Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1980

Composition de Mathématiques (4 R)

1re EPREUVE

Dans tout le problème on désigne par n un naturel strictement positif, par I l'intervalle $[-1, +1]$.

PREMIÈRE PARTIE

Pour $x \in I$, on pose $T_0(x) = 1$ et $T_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc}\cos x)$.

1° Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.

Prouver que T_n est un polynôme en x de degré n et calculer le coefficient de x^n. (On pourra poser $x = \cos\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$).

2° Montrer que T_n, $n \in N^*$, admet exactement n racines réelles, distinctes, toutes dans l'intervalle I. On les note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en les classant par valeurs décroissantes. Expliciter x_j en fonction de l'angle $\left(\dfrac{2j-1}{n}\right)\pi$.

3° Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur I.

a) Montrer que, pour tout $f \in E$, l'intégrale $\mathbf{J}(f) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ existe.

b) Calculer, à l'aide du changement de variable $x = \cos t$, les intégrales suivantes : $\mathbf{J}(1)$, $\mathbf{J}(T_n^2)$, $\mathbf{J}(T_n \cdot T_m)$ avec $m \neq n$.

c) Vérifier, rapidement, que les polynômes $T_0, T_1, \ldots, T_n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n.

En déduire que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathbf{J}(T_n . P) = 0$. Que vaut $\mathbf{J}(T_n . P)$ si P est de degré n ?

DEUXIÈME PARTIE

On se donne dans cette partie n nombres réels distincts de I : $x_1, \ldots, x_n$.

On pose, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_j(x) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k}\right)$ et on note L'_j le polynôme dérivé de L_j. $\left(\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (a_k) \text{ désigne le produit des nombres } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ excepté } a_j. \right)$

1° Calculer, en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$, le nombre réel $L_j(x_i)$.

2° Soit F l'application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$\forall\, P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $F(P) = (P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$. (On note P' le polynôme dérivé de P).

. . . / . . .

a) Vérifier que F est linéaire.

b) Montrer que le noyau de F est réduit au polynôme nul.

c) En déduire que F est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3° Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Utiliser la question précédente pour prouver qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus $2n-1$, que l'on note $\tilde{f}$, tel que :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \tilde{f}(x_j) = f(x_j) \text{ et } \tilde{f}'(x_j) = f'(x_j).$$

4° Vérifier que :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j^2(x) + \sum_{j=1}^{n} [f'(x_j) - 2f(x_j) L_j'(x_j)](x - x_j) L_j^2(x).$$

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie f est une fonction numérique $2n$ fois dérivable sur I et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n points donnés distincts de I.

1° On suppose que f s'annule ainsi que sa dérivée f' en chacun des x_i. On se donne $x \in I$ *distinct* des x_i et on définit une fonction φ par :

$\varphi(t) = f(t) - A(t-x_1)^2 (t-x_2)^2 \dots (t-x_n)^2$ où la constante réelle A est déterminée par la *condition* $\varphi(x) = 0$.

a) Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, que la dérivée φ' s'annule en au moins $2n$ points distincts de I.

b) En déduire que chaque dérivée d'ordre p, $\varphi^{(p)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2n$, s'annule en au moins $2n - p + 1$ points distincts de I.

c) En déduire qu'il existe au moins un $c \in I$ tel que $f(x) = (x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 \dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$.

d) Est-ce encore vrai si $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$?

2° On ne suppose plus que f et f' s'annulent nécessairement aux points x_i, et on adopte les notations du 3° de la deuxième partie. Montrer que :

$$(1) \qquad \forall x \in I, \exists c \in I, f(x) = \tilde{f}(x) + (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

QUATRIÈME PARTIE

Soit $f : I \rightarrow R$, une fonction $2n$ fois continûment dérivable sur I.

Dans cette partie, on choisit pour n-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, le n-uple constitué des n racines du polynôme T_n.

Pour chaque $x \in I$ on fait choix d'un $c \in I$ satisfaisant à *l'égalité* (1) *du* 2° *de la troisième partie.*

1° *Montrer que, quel que soit* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_j) L_j^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. (On pourra utiliser le 3° c) de la première partie.)

En déduire que $\mathbf{J}(\tilde{f}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \mathbf{J}(L_j^2)$.

2° On pose $a_j = \mathbf{J}(L_j^2)$.

Montrer, à l'aide des parties II et III, qu'il existe un réel $d \in I$ tel que :

$$\mathbf{J}(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j) + \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}.$$

3° On dit que la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j)$, notée $\tilde{\mathbf{J}}(f)$, est une valeur approchée de l'intégrale $\mathbf{J}(f)$.

Montrer que $\tilde{\mathbf{J}}(f) = \mathbf{J}(f)$ si f est un polynôme de degré au plus $2n-1$.

N. B. — On peut démontrer, ce que l'on ne demande pas de faire, que les coefficients $a_1, \dots, a_n$ sont tous égaux à $\dfrac{\pi}{n}$.