ELEMENTS DE CORRECTION HEC 86.

I Tests par tirages de paquets de circuits, avec remise.

(Q1) a) Une partie de C ne rencontrant pas A est une partie de $\overline{A}$ et réciproquement !
Le nombre de parties de C ne rencontrant pas A est donc 2^{n-r} ($\operatorname{card} \mathcal{P}(\overline{A}) = 2^{n-r}$ car $\operatorname{card} \overline{A} = n-r$).

b) Les parties de C contenant A sont toutes obtenues par réunion de A avec une partie de $\overline{A}$.
Plus précisément soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties de C contenant A. Considérons

$$\varphi : \mathcal{P}(\overline{A}) \to \mathcal{S}$$
$$B \mapsto \varphi(B) = B \cup A$$

Il est clair que φ est bijective ; donc $\mathcal{P}(\overline{A})$ et $\mathcal{S}$ sont équipotents ; par conséquent $\operatorname{card} \mathcal{S} = \operatorname{card} \mathcal{P}(\overline{A}) = 2^{n-r}$

Finalement le nombre de parties contenant A est : 2^{n-r}

(Q2) a) Les événements élémentaires sont équiprobables ; la probabilité que nous allons utiliser : probabilité uniforme. Notons que p est ici une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ donc une application de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$ dans $[0,1]$!
Soit B une partie de C. $p(\{B\}) = \dfrac{1}{\operatorname{card} \Omega} = \dfrac{1}{2^n}$ ($\{B\}$ est un singleton dans $\mathcal{P}(\Omega)$)

b) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties de C contenant A.
La probabilité cherchée est : $\dfrac{\operatorname{card} \mathcal{S}}{\operatorname{card} \Omega} = \dfrac{2^{n-r}}{2^n} = \dfrac{1}{2^r}$.

c) On cherche $p(\text{"}c_j \in G \mid c_n \in G\text{"})$, soit : $\dfrac{p(c_j \in G \text{ et } c_n \in G)}{p(c_n \in G)}$.

$p(c_n \in G) = p(\{c_n\} \subset G) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après Q2b} \ (A=\{c_n\})}}{=} 1/2^1$. $p(c_j \in J \text{ et } c_n \in G) = p(\{c_j, c_n\} \subset G) = \dfrac{1}{2^2}$

Finalement $p(\text{"}c_j \in G \mid c_n \in G\text{"}) = \dfrac{1/2^2}{1/2^1} = \dfrac{1}{2}$

Si $j \in [\![1, n-1]\!]$, la probabilité pour que c_j appartienne à G sachant que c_n appartient à G est : $\frac{1}{2}$

(Q3) a) $p(c_j \in D_h) = p(c_j \in \bigcap_{k=1}^{h} G_k) = p(c_j \in G_1 \text{ et } c_j \in G_2 \text{ et} \dots \text{ et } c_j \in G_h) \overset{\text{indépendance des tirages}}{=} \prod_{k=1}^{h} p(c_j \in G_k)$

$\forall k \in [\![1, h]\!]$, $p(c_j \in G_k) = p(c_j \in G_k \text{ et } G_k = B_k) + p(c_j \in G_k \text{ et } G_k = \overline{B_k})$

$\forall k \in [\![1, h]\!]$, $p(c_j \in G_k) = p(c_j \in B_k \text{ et } c_n \in B_k) + p(c_j \in \overline{B_k} \text{ et } c_n \notin B_k)$

$\forall k \in [\![1, h]\!]$, $p(c_j \in G_k) = p(\{c_j, c_n\} \subset B_k) + p(\{c_j, c_n\} \subset \overline{B_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Q2c}}}{=} \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2}$

Finalement $p(c_j \in D_h) = \prod_{k=1}^{h} \dfrac{1}{2}$. $p(c_j \in D_h) = \dfrac{1}{2^h}$

b] $p(E\subset D_k) = p\left(\bigcap_{\ell=1}^{k}(E\subset G_\ell)\right) = \prod_{\ell=1}^{k} p(E\subset G_\ell)$

