I Q1.. a.. → $u_0 = a \leq 2a$ → Supposons $u_n \leq 2a$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que : $u_{n+1} \leq 2a$.

$\frac{1-e^{-n}}{2} \geq 0$; $\frac{1-e^{-n}}{2} u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{2} \times 2a = (1-e^{-n}) a \leq a$; $u_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n \leq a + a = 2a$ ...cqfd.

Finalement cette récurrence montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2a$.

b.. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$.

→ C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = a$ et $u_1 = a$

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$-e^{n+1} \leq -e^{n}$; $-e^{-n} \leq e^{-n-1}$; $\frac{1-e^{-n}}{2} \leq \frac{1-e^{-n-1}}{2}$; $u_n \frac{1-e^{-n}}{2} \underset{u_n \geq 0}{\leq} u_n \frac{1-e^{-n-1}}{2} \underset{u_n \leq u_{n+1} \text{ et } \frac{1-e^{-n-1}}{2} \geq 0}{\leq} u_{n+1} \frac{1-e^{-n-1}}{2}$

Par conséquent : $a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n \leq a + \frac{1-e^{-n-1}}{2} u_{n+1}$; $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$; $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et croissante

c.. $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $2a$; elle converge. Posons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$; par conséquent : $\ell = a + \frac{1}{2}\ell$; $\ell = 2a$.

Finalement : $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $2a$.

Q2 a.. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$.

→ $v_1 \leq a + \frac{1-1}{2} v_0 = a = u_1$

→ Supposons l'inégalité vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$v_{n+1} \leq a + \frac{1-e^{-n}}{2} v_n \underset{\frac{1-e^{-n}}{2} \geq 0 \,+\, H.R.}{\leq} a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n = u_{n+1}$ ...cqfd.

b.. $(v_n)_{n\geq 0}$ est majorée par $\max(v_0, 2a)$ car la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par $2a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$.

c.. $a = 45$ et $v_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnent un contre-exemple !

$a \in \mathbb{R}_+$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnent un second contre-exemple.

Il peut y avoir cependant convergence pour $(v_n)_{n\geq 0}$ ($a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$)

Q3 a.. $f : x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\exists \theta_x \in]0,1[$, $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(x\theta_x)\frac{x^3}{6} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x\theta_x}\frac{x^3}{6}$

donc $e^{-x} - (1 - x + \frac{x^2}{2}) = -e^{-x\theta_x}\frac{x^3}{6} \leq 0$; $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$. Ceci vaut encore pour $x = 0$,

par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

b.. $\int_0^1 e^{-x^3} dx \underset{\forall x \in [0,1],\, x^3 \in [0,1]}{\leq} \int_0^1 (1 - x^3 + \frac{x^6}{2}) dx = [x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{14}]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} = \frac{23}{28} \leq \frac{5}{6}$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq e^{-x^3} \leq e^{-x}$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A e^{-x} dx = \lim_{A\to+\infty} (\frac{1}{e} - e^{-A}) = \frac{1}{e}$

donc $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et vaut $1/e$; les inégalités précédentes montrent alors que

$\int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx$ converge et est majorée par $1/e$ donc par $1/2$.

Finalement $\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$ converge et est majorée par $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

$\omega_1 \le a$

Q4.- Remarque.. Soit $n\in\mathbb{N}$. $\int_0^n e^{-x^3}dx \le \int_0^{+\infty} e^{-x^3}dx$ $(\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x^3}\ge 0)$; $\int_0^{+\infty} e^{-x^3}dx \le \frac{4}{3}$ p 2.

donc $\int_0^n e^{-x^3}dx \le \frac{4}{3}$; supposons $\omega_n \ge 0$; $\omega_{n+1} \le a + \frac{\omega_n}{4}\int_0^n e^{-x^3}dx \le a + \frac{1}{3}\omega_n$

si $\omega_n \le \alpha a$ alors $\omega_{n+1} \le (1+\frac{\alpha}{3})a$ et $(1+\frac{\alpha}{3})a \le \alpha a$ ssi $0 \le a(\frac{2}{3}\alpha - 1) = \frac{2}{3}a(\alpha - \frac{3}{2})$

C'est clair maintenant ! Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n \le \frac{3}{2}a$

→ c'est vrai pour $n=1$ $\left(\omega_1 \le a + \frac{\omega_0}{4}\int_0^0 e^{-x^3}dx = a \le \frac{3}{2}a\right.$ $(a\in\mathbb{R}_+)$

→ supposons l'inégalité vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

1er cas.- $\omega_n \le 0$. Alors $\omega_{n+1} \le a \le \frac{3}{2}a$.

