}^tY$ et $Y{}^tY$ sont des matrices d'ordre n. $\boxed{X{}^tY = (x_i\, y_j)}$ et $\boxed{Y{}^tX = (y_i\, x_j)}$

R. 56 **Polynôme annulateur d'une matrice et inversibilité**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un polynôme annulateur de A tel que $a_0 = P(0) \neq 0$.

A est inversible et $\boxed{A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0} \sum\limits_{k=1}^{r} a_k\, A^{k-1} = -\dfrac{1}{a_0}\left(a_1\, \mathrm{I}_n + a_2\, A + \cdots + a_p\, A^{r-1}\right)}$

R. 57 **Trace d'une matrice**

• Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$. $\boxed{\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B}$ $\boxed{\mathrm{tr}\,(\lambda\, A) = \lambda\ \mathrm{tr}\, A}$

• A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. $\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)}$

• Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\boxed{\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\, A}$

R. 58 **Matrice de passage**

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E. $\boxed{\mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = \mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}') \times \mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')}$

▸ Réduction

R. 59 **Polynôme d'une matrice diagonalisable**

Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$. A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

$\boxed{Q(A) \text{ est diagonalisable}}$ $\boxed{P^{-1}Q(A)P = \mathrm{Diag}(Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \ldots, Q(\alpha_n))}$ $\boxed{\mathrm{Sp}\, Q(A) = \{Q(\lambda)\,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}}$

R. 60 **Valeurs propres d'une transposée**

A est une matrice de $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\boxed{\mathrm{Sp}\, {}^tA = \mathrm{Sp}\, A}$. Pour toute valeur propre λ de A $\boxed{\dim \mathrm{SEP}\ ({}^tA, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)}$

R. 61 **Valeurs propres de l'inverse d'une matrice**

A est une matrice **inversible** de $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, A^{-1} = \left\{\frac{1}{\lambda}\,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\right\}} \qquad \boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A,\ \mathrm{SEP}\ \left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)}$$

Même chose pour un automorphisme.

▸ Algèbre bilinéaire

R. 62 **Identités de polarisation**

x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]} \quad \boxed{< x, y >= \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right]}$$

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]}$$

R. 63 **Identité du parallélogramme**

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2}$$

R. 64 **Encadrement de Rayleigh**.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note λ (resp. μ) la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de A.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda\,\|X\|^2 \leqslant < AX, X >= {}^tXAX \leqslant \mu\|X\|^2.}$$

$$\boxed{\text{Min}\left\{\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0\right\} = \text{Min}\,\text{Sp}(A).} \quad \boxed{\text{Max}\left\{\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0\right\} = \text{Max}\,\text{Sp}(A).}$$

LES RÉSULTATS PHARES

▶ Polynômes

R. 65 **Familles libres de $\mathbb{K}[X]$**

1. Toute famille $(P_1, P_2, \ldots, P_q)$ d'éléments **non nuls** de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts est libre.

2. Toute famille $(P_1, P_2, \ldots, P_q)$ d'éléments **non nuls** de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg P_1 < \deg P_2 < \ldots < \deg P_q$ est libre. On parle de famille de polynômes de degrés échelonnés.

R. 66 **Division euclidienne**

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On suppose $\underline{B \text{ non nul}}$.
Il existe un couple unique (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\boxed{A = QB + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B}$$

Faire **la division euclidienne** de A par B c'est trouver les deux éléments Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $A = QB + R$ et $\deg R < \deg B$; Q est le **quotient** de cette division et R en est le **reste**.

R. 67 **Ordre de multiplicité**

P est un élément **non nul** de $\mathbb{K}[X]$. α appartient à $\mathbb{K}$ et k à $\mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) α est une racine de P d'ordre k

ii) $(X-\alpha)^k$ divise P et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

iii) Il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $P=(X-\alpha)^k Q$ et $Q(\alpha)\neq 0$.

iv) $P(\alpha)=P^{'}(\alpha)=\cdots=P^{(k-1)}(\alpha)=0$ et $P^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

R. 68 **Théorème de D'ALEMBERT.**

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

R. 69 **Factorisation dans $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$**

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, c'est à dire est produit de polynômes de degré un.

R. 70 **Factorisation dans $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$**

Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ est produit de polynôme de degré un et de polynômes de degré deux sans zéro dans $\mathbb{R}$.