$\forall \ell\in[\![1,k]\!]$, $p(E\subset G_\ell) = p(E\subset G_\ell \text{ et } G_\ell = B_\ell) + p(E\subset G_\ell \text{ et } G_\ell = \overline{B_\ell})$

$\forall \ell\in[\![1,\ell]\!]$, $p(E\subset G_\ell) = p(E\subset B_\ell \text{ et } c_n\in B_\ell) + p(E\subset \overline{B_\ell} \text{ et } c_n\in \overline{B_\ell})$

$\forall \ell\in[\![1,k]\!]$, $p(E\subset G_\ell) = p(E\cup\{c_n\}\subset B_\ell) + p(E\cup\{c_n\}\subset \overline{B_\ell}) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2^{r+1}} = \frac{1}{2^r}$

$E\cup\{c_n\}$ a $r+1$ éléments

Finalement : $p(E\subset D_k) = \left(\frac{1}{2^r}\right)^k = \frac{1}{2^{rk}}$.

Soit J une partie non vide de $[\![1,n-1]\!]$. Montrons que : $p\left(\bigcap_{j\in J} c_j\in D_k\right) = \prod_{j\in J} p(c_j\in D_k)$

$p\left(\bigcap_{j\in J} c_j\in D_k\right) = p(\{c_j\,;\,j\in J\}\subset D_k) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2^{\text{card}J\times k}}$

b] et $\text{card}\{c_j\,;\,j\in J\} = \text{card}\,J$

$\prod_{j\in J} p(c_j\in D_k) = \prod_{j\in J}\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\text{card}J} = \frac{1}{2^{\text{card}J\times k}}$

Donc $p\left(\bigcap_{j\in J} c_j\in D_k\right) = \prod_{j\in J} p(c_j\in D_k)$ et ceci pour toute partie non vide de $[\![1,n-1]\!]$, par conséquent :

les événements $c_j\in D_k$ où $1\le j\le n-1$ sont indépendants.

D'après le cours les événements complémentaires sont encore indépendants.

Retrouvons ce dernier résultat directement. Soit J une partie non vide de $[\![1,n-1]\!]$

$\prod_{j\in J} p(c_j\notin D_k) = \prod_{j\in J}\left(1-\frac{1}{2^k}\right) = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{\text{card}J}$.

$p\left(\bigcap_{j\in J} c_j\notin D_k\right) = 1 - p\left(\overline{\bigcap_{j\in J} c_j\notin D_k}\right) = 1 - p\left(\bigcup_{j\in J} c_j\in D_k\right) \underset{\uparrow}{=} 1 - \sum_{k=1}^{\text{card}J}(-1)^{k+1}\sum_{J_k\in\mathcal{P}_k(J)} p\left(\bigcap_{j\in J_k} c_j\in D_k\right)$

Formule du crible !! parties de J ayant k éléments

$p\left(\bigcap_{j\in J} c_j\notin D_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\text{card}J}(-1)^k\sum_{J_k\in\mathcal{P}_k(J)}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\text{card}J_k}$

$p\left(\bigcap_{j\in J} c_j\notin D_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\text{card}J}(-1)^k\sum_{J_k\in\mathcal{P}_k(J)}\underset{\uparrow}{\left(\frac{1}{2^k}\right)^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\text{card}J}(-1)^k C_{\text{card}J}^{k}\left(\frac{1}{2^k}\right)^k = \sum_{k=0}^{\text{card}J} C_{\text{card}J}^{k}\left(-\frac{1}{2^k}\right)^k$

constante ... dans la 2ème Σ et $\text{card}\,\mathcal{P}_k(J) = C_{\text{card}J}^{k}$!