2e cas.. $\omega_n \ge 0$. $\frac{\omega_n}{4}\int_0^n e^{-x^3}dx \le \frac{\omega_n}{4}\times\frac{4}{3} = \frac{1}{3}\omega_n \le \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a$

$\omega_{n+1} \le a + \frac{\omega_n}{4}\int_0^n e^{-x^3}dx \le a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$.

II Q1.- Soit $x\in\mathbb{R}_+$. f est continue sur $[0,x]$. f possède une borne supérieure sur $[0,x]$ c'est à dire que $\{f(t);\ t\in[0,x]\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $g(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t)$. Montrons que g est croissante ; soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $x\le x'$.

$[0,x]\subset[0,x']$. $g(x')$ est un majorant de f sur $[0,x']$ donc sur $[0,x]$; $g(x')$ est plus grand que le plus petit des majorants de f sur $[0,x]$ c'est à dire $g(x)$; $g(x)\le g(x')$... cqfd.

Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit de montrer que g est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$ et continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x_0\in\mathbb{R}_+$. Montrons que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\mathbb{R}_+, 0\le x-x_0<\eta \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$ (continuité à droite)

g étant croissante il suffit de montrer que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\mathbb{R}_+, 0\le x-x_0<\eta \Rightarrow g(x)<g(x_0)+\varepsilon$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. f est continue en x_0. $\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall z\in\mathbb{R}_+, |z-x_0|<\eta \Rightarrow |f(z)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(z)<f(x_0)+\varepsilon/2$

Soit $x\in\mathbb{R}_+$ tel que : $0\le x-x_0<\eta$. Montrons alors que : $g(x)<g(x_0)+\varepsilon$, c'est à dire : $\sup_{t\in[0,x]} f(t) < g(x_0)+\varepsilon$

$\forall t\in[0,x_0]$, $f(t)\le g(x_0) < g(x_0)+\varepsilon/2$

$\forall t\in[x_0,x]$, $|t-x_0|\le|x-x_0|<\eta$, $\forall t\in[x_0,x]$, $f(t)<f(x_0)+\varepsilon \le g(x_0)+\varepsilon/2$

Finalement $\forall t\in[0,x]$, $f(t)<g(x_0)+\varepsilon/2$, donc $\sup_{t\in[0,x]} f(t) \le g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} < g(x_0)+\varepsilon$

C'est ce qu'il fallait montrer ; g est donc continue à droite en x_0.

Soit $x_0\in\mathbb{R}_+^*$. Montrons que g est continue à gauche en x_0 ; c'est à dire que :

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\mathbb{R}_+, 0\le x_0-x<\eta \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. g étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ il suffit de montrer que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\mathbb{R}_+, 0\le x_0-x<\eta \Rightarrow g(x_0)<g(x)+\varepsilon$.

1er cas.. $g(x_0)>f(x_0)$. $\exists\alpha\in[0,x_0[$, $f(\alpha)=\sup_{t\in[0,x_0]} f(t) = g(x_0)$ (f est continue sur $[0,x_0]$)

Soit $x\in[\alpha,x_0]$. $g(x_0) \underset{g \text{ croissante}}{\ge} g(x) \ge f(\alpha) = g(x_0)$; $\forall x\in[\alpha,x_0]$, $g(x)=g(x_0)$; g est constante [$\alpha\in[0,x]$!]

sur $[\alpha,x_0]$; g est continue à gauche en x_0

2e cas.. $g(x_0)=f(x_0)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < f(x) + \varepsilon$ (continuité de f en x_0)

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x_0 - x < \eta \Rightarrow g(x_0) = f(x_0) < f(x) + \varepsilon \leq g(x) + \varepsilon$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x_0 - x < \eta \Rightarrow 0 \underset{\uparrow}{\leq} g(x_0) - g(x) < \varepsilon \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.

g est croissante

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ 0 \leq x_0 - x < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. g est continue à gauche en x_0.