▶ Espaces vectoriels

R. 71 **Théorème de la base incomplète**.

Toute famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel peut être complétée en une base.

R. 72 **Existence de bases**

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel **non réduit au vecteur** nul possède une base et deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel ont même cardinal.

R. 73 **Cardinal d'une famille libre**

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E le cardinal d'une famille libre de E est inférieur au cardinal d'une base de E.

R. 74 **Cardinal d'une famille génératrice**

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E le cardinal d'une famille génératrice de E est supérieur au cardinal d'une base de E.

R. 75 **Caractérisation des bases en dimension finie**

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\boxed{\mathbf{n}}$ non nulle et $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ une famille d'éléments de E de cardinal $\boxed{\mathbf{n}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ est une base de E.

ii) $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ est une famille libre de E.

iii) $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ est une famille génératrice de E.

R. 76 **Égalité de deux sous-espaces vectoriels**

F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'une $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Si G est de dimension finie, si $F\subset G$ et si $\dim F=\dim G$ alors $F=G$.

▶ Applications linéaires

R. 77 **Caractérisation des applications linéaires bijectives**

f est une application linéaire de E dans E'. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une application (linéaire) g de E' dans E telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_{E'}$.

R. 78 **Caractérisation des applications linéaires bijectives again**

f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que E n'est pas nul. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective.

ii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de E'.

iii) Toute base de E a pour image par f une base de E'.

R. 79 **Caractérisation des applications linéaires bijectives en dimension finie**

f est une application linéaire de E dans E'. On suppose que $\boxed{\boxed{\dim E = \dim E' < +\infty}}$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) f est injective. iii) f est surjective.

R. 80 **Caractérisation des applications automorphisme en dimension finie**

f est un endomorphisme de E. Si $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$ alors les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est bijective. ii) f est injective. iii) f est surjective.

R. 81 **Espaces vectoriels isomorphes**

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels qui ont même dimension sont isomorphes.

R. 82 **Existence d'un polynôme annulateur non nul en dimension finie**

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel $\boxed{\textbf{de dimension finie}}$ possède un polynôme annulateur $\boxed{\textbf{non nul}}$.

▶ Matrices

R. 83 **Caractérisations des matrices inversibles.**

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est inversible.

ii) $\boxed{\textbf{P}}$ $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(K)} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

iii) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ AX = Y$.

iv) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists\,!X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ AX = Y$.

v) $\exists A' \in \mathcal{M}_n(K),\ AA' = \mathrm{I}_n$ (inversibilité à droite).

vi) $\exists A'' \in \mathcal{M}_n(K),\ A''A = \mathrm{I}_n$ (inversibilité ̀gauche).

vii) 0 n'est pas valeur propre de A.

viii) A admet une réduite de Gauss inversible c'est à dire sans zéro sur la diagonale.

ix) $\text{rg}(A) = n$.

R. 84 **Inversibilité des matrices triangulaires**

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si **TOUS** ses éléments diagonaux sont non nuls.

Une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si **AU MOINS UN** de ses éléments diagonaux est nul.

R. 85 **Existence d'un polynôme annulateur non nul pour une matrice**

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur **non nul**.

▶ Réduction

R. 86 **Conditions nécessaires et suffisantes de pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable**

E est de dimension finie non nulle et f est un endomorphisme de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est diagonalisable.

i') Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

i") Il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.

ii) E est la somme (directe) des sous-espaces propres de f ; c'est à dire : $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}\, f} \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E.

R. 87 **Une condition suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable**

E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

Si f possède n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

R. 88 **Conditions nécessaires et suffisantes de pour qu'une matrice soit diagonalisable**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est diagonalisable.

i') A est semblable à une matrice diagonale.

ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la somme (directe) des sous-espaces propres de A.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n.

iv) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

v) A est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

R. 89 **Une condition suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

R. 90 **Polynôme annulateur et spectre**

• f est un endomorphisme de E et Q un polynôme annulateur de f.

L'ensemble des valeurs propres de f est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

• A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un polynôme annulateur de A.

L'ensemble des valeurs propres de A est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

▶ Algèbre bilinéaire

R. 91 **Théorème de meilleur approximation**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E et p_F la projection orthogonale sur F.
Soit x un élément de E.