Donc $p\left(\bigcap_{j\in J} c_j\notin D_k\right) = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{\text{card}J} = \prod_{j\in J} p(c_j\notin D_k)$

ceci achève de prouver que les événements $c_j\notin D_k$ où $j\in[\![1,n-1]\!]$ sont indépendants !

d] $c_n\in D_k$ donc $p(D_k=\{c_n\}) = p\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} c_j\notin D_k\right) \underset{\uparrow}{=} \prod_{j=1}^{n-1} p(c_j\notin D_k) = \prod_{j=1}^{n-1}(1-p(c_j\in D_k)) = \prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$

indépendance

Finalement : $p(D_k=\{c_n\}) = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$.

II Etude du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne.

(Q1) a) Soit à montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $a_{k-1}-a_k\geq 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{k-1}-a_k)=1$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $a_{k-1}-a_k=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1}>0$ car $\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^{k-1}}$ ... et $n\geq 2$.

$\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{p}(a_{k-1}-a_k)=a_0-a_p=1-\left(1-\frac{1}{2^0}\right)^{n-1}-1+\left(1-\frac{1}{2^p}\right)^{n-1}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)^{n-1}$!

$\lim\limits_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)^{n-1}=1$. Par conséquent la série de terme général $a_{k-1}-a_k$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{k-1}-a_k)=1$.

b) Soit F la fonction de répartition de cette loi.

$\forall x\in\,]-\infty,1[,\quad F(x)=0$

$\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[p,p+1[,\ F(x)=\sum_{k=1}^{p}(a_{k-1}-a_k)=a_0-a_p=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)^{n-1}$

CL $\forall x\in\,]-\infty,1[,\ F(x)=0$ et $\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[p,p+1[,\ F(x)=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)^{n-1}$.

(Q2) a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $p(X_n\leq k)=p(D_k=\{c_n\})=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ ... ce qui vaut encore pour $k=0$.

Expliquons ! notamment le fait que les événements $X_n\leq k$ et $D_k=\{c_n\}$ sont égaux. Remarquons pour cela que si $i\in[\![1,k]\!]$, $D_i=\{c_n\}$ donne nécessairement $D_k=\{c_n\}$. Donc si $X_n\leq k$, $D_i=\{c_n\}$ a été obtenu pour la première fois pour $i\in[\![1,k]\!]$ donc $D_k=\{c_n\}$. Réciproquement si $D_k=\{c_n\}$, $D_i=\{c_n\}$ a été obtenu pour la première fois pour $i\in[\![1,k]\!]$ et donc $X_n\leq k$.

b) Soit à montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p(X_n=k)=a_{k-1}-a_k$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. $p(X_n=k)=p(X_n\leq k)-p(X_n\leq k-1)=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1}$

$p(X_n=k)=\left(1-\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1}\right)-\left(1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}\right)=a_{k-1}-a_k$

$p(X_n=1)=p(X_n\leq 1)=\left(1-\frac{1}{2^1}\right)^{n-1}=\left(1-\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^0}\right)^{n-1}}_{=0}\right)-\left(1-\left(1-\frac{1}{2^1}\right)^{n-1}\right)=a_0-a_1$

Finalement : $\forall k\in\mathbb{N}^*, p(X_n=k)=a_{k-1}-a_k$

Remarque.. Notons que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_k=p(X_n>k)$; la dernière conclusion indique donc que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(X_n=k)=p(X_n>k-1)-p(X_n>k)$ ce qui n'est pas nouveau.

Q3 a) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in\mathbb{N}, 0\leq\frac{1}{2^{kr}}\leq\frac{1}{2^k}$. La série de terme général $\frac{1}{2^k}$ étant convergente il en est de même pour la série de terme général $\frac{1}{2^{kr}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} \left(-\frac{1}{2^k}\right)^i \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{2^{ik}}$

pour $i=0$: $C_{n-1}^{i}\left(-\frac{1}{2^k}\right)^i = 1$.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, la série de terme général $\frac{1}{2^{ik}}$ est convergente donc celle de terme général $C_{n-1}^{i}(-1)^{i-1}\frac{1}{2^{ik}}$ aussi. ← somme finie d'un nombre

La série de T.G. $a_k = \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i}(-1)^{i-1}\frac{1}{2^{ik}}$ aussi !

