202

Ecole des Hautes Etudes Commerciales 1983

CONCOURS D'ADMISSION DE 1983

Mathématiques II

TOUTES OPTIONS

ATTENTION : *La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.*

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par f_n, g_n et h_n les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)^n}, \qquad g_n(x) = \frac{x}{(1+x+x^2)^n}, \qquad h_n(x) = \frac{x^2}{(1+x+x^2)^n}.$$

I. 1. Etudier la variation des fonctions f_1, g_1 et h_1. Dresser les tableaux de variation de ces fonctions. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormal.

2. Déterminer les nombres de points d'inflexion de ces courbes (ce qui revient à déterminer les nombres de points où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe). Calculer les coordonnées des points d'inflexion et les pentes des tangentes en ces points à 10^{-2} près.

II. On pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt, \qquad J_n = \int_0^1 g_n(t)\,dt, \qquad K_n = \int_0^1 h_n(t)\,dt.$$

1. Montrer que, pour tout élément x de $[0,1]$,

$$1 - x \leqslant \frac{1}{1+x+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

Trouver un équivalent simple de I_n. (On dit que les suites (u_n) et (v_n) de nombres réels strictement positifs sont équivalentes lorsque le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 si n tend vers $+\infty$).

3. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 3$, calculer les intégrales

$$\int_0^1 t(1-t)^n\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^n}\,dt.$$

Trouver un équivalent simple de J_n.

4. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 4$, calculer les intégrales

$$\int_0^1 t^2(1-t)^n\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^n}\,dt.$$

Trouver un équivalent simple de K_n.

.../...