1. • $\forall z \in F,\ \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - z\|$.

   • Si t est un élément de F tel que : $\forall z \in F,\ \|x - t\| \leqslant \|x - z\|$ alors $t = p_F(x)$.

2. Autrement dit $\|x - p_F(x)\|$ est le minimum de l'ensemble $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ et $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

La projection orthogonale de x sur F est **la meilleure approximation** de x par un élément de F.

3. $d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - < x, p_F(x) >$.

★ On est prié de remarquer que ce théorème contient 3 choses.

• L'existence d'un minimum pour la partie $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ de $\mathbb{R}^+$.

• $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

• Le carré de la distance de x à F vaut $\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2 - < x, p_F(x) >$.

R. 92 **Méthode des moindres carrés**

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de A est p.

$\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. ${}^tAA$ est inversible.

2. $\underset{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$ existe.

3. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\| = \underset{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$.

4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

R. 93 **L'aspect théorique de l'orthonormalisation de Schmidt**

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base quelconque de E.

Il existe une base orthonormée de E et une seule $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ telle que pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$:

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

R. 94 **Réduction d'un endomorphisme symétrique**

Soit f un endomorphisme symétrique de E **espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle**.

1. Deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

2. Deux sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3. f est diagonalisable.

4. Mieux, il existe une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ de E constituée de vecteurs propres de f (f se diagonalise dans une base orthonormée).

R. 95 **Réduction d'une matrice symétrique**.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Les valeurs propres de A sont réelles ($\text{Sp}_{\mathbb{R}} A = \text{Sp}_{\mathbb{C}} A$).

2. Deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3. Deux sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

4. A est diagonalisable.

5. Mieux, il existe une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

6. Il existe une matrice $\boxed{\text{orthogonale}}$ P, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

R. 96 **Signe d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à une matrice symétrique.**

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à un matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \geqslant 0$.

2. Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leqslant 0$.

3. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow q(x) > 0$.

4. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow q(x) < 0$.

PRATIQUES OU RHÉTORIQUES USUELLES

Cette section contient quelques pistes sur des pratiques usuelles et quelques "rhétoriques standards" pour éviter des erreurs grossières $\left(\boxed{\textbf{RH}}\right)$.

▶ Polynôme

R. 97 **Présenter un polynôme** $\boxed{\textbf{RH}}$

Soit P un polynôme. Il existe r dans $\mathbb{N}$ et il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ dans $\mathbb{K}^{r+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$.

R. 98 **Présenter un polynôme de degré r** **RH**

Soit P un polynôme. Il existe r dans $\mathbb{N}$ et il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ dans $\mathbb{K}^{r+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ et $a_r \neq 0$.

R. 99 **Nullité d'un polynôme.**

Pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est nul il suffit de lui donner une infinité de racines.

Pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est nul il suffit de lui donner au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes.

Pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est nul il suffit de lui donner au moins $n+1$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

R. 100 **Égalité de deux polynômes**

Pour montrer que deux polynômes sont égaux on peut montrer que leur différence est le polynôme nul en utilisant l'une des conditions ci-dessus.

R. 101 **Factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$**

P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$.

Rappelons que si α est une racine de P d'ordre k, $\bar{\alpha}$ est une racine de P d'ordre k, et que

$(X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = X^2 - 2\,\Re e(\alpha)\,X + |\alpha|^2$.

Ainsi pour factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ il suffit de le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et de regrouper les facteurs correspondant à deux racines non réelles conjuguées.

On obtient alors P comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 sans racine dans $\mathbb{R}$.

▶ Espaces vectoriels

R. 102 **"Simplification d'un vect"**

On ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

a) En permutant les vecteurs de la famille.

b) En supprimant un vecteur de la famille combinaison linéaire des autres.

c) En multipliant un vecteur de la famille par un scalaire non nul.

d) En remplaçant un vecteur par une combinaison linéaire de tous les vecteurs de la famille pourvu que le coefficient de ce vecteur dans la combinaison linéaire ne soit pas nul.

R. 103 **Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel**

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on vérifie le plus souvent que :

1. F est contenu dans E ;

2. F est non vide ;

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u,v) \in F^2,\ \lambda\,u + v \in F$

R. 104 **Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**

Pour montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, le plus souvent on trouve un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E' et on vérifie que E est un sous-espace vectoriel de E'.

