Chambre de Commerce et d'industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

# CONCOURS D'ADMISSION DE 1985

## Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

*Vendredi 10 Mai 1985, de 8 h à 12 h*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*L'usage des instruments de calcul est autorisé.*

*Les parties I et II sont indépendantes.*

On désigne par $a$ et $b$ des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervelle $[0, 1]$. On suppose que, pour tout élément $t$ de $[0, 1]$, $a(t) \geqslant 0$.
L'objet du problème est d'étudier un procédé d'approximation d'une fonction $f$ à valeurs réelles de classe $C^4$ sur $[0, 1]$, sachant que, pour tout élément $t$ de $[0, 1]$,

$$f''(t) - a(t)f(t) = b(t),$$

et:

$$f(0) = \lambda, \; f(1) = \mu,$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont des nombres réels donnés.
À cet effet, on introduit une subdivision $(t_0, t_1, \ldots, t_{n+1})$ à pas constant $h = 1/(n+1)$ de l'intervalle $[0, 1]$, où $n$ est un nombre entier strictement supérieur à 2. Autrement dit, pour tout nombre entier naturel $k$ tel que $k \leqslant n+1$, $t_k = kh$.
Dans la partie I, on montre que, pour approcher $f$ sur $[0, 1]$, il suffit de connaître une valeur approchée $u_k$ de $f(t_k)$ en chaque point $t_k$. Les parties II et III décrivent un algorithme de construction des valeurs approchées $u_k$.
Pour toute fonction $g$ à valeurs réelles de classe $C^p$ sur l'intervalle $[0, 1]$, on pose:

$$M_p(g) = \sup_{t \in [0, 1]} |g^{(p)}(t)|.$$

I. *Approximation de $f$ par une fonction affine par morceaux.*

1. Soient $g$ une fonction à valeurs réelles de classe $C^2$ sur $[0, 1]$ et $(\alpha, \beta)$ un couple d'éléments de $[0, 1]$ tel que $\alpha < \beta$. On suppose que $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.

*a*) Soit $G$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par les relations:

$$G(t) = \frac{g(t)}{t - \alpha} \quad \text{si } t \neq \alpha \qquad \text{et} \qquad G(\alpha) = g'(\alpha).$$

Prouver que $G$ est continue, puis qu'elle est de classe $C^1$.
Prouver que, pour tout élément $t$ de $[0, 1]$,

$$|G'(t)| \leqslant \frac{1}{2} M_2(g).$$

*b*) En conclure que, pour tout élément $t$ de $[0, 1]$,

$$|g(t)| \leqslant \frac{1}{2}|(t - \alpha)(t - \beta)|\, M_2(g).$$

2. Soit $\psi_h$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par les conditions suivantes:
— pour tout entier $k$ appartenant à $[0, n+1]$, $\psi_h(t_k) = f(t_k)$;
— pour tout entier $k$ appartenant à $[0, n]$, la restriction de $\psi_h$ à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.
Montrer que, pour tout élément $t$ de $[0, 1]$,

$$|f(t) - \psi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2(f).$$

3. Soient enfin $(u_0, u_1, \dots, u_{n+1})$ une suite de nombres réels et $\varphi_h$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par les conditions suivantes:
— pour tout entier $k$ appartenant à $[0, n+1]$, $\varphi_h(t_k) = u_k$;
— pour tout entier $k$ appartenant à $[0, n]$, la restriction de $\varphi_h$ à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.
Montrer que, pour tout élément $t$ de $[0, 1]$,

$$|f(t) - \varphi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2(f) + \delta_h, \text{ où } \delta_h = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n+1} |f(t_k) - u_k|.$$

II. ***Algorithme de résolution d'un système linéaire.***
Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ des suites de nombres réels. On suppose que, pour tout entier $k$ appartenant à $[1, n]$, $a_k \geqslant 2$. On considère le système d'équations linéaires:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_1 + a_2 u_2 - u_3 = b_2 \\ -u_2 + a_3 u_3 - u_4 = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -u_{n-2} + a_{n-1} u_{n-1} - u_n = b_{n-1} \\ -u_{n-1} + a_n u_n = b_n \end{array} \right.$$

1. Montrer que l'on peut construire une suite $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1]$, satisfaisant à la condition initiale $c_1 = \dfrac{1}{a_1}$ et à la relation de récurrence:

$$c_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1} - c_k} \quad \text{où } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

2. Soit $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ la suite de nombres réels définie par la condition initiale $d_1 = b_1 c_1$ et la relation de récurrence:

$$d_{k+1} = (b_{k+1} + d_k) c_{k+1} \quad \text{où } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Montrer que le système (1) admet une solution et une seule, et que celle-ci est déterminée par les relations:

$$u_n = d_n$$
$$u_k = d_k + c_k u_{k+1} \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

3. Montrer que si les nombres $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont positifs (au sens large), il en est de même pour les nombres $u_1, u_2, \dots, u_n$.
4. Dans cette question, on suppose que $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Montrer que, pour tout entier naturel $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2.$$

5. Dans le cas général, montrer que:

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |u_k| \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2 \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |b_k|.$$

III. *Obtention de valeurs approchées de $f$ aux points $t_k$.*

1. Soit $t$ un nombre réel tel que $[t - h, t + h]$ soit contenu dans $[0, 1]$. Montrer que:

$$|f(t + h) + f(t - h) - 2f(t) - h^2 f''(t)| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f).$$

À cet effet, on pourra introduire la fonction auxiliaire $F$ définie sur l'intervalle $[-h, h]$ par la relation:

$$F(x) = f(t + x) + f(t - x) - 2f(t) - x^2 f''(t).$$

On calculera les dérivées successives de $F$ jusqu'à l'ordre 3 et en particulier leurs valeurs à l'origine, et on majorera $|F'''(x)|$ à l'aide de $M_4(f)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

(2)

$$-f(t_{k-1}) + [2 + h^2 a(t_k)] f(t_k) - f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k) + \varepsilon_k, \qquad \text{où } |\varepsilon_k| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f).$$

3. On connaît déjà $f(t_0) = f(0) = \lambda$ et $f(t_{n+1}) = f(1) = \mu$. Pour approcher $f(t_1)$, $f(t_2), \ldots, f(t_n)$, on remplace les relations (2) par le système linéaire:

(3) $$-u_{k-1} + [2 + h^2 a(t_k)] u_k - u_{k+1} = -h^2 b(t_k) \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$u_0 = \lambda \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \mu.$$

Montrer comment, à l'aide de la partie II, on peut construire la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$.

4. Cette suite étant ainsi définie, établir que:

$$\delta_k \leqslant \frac{h^2}{24} M_4(f).$$

En conclure que, pour tout élément $t$ de $[0, 1]$,

$$|f(t) - \varphi_h(t)| \leqslant A\,h^2, \text{ où } A = \frac{1}{8} M_2(f) + \frac{1}{24} M_4(f).$$