Q2+Q3+Q4 Ces 3 questions sont résolues si l'on montre ~~les résultats suivants~~

- h est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge
- f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t)dt$.

  a) f si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors f est majorée sur $\mathbb{R}_+$

  b) si f est positive sur $\mathbb{R}_+$ alors f est majorée sur $\mathbb{R}_+$

  c) f est majorée sur $\mathbb{R}_+$!

(Pour retrouver Q2 prendre $h : x \mapsto e^{-x}$ et pour Q3 prendre $h : x \mapsto e^{-x^3}$; dans les deux cas h est positive et $\int_0^{+\infty}$ converge)

a) On suppose f croissante sur $\mathbb{R}_+$

Notons H une primitive de h sur $\mathbb{R}_+$. H est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car h est positive. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [k, +\infty[$.

$f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t)dt = a + \int_0^k f(t)h(t)dt + \int_k^x f(t)h(t)dt \underset{\uparrow}{\leq} a + \int_0^k f(t)h(t)dt + f(x)\int_k^x h(t)dt$

f est croissante et h est positive

$f(x) \leq a + \int_0^k f(t)h(t)dt + f(x)(H(x) - H(k))$; $[1 - (H(x) - H(k))] f(x) \leq a + \int_0^k f(t)h(t)dt$.

$\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge ; par conséquent $\lim_{y \to +\infty} \int_y^{+\infty} h(t)dt = 0$

$\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+, y \geq A \Rightarrow |\int_y^{+\infty} h(t)dt| < 1/3$.

Posons maintenant $k = E(A) + 1$ et supposons toujours $x \geq k$.

$|\int_k^x h(t)dt| = |\int_k^{+\infty} h(t)dt - \int_x^{+\infty} h(t)dt| \leq |\int_k^{+\infty} h(t)dt| + |\int_x^{+\infty} h(t)dt| < 2/3$

$0 \leq H(x) - H(k) \underset{\uparrow}{=} |H(x) - H(k)| = |\int_k^x h(t)dt| < 2/3$; $-(H(x) - H(k)) > -\frac{2}{3}$; $1 - (H(x) - H(k)) > \frac{1}{3}$

H est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Par conséquent $0 < \dfrac{1}{1 - (H(x) - H(k))} < 3$ et : $\dfrac{1}{1 - (H(x) - H(k))}\left[a + \int_0^k f(t)h(t)dt\right] \underset{\uparrow}{\leq} 3\max(0, a + \int_0^k f(t)h(t)dt)$

faire 2 cas | [ ] < 0 ; [ ] ≥ 0

$\forall x \in [k, +\infty[, \quad f(x) \leq 3\max(0, a + \int_0^k f(t)h(t)dt)$

f est donc majorée sur $[k, +\infty[$. De plus f est continue sur $[0, k]$; f est encore majorée sur $[0, k]$.

Finalement f est majorée sur $[0, k]$ et $[k, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$ ... cqfd.

b) On suppose f positive sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\forall t \in [0, x]$, $f(t) \leq a + \int_0^t f(u)h(u)du \underset{\downarrow\, f \geq 0 \text{ et } h \geq 0}{\leq} a + \int_0^x f(u)h(u)du \underset{\downarrow\, f \leq g \text{ et } h \geq 0}{\leq} a + \int_0^x g(u)h(u)du$

$g : x \mapsto \sup_{z \in [0, x]} f(z)$

$\forall t \in [0, x]$, $f(t) \leq a + \int_0^x g(u)h(u)du$

Par conséquent $\sup_{t \in [0, x]} f(t) \leq a + \int_0^x g(u)h(u)du$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq a + \int_0^x g(t)h(t)dt$. Comme g est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ nous sommes ramenés au a]. g est donc majorée sur $\mathbb{R}_+$; f étant majorée par g, f est majorée sur $\mathbb{R}_+$

c] f est quelconque.