R. 105 **Montrer qu'une partie non vide d'un espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel**

F est une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E on peut :

- ou monter que $0_E \notin F$;
- ou EXHIBER λ dans $\mathbb{K}$ et u dans F tels que $\lambda\, u \notin F$.
- ou EXHIBER u et v dans F tels que $u + v \notin F$.

R. 106 **Montrer qu'une famille est libre** **RH**

$(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une rhétorique standard pour montrer que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre :

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, u_k = 0_E$. Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}$.

Dans ce cas on ne raisonne surtout **pas par équivalences.**

R. 107 **Etude de la liberté d'une famille**

$(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La question est : la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est-elle libre ?

Le plus souvent on se donne $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$. Et on traite l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, u_k = 0_E$ **par équivalences**. Cela conduit le plus souvent à la résolution d'un système linéaire.

- ou l'on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}$ et on peut dire que la famille est libre ;
- ou l'on n'obtient pas $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}$ et il n'est pas question dire immédiatement que la famille est liée.

Pour montrer que la famille est liée il convient alors d'EXHIBER $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, u_k = 0_E$ ET $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \neq 0_{\mathbb{K}^p}$.

R. 108 **Montrer qu'une famille est une base en dimension finie**

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **n** non nulle et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille d'éléments de E de cardinal **n**.

Pour montrer que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E il suffit de montrer que cette famille est une famille libre (resp. génératrice) de E

R. 109 **Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie**

F et G sont 2 sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E **de dimension finie**. Pour montrer qu'ils sont supplémenentaire le plus souvent :

- ou on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ ET $\dim F + \dim G = \dim E$
- ou, si $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$, on se donne une base $\mathcal{B}_F$ de F, une base $\mathcal{B}_G$ de G et on montre que "$\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$" est une base de E.

R. 110 **Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque** **RH**

F et G sont 2 sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour montrer qu'ils sont supplémenentaire le plus souvent **on se donne u dans E** et on montre par Analyse/Synthèse que : $\exists\,!\,(v,w) \in F\times G,\ u = v+w$. Une rhétorique standard est :

Analyse-Unicité $\boxed{\text{SUPPOSONS}}$ que $u = v + w$ avec v dans F et w dans G.

On exprime alors les "inconnues " v et w en fonction de u. On obtient : $v = \varphi(u)$ et $w = \psi(u)$.

Synthèse-Existence $\boxed{\text{POSONS}}$ $v = \varphi(u)$ et $w = \psi(u)$.

On montre alors trois choses : $u = v + w$, $v \in F$ et $w \in G$.

R. 111 **Montrer que p sous-espaces vectoriels sont en somme directe**

F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour montrer qu'ils sont en somme directe le plus souvent :

• Ou on se donne p éléments u_1, u_2, ..., u_p appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_p tels que $u_1+u_2+\cdots+u_p = 0_E$ et on montre que $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E$.

• Ou, si pour tout $k \in [\![1,p]\!],\ F_k \neq \{0_E\}$, on se donne une base de chacun de ces sous-espaces et on montrer qu'en les concatainant on obtient une famille libre de E.

R. 112 **Construire un supplémentaire en dimension finie**

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et F est un sous espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ et E.

Pour construire un supplémentaire de F dans E, on construit une base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de F que l'on compète en une base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E. Alors $G = \mathrm{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$ est un supplémentaire de F dans E.

► Applications linéaires

R. 113 **Détermination d'un noyau** **RH**

f est une application linéaire de E dans E'. Il faut bien distinguer deux types de problème.

1. On cherche à montrer que le noyau de f est réduit. **Alors on ne raisonne pas par équivalences**.

Rhétorique usuelle : $\boxed{\text{Soit } u \text{ un élément de } \mathrm{Ker}\, f.}$ Montrons que $u = 0_E$.

2. On cherche le noyau de f. **Alors on raisonne par équivalences ou par double inclusion.**

Rhétorique usuelle : $\boxed{\text{Soit } u \text{ un élément de } E.}$ $u \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(0_E) = 0_{E'} \iff \cdots$

R. 114 **Dimension d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel**

Pour trouver la dimension d'un espace vectoriel (ou d'un sous-espace vectoriel) on peut en trouver une base.