Remarques.. 1.. On pouvait aussi montrer que $a_k \sim (n-1)\frac{1}{2^k}$ 2.. $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i}(-1)^{i-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^k$

$$\underline{\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i}(-1)^{i-1}\frac{1}{1-(1/2)^i}}}$$

<u>b)</u> C'est au cours !!

a.. X est une v.a.r. telle que $X(\Omega) \in \mathbb{N}$. $E(X)$ existe si la série de T.G. $p(X>k)$ converge.

On a alors $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X>k)$! Qu'on se le dise ... et redise !

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{q} k\,p(X_n = k) = \sum_{k=1}^{q} k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=1}^{q} k\,a_{k-1} - \sum_{k=1}^{q} k\,a_k = \sum_{k=0}^{q-1}(k+1)a_k - \sum_{k=1}^{q} k\,a_k$

$\sum_{k=1}^{q} k\,p(X_n=k) = \sum_{k=0}^{q-1} k\,a_k - \sum_{k=1}^{q} k\,a_k + \sum_{k=0}^{q-1} a_k = \sum_{k=0}^{q-1} a_k - q\,a_q$

Il ne reste plus qu'à montrer que : $\lim_{q\to+\infty} q\,a_q = 0$

$q\,a_q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{voir plus haut !}}}{= \dots =} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i}(-1)^{i-1}\frac{q}{2^{iq}}$

$0 \leq \frac{q}{2^{iq}} \leq \frac{q}{2^q}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $\lim_{q\to+\infty} \frac{q}{2^q} = 0$ donc $\lim_{q\to+\infty} q\,a_q = 0$ (comme limite de la somme de $(n-1)$ suites qui convergent vers 0)

$\lim_{q\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{q-1} a_k - q\,a_q\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ car la série de terme général a_k est convergente.

Donc $\lim_{q\to+\infty}\sum_{k=1}^{q} k\,p(X_n=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Ceci prouve que la série de terme général $k\,p(X_n=k)$ est convergente donc absolument convergente ($k\,p(X_n=k) \geq 0$) et que $\sum_{k=1}^{+\infty} k\,p(X_n=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

<u>ce)</u> $E(X_n)$ existe et $\underline{\underline{E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k}}$.

Q4 <u>a)</u> $p \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})^p = 1 - \sum_{k=0}^{p} C_p^k (-1)^k e^{-kt} = \sum_{\underline{k=1}}^{p} C_p^k (-1)^{k+1} e^{-kt}$

La convergence de $\int_0^{+\infty} f_p(t)\,dt$ résultera de la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-kt}\,dt$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x e^{-kt}\,dt = \left[\frac{e^{-kt}}{-k}\right]_0^x = \frac{1}{k} - \frac{e^{-kx}}{k}$; $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-kt}\,dt = \frac{1}{k}$.

ceci assure donc la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-kt}\,dt$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et donc de $\int_0^{+\infty} f_p(t)\,dt$

notons encore que : $\int_0^{+\infty} f_p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{p} C_p^k (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.

Cl.. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ I_p = \sum_{k=1}^{p} C_p^k (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ f_{p+1}(t) - f_p(t) = (1-e^{-t})^p - (1-e^{-t})^{p+1} = (1-e^{-t})^p e^{-t}$.

Par conséquent $t \mapsto \frac{1}{p+1}(1-e^{-t})^{p+1}$ est une primitive de $f_{p+1} - f_p$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $I_{p+1} - I_p = \int_0^{+\infty} (f_{p+1}(t) - f_p(t))\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{p+1}(1-e^{-x})^{p+1} - \frac{1}{p+1}(1-e^{-0})^{p+1}\right]$

Donc $I_{p+1} - I_p = \frac{1}{p+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$.

