Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1983

Mathématiques I

OPTION GENERALE

Jeudi 12 Mai 1983, de 8 heures à midi

ATTENTION : *la présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.*

On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant 0$. Soit a un nombre réel.

I. Dans cette partie, on suppose $a \geqslant 0$.

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $$u_{n+1} = a + \frac{1 - e^{-n}}{2} u_n ,$$

et la condition initiale $u_0 = a$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2a$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

2. Soit (v_n) une suite de nombres réels satisfaisant à la relation :

(2) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $$v_{n+1} \leqslant a + \frac{1 - e^{-n}}{2} v_n .$$

   a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n \leqslant u_n$.
   b) Montrer que la suite (v_n) est majorée.
   c) A l'aide d'un contre-exemple, montrer que la suite (v_n) n'est pas nécessairement convergente.

3. a) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$, $e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}$.
   b) Montrer que $\int_0^1 e^{-x^3}\, dx \leqslant \frac{5}{6}$.
   c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^3}\, dx$ est convergente, et que $\int_1^{+\infty} e^{-x^3}\, dx \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Soit (w_n) une suite de nombres réels satisfaisant à la relation :

(3) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $$w_{n+1} \leqslant a + \frac{w_n}{4} \int_0^n e^{-x^3}\, dx .$$

Montrer que la suite (w_n) est majorée.

II. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles.

1. Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des nombres réels f(t), où $t \in [0,x]$, admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. On note g(x) cette borne supérieure.

Montrer que la fonction g ainsi définie est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$.

.../...

2. On suppose dans cette question que f vérifie la relation :

$$(4)\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+)\qquad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)\, e^{-t}\, dt\ .$$

a) On suppose, dans cette question uniquement, que f est croissante.
Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout nombre réel x tel que $x \geqslant k$,

$$f(x) \leqslant a + \int_0^k f(t)\, e^{-t}\, dt + (e^{-k} - e^{-x})\, f(x)\ .$$

En déduire que f est majorée.

b) On suppose, dans cette question uniquement, que pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$ f(x) appartient à $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction g définie dans la question II.1 vérifie la relation (4), c'est-à-dire que :

$$g(x) \leqslant a + \int_0^x g(t)\, e^{-t}\, dt.$$

En déduire que f est majorée.

c) On suppose seulement que f vérifie la relation (4). Montrer que f est majorée.

3. On suppose que la fonction f vérifie la condition suivante :

$$(5)\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+)\qquad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)\, e^{-t^3}\, dt.$$

Montrer que f est majorée.

4. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$ soit convergente. On suppose que la fonction f vérifie la relation suivante :

$$(6)\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+)\qquad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)\, h(t)\, dt.$$

Montrer que f est majorée.

5. On suppose de nouveau que f vérifie la relation (4). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = f(x) - a\, e^{1 - e^{-x}}\ .$$

a) Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$\varphi(x) \leqslant \int_0^x \varphi(t)\, e^{-t}\, dt\ .$$

b) Soient c un élément de $\mathbb{R}_+$ et $\lambda = \sup\limits_{x \in [0,c]} \varphi(x)$.

Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout élément x de [0,c],

$$\varphi(x) \leqslant \lambda\, \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!}\ .$$

c) Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leqslant a\, e^{1 - e^{-x}}\ .$$

d) Soit ψ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que, pour toute fonction continu[e] vérifiant la relation (4) et pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant \psi(x)$.

Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$\psi(x) \geq a\, e^{1 - e^{-x}}\ .$$

FIN