On peut encore le rendre isomorphe un espace vectoriel dont on connaît la dimension.

R. 115 **Isomorphisme**

f est une application linéaire de E dans E'. Pour montrer que f est un isomorphisme de E sur E' il suffit **parfois** de trouver une application g de E' dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{E'}$.

La linéarité de g n'est pas utile au départ ; elle est acquise à l'arrivée...

R. 116 Automorphisme

f est un endomorphisme de E. Pour montrer que f est un automorphisme de E il suffit **parfois** de trouver une application g de E dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{E'}$.

Si E est de dimension finie l'une des égalité suffit.

R. 117 Isomorphisme en dimension finie

f est une application linéaire de E dans E' et $\boxed{\boxed{\dim E = \dim E' < +\infty}}$.

Pour montrer que f est un isomorphisme de E sur E' il suffit de montrer que f est injective (resp. surjective).

R. 118 Automorphisme en dimension finie

f est un endomorphisme de E et $\boxed{\boxed{\dim E < +\infty}}$.

Pour montrer que f est un automorphisme de E il suffit de montrer que f est injective (resp. surjective).

R. 119 Reconnaître une projection

p est **un endomorphisme de E**.

Pour montrer que p est une projection il suffit de montrer que $p \circ p = p$. p est alors la projection sur $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

Il suffit aussi de trouver deux supplémentaires F et G dans E tels que : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ et $\forall x \in G,\ p(x) = 0_E$. p est alors la projection sur F parallèlement à G.

R. 120 Reconnaître une symétrie

s est **un endomorphisme de E**.

Pour montrer que s est une symétrie il suffit de montrer que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. s est alors la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Il suffit aussi de trouver deux supplémentaires F et G dans E tels que : $\forall x \in F,\ s(x) = x$ et $\forall x \in G,\ s(x) = -x$. s est alors la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

R. 121 Montrer qu'une application linéaire est nulle

Pour montrer qu'une application linéaire f de E dans E' est nulle on peut montrer :

- que $\mathrm{Im}\, f = \{0_{E'}\}$;
- que $\mathrm{Ker}\, f = E$;
- que f est nulle sur deux supplémentaires de E ;
- que f coïncide avec $0_{\mathcal{L}(E)}$ sur une base de E.

R. 122 Montrer que deux applications linéaires sont égales

Pour montrer que deux applications linéaires, f et g, de E dans E' sont égales on peut montrer :

- que $f - g = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
- que f et g coïncident sur deux supplémentaires de E ;

- que f et g coïncident sur une base de E.

R. 123 **Construire une application linéaire**

$\mathcal{B}$ étant une base de E pour construire une application linéaire de E dans E' il suffit de construire les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

On n'oubliera pas de penser à cela pour construire des contre-exemples.

▶ Matrices

R. 124 **Montrer que deux matrices sont égales**

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Pour montrer que A et B sont égales on peut montrer que $\forall j \in [\![1, n]\!],\ AE_j = BE_j$ ou que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ {}^tE_iA = {}^tE_iB$.

R. 125 **Montrer qu'une matrice est inversible** **RH**

- La question est : montrer que la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible.

On prend X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et on montre que $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ **sans raisonner par équivalences**.

- La question est : la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle inversible ?

On prend X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On résoud par **équivalences** le sytème $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Si $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ est la seule solution A est inversible.

Sinon on EXHIBE un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et on dit que A n'est pas inversible.

Dans les deux cas on peut aussi utiliser une réduite de Gauss de A.

R. 126 **Inverser une matrice** **RH**

- A est une matrice **inversible** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour trouver l'inverse de A : Considérons un élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX$

On exprime alors les composantes de X en fonction de celles de Y sans raisonner par équivalences.

- A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour traiter simultanément l'inversibilité et l'inversion éventuelle de A

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $AX = Y \Leftrightarrow$ ....

On résout ensuite ce système en raisonnant par équivalences.

R. 127 **Inverser une matrice again**

Pour montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, il suffit de trouver une matrice A' (resp. A'') de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = I_n$ (resp. $A''A = I_n$; dans ce cas $A^{-1} = A'$ (resp. $A^{-1} = A''$).