$I_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-2} (I_{p+1} - I_p) + I_1 = \sum_{p=1}^{n-2} \frac{1}{p+1} + I_1$. $I_1 = \sum_{k=1}^{1} C_1^k (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1$.

Donc $I_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-2} \frac{1}{p+1} + 1 = \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

Cette formule vaut encore pour $n=2$ car $I_1 = 1$.

Cl.. $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \ I_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$.

c) C'est du cours ! $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$!! Ce qui donne $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \sim \ln(n-1) \sim \ln n$

$t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $m \geqslant 2$.

$\forall t \in [m, m+1], \ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{m}$; par conséquent : $\int_m^{m+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{(m+1)-m}{m} = \frac{1}{m}$.

$\forall t \in [m-1, m], \ \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{m}$; par conséquent : $\int_{m-1}^{m} \frac{1}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{m}$.

Finalement : $\forall m \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \ \int_m^{m+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{m} \leqslant \int_{m-1}^{m} \frac{dt}{t}$; notons que l'inégalité de gauche vaut pour $m = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$. $\sum_{m=1}^{n-1} \int_m^{m+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}$; $\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant I_{n-1}$; $\ln n \leqslant I_{n-1}$

$\sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{m} \leqslant \sum_{m=2}^{n-1} \int_{m-1}^{m} \frac{dt}{t} = \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} = \ln(n-1)$; $I_{n-1} - 1 \leqslant \ln(n-1)$

Donc $\ln n \leqslant I_{n-1} \leqslant \ln(n-1) + 1$; ceci vaut encore pour $n=2$ $(I_1 = 1)$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \ \ln n \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \ 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n}[1 + \ln(1-\frac{1}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}[1 + \ln(1-\frac{1}{n})]\right) = 1$. Par encadrement : $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n-1}}{\ln n} = 1$. $I_{n-1} \sim \ln n$

Rappel : $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers c où c est la constante d'Euler ⑥

d) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$.

g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u\in\mathbb{R}_+,\ g_n'(u)=-(n-1)\left(-(-\ln 2)\right)\left(1-\frac{1}{2^u}\right)^{n-2}\times\frac{1}{2^u}$

$\forall u\in\mathbb{R}_+,\ g_n'(u)=-(n-1)\ln 2\left(1-\frac{1}{2^u}\right)^{n-2}\leqslant 0$. g_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. g_n est décroissante sur $[k-1,k]$ donc $g_n(k)\times(k-(k-1))\leqslant\int_{k-1}^{k}g_n(u)du\leqslant g_n(k-1)(k-(k-1$

Donc $g_n(k)\leqslant\int_{k-1}^{k}g_n(u)du\leqslant g_n(k-1)$

Finalement : $\underline{\underline{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ a_k\leqslant\int_{k-1}^{k}g_n(u)du\leqslant a_{k-1}}}$ $\quad(\forall i\in\mathbb{N},\ g_n(i)=a_i)$

e) Soit $q\in\mathbb{N}$ et $q\geqslant 2$.

$$\sum_{k=1}^{q}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{q}\int_{k-1}^{k}g_n(u)du=\int_0^q g_n(u)du\leqslant\sum_{k=1}^{q}a_{k-1}=\sum_{k=0}^{q-1}a_k$$

Donc $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{q}a_k\leqslant\int_0^q g_n(u)du\leqslant\sum_{k=0}^{q-1}a_k}}$

$$\int_0^q g_n(u)du=\int_0^q\left[1-\left(1-\frac{1}{2^u}\right)^{n-1}\right]du\underset{t=u\ln 2}{\overset{\uparrow}{=}}\int_0^{q\ln 2}\left[1-(1-e^{-t})^{n-1}\right]\frac{dt}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}I_{n-1}(q\ln 2)$$

$\lim\limits_{q\to+\infty}(q\ln 2)=+\infty$ donc $\lim\limits_{q\to+\infty}\int_0^q g_n(u)du=\frac{1}{\ln 2}I_{n-1}$; de plus