Posons $f^+ = \max(0, f)$. $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$. f^+ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. $f \leq f^+$

Pour montrer que f est majorée il suffit de montrer que f^+ est majorée. Pour ce faire nous allons utiliser b].

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t)\,dt \leq |a| + \int_0^x f(t)h(t)\,dt \underset{}{\overset{f \leq f^+ \text{ et } h \geq 0}{\leq}} |a| + \int_0^x f^+(t)h(t)\,dt$; de plus :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad 0 \leq |a| + \int_0^x f^+(t)h(t)\,dt \qquad (f^+ \geq 0 \text{ et } h \geq 0)$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^+(x) = \max(0, f(x)) \leq |a| + \int_0^x f^+(t)h(t)\,dt$

Nous pouvons utiliser b] avec $|a|$ et f^+ ; f^+ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

f étant majorée par f^+, f est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

Q5.- a] Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\int_0^x \varphi(t)e^{-t}\,dt = \int_0^x \left(f(t) - a\,e^{1-e^{-t}}\right)e^{-t}\,dt = \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt - a\int_0^x e^{-t}e^{1-e^{-t}}\,dt$

$\int_0^x \varphi(t)e^{-t}\,dt = \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt - a\left[e^{1-e^{-t}}\right]_0^x = \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt - a\left(e^{1-e^{-x}} - 1\right)$

$\int_0^x \varphi(t)e^{-t}\,dt = a + \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt - a\,e^{1-e^{-x}} \underset{(4)}{\geq} f(x) - a\,e^{1-e^{-x}} = \varphi(x)$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \varphi(x) \leq \int_0^x \varphi(t)e^{-t}\,dt$

b] Soit $c \in \mathbb{R}_+$. $\lambda = \sup_{w \in [0,c]} \varphi(w)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [0,c],\ \varphi(x) \leq \frac{\lambda(1-e^{-x})^n}{n!}$

→ C'est évident pour $n = 0$ $\left(\forall x \in [0,c],\ \varphi(x) \leq \lambda = \sup_{w \in [0,c]} \varphi(w)\right)$

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Soit $x \in [0,c]$. $\forall t \in [0,x],\quad \varphi(t) \leq \frac{\lambda(1-e^{-t})^n}{n!}$ (H.R.)

Donc $\int_0^x \varphi(t)e^{-t}\,dt \leq \int_0^x \frac{\lambda(1-e^{-t})^n}{n!}e^{-t}\,dt = \frac{\lambda}{n!}\left[\frac{(1-e^{-t})^{n+1}}{(n+1)}\right]_0^x = \lambda\,\frac{(1-e^{-x})^{n+1}}{(n+1)!}$

Par conséquent : $\varphi(x) \leq \int_0^x \varphi(t)e^{-t}\,dt \leq \frac{\lambda(1-e^{-x})^{n+1}}{(n+1)!}$ ... cqfd.

c] Fixons c dans $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in [0,c],\ \varphi(x) \leq \lambda\,\frac{(1-e^{-x})^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\left(\lambda = \sup_{w \in [0,c]} \varphi(w)\right)$

En particulier : $\varphi(c) \leq \frac{\lambda(1-e^{-c})^n}{n!}$. $\lim_{n \to +\infty} \frac{(1-e^{-c})^n}{n!} = 0$ (car connu), donc $\varphi(c) \leq 0$

Finalement : $\forall c \in \mathbb{R}_+, \varphi(c) \leq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) \leq 0$! $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq a\,e^{1-e^{-x}}$.

d] Il suffit de montrer que $u : x \mapsto a\,e^{1-e^{-x}}$ est une fonction continue qui vérifie (4) !

La continuité est évidente vérifions la relation 4.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^x u(t)e^{-t}\,dt = \int_0^x a\,e^{1-e^{-t}}(e^{-t})\,dt = a\left[e^{1-e^{-t}}\right]_0^x = a\left(e^{1-e^{-x}} - 1\right) =$

$\int_0^x u(t)e^{-t}\,dt + a = u(x) \geq u(x)$! u vérifie (4)

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \psi(x) \geq a\,e^{1-e^{-x}}$.