R. 128 **Associer un endomorphisme à une matrice carrée** **RH**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une rhétorique classique pour associer à A un endomorphisme.

> Posons $E = \mathbb{K}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$. Considérons l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

R. 129 **Associer une application linéaire à une matrice.** **RH**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une rhétorique classique pour associer à A une application linéaire.

> Posons $E = \mathbb{K}^p$, et $E' = \mathbb{K}^n$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ la base canonique de $E' = \mathbb{K}^n$. Considérons l'application linéaire f de E dans E' dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est A ($M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A$).

R. 130 **Rang d'une matrice**

Pour trouver le rang d'une matrice on peut déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes (resp. ligne).

R. 131 **Semblablité** **RH**

Soit à montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

> Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Cherchons une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est B.

On fait alors une analyse du problème en commençant par supposer que $\mathcal{B}'$ existe et on termine par une synthèse qui consiste à CONSTRUIRE $\mathcal{B}'$. On indique clairement où commence la syntèse.

▶ Réduction

R. 132 **Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme** **RH**

Soit f un endomorphisme de E ($\dim E \in \mathbb{N}^*$).

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de f ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de f.

> Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit u un élément de E.
>
> $$f(u) = \lambda u \iff \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre (le plus souvent) un système avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de f sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il faut dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$.

R. 133 **Recherche des valeurs propres d'une matrice** **RH**

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

> Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$.

Suit cette recherche en utilisant des opérations élémentaires licites.

A'_λ est une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible donc si et seulement si A'_λ est non inversible. Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement si l'un des éléments de la diagonale de A'_λ est nul donc si et seulement si ...

R. 134 **Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'une matrice** **RH**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda\, X\}$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de A ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de A.

Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \iff \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système... avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de A sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il faut dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$.

R. 135 **Réduction d'un endomorphisme**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E.

1. On obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

2. Si $\mathcal{B}'$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

R. 136 **Diagonaliser une matrice diagonalisable**

Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base de chacun des sous-espaces propres de A.

- Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

R. 137 **Interpréter une égalité du type** $P^{-1}AP = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

A est une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $P^{-1}AP = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, $C_j(P)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1(P), C_2(P), \cdots, C_n(P))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

R. 138 **Pratique de la diagonalisation d'un endomorphisme diagonalisable** **RH**

f est un endomorphisme diagonalisable de E. $\mathcal{B}$ est une base de E. $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (f, λ_i).

Comme $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (f, λ_i), $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

R. 139 **Pratique de la diagonalisation d'une matrice diagonalisable** **RH**

A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (A, λ_i).

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (A, λ_i), $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}'$.

Alors $P^{-1}AP = D$ avec $D =\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

▶ Algèbre bilinéaire

R. 140 **Produit scalaire** **RH**

Soit à montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

- On montre si nécessaire que $< u, v >$ a un sens pour tout couple (u, v) d'éléments de E.
- Soient λ un réel , u, v et w trois éléments de E.
  - $< \lambda u + v, w >= \cdots = \lambda < u, w > + < v, w >$.
  - $< u, v >= \cdots =< v, u >$.
  - On montre que $< u, u >\geqslant 0$.
  - Supposons que $< u, u >= 0$ et montrons que $u = 0_E$...

Ce qui précède suffit pour dire que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

R. 141 **Orthogonal d'un sous-espace** **RH**

F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E. On suppose que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et on se propose de déterminer $F^{\perp}$.

Soit $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_n$ un élément de E.

$v \in F^{\perp} \iff < v, u_1 >=< v, u_2 >= \cdots < v, u_p >= 0 \iff \cdots$

R. 142 **L'aspect pratique de l'orthonormalisation de Schmidt**

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base quelconque d'un sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien $(E, < .,. >)$.

Pour construire la base orthonormée de F déduite de $\mathcal{B}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt on peut utiliser la méthode suivante.

Étape 1 On commence par construire une famille orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs non nuls de F de la manière suivante.

- On pose $v_1 = u_1$.
- On pose $v_2 = u_2 + \alpha\, v_1$ et on cherche α tel que v_2 soit orthogonal à v_1. Cela conduite à poser $\alpha = -\dfrac{< u_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >}\cdot$
- On pose $v_3 = u_3 + \beta\, v_1 + \gamma\, v_2$ et on cherche β et γ tels que v_3 soit orthogonal à v_1 et v_2.