$\lim\limits_{q\to+\infty}\sum_{k=0}^{q}a_k=\lim\limits_{q\to+\infty}\sum_{k=0}^{q-1}a_k=E(X_n)$; $\lim\limits_{q\to+\infty}\sum_{k=1}^{q}a_k=E(X_n)-a_0=E(X_n)-1$

Par conséquent l'encadrement précédent donne, en faisant tendre q vers $+\infty$:

$$\underline{\underline{E(X_n)-1\leqslant\frac{I_{n-1}}{\ln 2}\leqslant E(X_n).}}$$

f) $\underline{\underline{\frac{I_{n-1}}{\ln 2}\leqslant E(X_n)\leqslant\frac{I_{n-1}}{\ln 2}+1}}$ ou avec c) : $\underline{\underline{\frac{\ln n}{\ln 2}\leqslant E(X_n)\leqslant\frac{1+\ln(n-1)}{\ln 2}+1}}$

ln n donc $\frac{I_{n-1}}{\ln n}\leqslant\frac{\ln 2\,E(X_n)}{\ln n}\leqslant\frac{I_{n-1}}{\ln n}+\frac{\ln 2}{\ln n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n-1}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{I_{n-1}}{\ln n}+\frac{\ln 2}{\ln n}\right)=1$ $\quad$ ($I_{n-1}\sim\ln n$ d'après c))

Par encadrement : $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln 2\,E(X_n)}{\ln n}=1}}$; $\underline{\underline{E(X_n)\sim\frac{\ln n}{\ln 2}}}$.

Q5 a) $Y_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$. " $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $p(Y=k)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n-k+2}\times\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$ " (cela mérite mieux !)

$Y_n\hookrightarrow\mathcal{U}(n)$.

b) $E(Y_n)=\frac{n+1}{2}$. Notons tout de suite que : $E(Y_n)\sim\frac{n}{2}$ et $E(X_n)\sim\frac{\ln n}{\ln 2}$.

⑥ a) $\dfrac{E(X_n)}{E(Y_n)} \sim \dfrac{\ln n}{\ln 2} \times \dfrac{2}{n}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(X_n)}{E(Y_n)} = 0$

b) Pour $n = 100$: $\underline{\underline{E(Y_n) = 50,5}}$.

$7,4693 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant 7,4694$ donc : $\underline{\underline{7,4693 \leqslant E(X_n) \leqslant 8,4694}}$

Pour $n = 1000$: $\underline{\underline{E(Y_n) = 500,5}}$

$10,7978 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant 10,7979$ donc : $\underline{\underline{10,7978 \leqslant E(X_n) \leqslant 11,7979}}$

($I_{99} \simeq 5,177377518$; $\dfrac{I_{99}}{\ln 2} \simeq 7,469376870$; $I_{999} \simeq 7,484470861$,

$\dfrac{I_{999}}{\ln 2} \simeq 10,797808990$; on remarque que $\dfrac{\ln 100}{\ln 2} \simeq 6,6439$ et $\dfrac{\ln 1000}{\ln 2} \simeq 9,9658$

La méthode 1 est donc très supérieure à la méthode 2.

Informatique .. Objectifs : 1. simuler la détection de la panne
2.. Recommencer p fois la détection, faire la moyenne du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne. Comparer cette moyenne à $E(X_n)$.