Cela conduite à poser $\beta = -\dfrac{< u_3, v_1 >}{< v_1, v_1 >}$ et $\gamma = -\dfrac{< u_3, v_2 >}{< v_2, v_2 >}\cdot$

- Et ainsi de suite...

Notons que la suite $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est défine par la récurrence suivante :

$$v_1 = u_1 \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >} v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Étape 2 On pose $\forall k \in [\![1, n]\!],\ w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|} v_k$.

$(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est alors la base orthonormée de F déduite de $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

R. 143 Définir analytiquement une projection orthogonale

$(E, < .,. >)$ est un espace vectoriel euclidien (ou un préhilbertien....). F est un sous-espace vectoriel de E et p_F est la projection orthogonale sur F. $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base quelconque de F.

x est un élément de E. Pour trouver les coordonnées de $p_F(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ on peut :

M1 • Utiliser $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

M2 • Construire une base orthonormée $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ de F et utiliser : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} < x, w_k > w_k$.

M3 • Poser $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k\, u_k$. En écrivant que $x - P_F(x)$ est orthogonal à F donc à tous les éléments de la base $\mathcal{B}$ on obtient :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i > = \sum_{k=1}^{p} x_k < u_k, u_i >.$$

Ceci donne un système linéaire de p équations à p inconnues qui s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = (< u_i, u_j >)$ (A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \\ \vdots \\ < x, u_p > \end{pmatrix}$

• Ne pas oublier de regarder au préalable si F est un hyperplan. Dans ce cas on détermine $p_{F^{\perp}}$ ($F^{\perp}$ est une droite vectorielle...) et on utilise $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^{\perp}}$.

R. 144 Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique RH

f est un endomorphisme symétrique de E ayant p valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E. $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ $\mathcal{B}_i$ de SEP (f, λ_i).

$E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (f, λ_i) et SEP (f, λ_1), SEP (f, λ_2), ..., SEP (f, λ_p) sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de E.
- $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = {}^tP M_{\mathcal{B}}(f) P$.

R. 145 **Diagonalisation d'une matrice symétrique à coefficients réels** **RH**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant p valeurs deux à deux distinctes. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\boxed{\text{orthormale}}$ $\mathcal{B}_i$ de SEP (A, λ_i).

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (A, λ_i) et SEP (A, λ_1), SEP (A, λ_2), ..., SEP (A, λ_p) sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à cette base $\mathcal{B}'$. Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

NE PAS OUBLIER

R. 146 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Le noyau d'une forme linéaire **non nulle** sur E est un hyperplan de E.

Tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

R. 147 **Suite complexe définie par une récurrence linéaire d'ordre 2**

a et b sont deux éléments de $\mathbb{C}$. On suppose b non nul.

$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de complexes telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Δ est le discriminant de l'équation : $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - az - b = 0$.

1. $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$.
2. Si Δ n'est pas nul l'équation admet deux solutions z_1 et z_2. $\Big((z_1^n), (z_2^n)\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.
3. Si Δ est nul l'équation admet une solution et une seule z. $\Big((z^n)_{n \geqslant 0}, (nz^n)_{n \geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.

R. 148 **Suite réelle définie par une récurrence linéaire d'ordre 2**

a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$. On suppose b non nul.

$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Δ est le discriminant de l'équation : $\boxed{z \in \mathbb{C}}$ et $z^2 - az - b = 0$.

1. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
2. Si Δ est strictement positif l'équation admet deux solutions réelles r_1 et r_2. $\Big((r_1^n)_{n\geqslant 0}, (r_2^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.
3. Si Δ est nul l'équation admet une solution et une seule r. $\Big((r^n)_{n\geqslant 0}, (nr^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.
4. Si Δ est strictement négatif l'équation admet deux solutions complexes et conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$

$\Big((\rho^n \sin(n\theta))_{n\geqslant 0}, (\rho^n \cos(n\theta))_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

R. 149 **L'équation différentielle $\mathbf{y' + ay = 0}$**

a est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications dérivables f de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)\,f(x) = 0$.

- $\mathcal{S}$ est une droite vectorielle de l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$.
- Si A est une primitive de a sur I, (e^{-A}) est une base de $\mathcal{S}$.