Le programme : 1.. demande la valeur de n à l'utilisateur ($n \geqslant 2$) ;
2.. demande le nombre p de "détections" ;
3.. Il doit fournir : a) une valeur approchée de $E(X_n)$
b) le nombre de tests nécessaires,
pour détecter la panne, à chaque détection
c) La moyenne des résultats précédents.

```
program HEC86V1;
var n,i,c,h,b,x:integer;
var a:array[1..999] of integer;
begin
   clrscr;randomize;

   repeat
     write('Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) ');readln(n);writeln;
   until (n>1) and (n<1001);

   for i:=1 to n do a[i]:=1;
   c:=n-1;h:=0;

   repeat
   h:=h+1;i:=0; write('la partie D',h,' contient');

       repeat
       b:=random(2);
       i:=i+1;
       if a[i]=1
          then
          begin
          x:=random(2);
          if ((b=1) and (x=0)) or ((b=0) and (x=1))
             then
             begin
             a[i]:=0;c:=c-1;
             end;
          end;
        until ((i>=n-1) or (c=0));writeln(' ',c+1:3,' élément(s)');
     until c=0;
     write('Le nombre de tests pour détecter la panne est : ',h);

 end.
```

```
Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) 1000

la partie D1 contient 508 élément(s)
la partie D2 contient 240 élément(s)
la partie D3 contient 113 élément(s)
la partie D4 contient  58 élément(s)
la partie D5 contient  34 élément(s)
la partie D6 contient  20 élément(s)
la partie D7 contient   9 élément(s)
la partie D8 contient   5 élément(s)
la partie D9 contient   2 élément(s)
la partie D10 contient   1 élément(s)
Le nombre de tests pour détecter la panne est : 10
>
```

```
Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) 500

la partie D1 contient 240 élément(s)
la partie D2 contient 124 élément(s)
la partie D3 contient  54 élément(s)
la partie D4 contient  26 élément(s)
la partie D5 contient  11 élément(s)
la partie D6 contient   6 élément(s)
la partie D7 contient   4 élément(s)
la partie D8 contient   1 élément(s)
Le nombre de tests pour détecter la panne est : 8
```

```
program HEC86V2;

var n,i,c,h,h1,b,x,t,u:integer;e,e1,y,z,p:real;
var a:array[1..999] of integer;

begin
   clrscr;randomize;

   repeat
     write('Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) ');readln(n);
   until (n>1) and (n<1001);

     write('Combien de fois voulez vous recommencer la détection ');read(t);
     u:=0;clrscr;h1:=0;
    repeat

   u:=u+1;
   for i:=1 to n do a[i]:=1;
   c:=n-1;h:=0;

   repeat
   h:=h+1;i:=0;

       repeat
       b:=random(2);
       i:=i+1;
       if a[i]=1
          then
          begin
          x:=random(2);
          if ((b=1) and (x=0)) or ((b=0) and (x=1))
             then
             begin
             a[i]:=0;c:=c-1;
             end;
          end;
       until ((i>=n-1) or (c=0));
    until c=0;
    h1:=h1+n;
   until u>=t;
   writeln('Il y a ',n,' circuits ');
   writeln('Nous avons recommencé ',t,' fois la détection');
   writeln('Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :',h1/t:3:7);

   e1:=1;y:=1;
   repeat
     e:=e1;
     y:=0.5*y;z:=1-y;p:=1;
     for i:=1 to n-1 do p:=p*z;
     e1:=e+1-p;
   until abs(e1-e)<exp(-8*ln(10));
   writeln('Pour mémoire l''éspérance est sensiblement : ',e1:3:9);

 end.
```

```
Il y a 100 circuits
Nous avons recommencé 10 fois la détection
Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :8.0000000
Pour mémoire l'éspérance est sensiblement : 7.969374524


Il y a 100 circuits
Nous avons recommencé 100 fois la détection
Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :7.6600000
Pour mémoire l'éspérance est sensiblement : 7.969374524


Il y a 100 circuits
Nous avons recommencé 500 fois la détection
Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :8.2980000
Pour mémoire l'éspérance est sensiblement : 7.969374524


Il y a 1000 circuits
Nous avons recommencé 10 fois la détection
Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :11.4000000
Pour mémoire l'éspérance est sensiblement : 11.297809991

Il y a 1000 circuits
Nous avons recommencé 100 fois la détection
Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :11.3400000
Pour mémoire l'éspérance est sensiblement : 11.297809991

Il y a 1000 circuits
Nous avons recommencé 1000 fois la détection
Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :11.3890000
Pour mémoire l'éspérance est sensiblement : 11.297809991
```