Le but du problème est l'étude d'une suite de tirages de boules dans une urne, ce qui fait l'objet de la seconde partie. La première partie permet d'obtenir quelques résultats préliminaires d'algèbre.

1

Dans tout le problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul et par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N. On considère l'application linéaire f qui, à tout élément U de E, associe le polynôme :

$$V(X) = X \cdot U(X) - \frac{1}{N}(X^2 - 1) \cdot U'(X)$$

où U' désigne la dérivée de U.

PARTIE I

1) *Étude de l'application f*

a) Pour tout nombre entier naturel j tel que $j \leq N$, calculer $f(X^j)$.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) On considère la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^N)$ de E. Écrire la matrice M associée à f dans cette base.

2) *Recherche d'une base de polynômes propres pour f*

Soit B un polynôme propre pour f, c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation :

$$f(B) = \lambda B.$$

a) Montrer que B est nécessairement de degré N.

b) On suppose que $\lambda = 1$. Montrer que -1 est racine de B.

Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1; il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X+1)^k A(X) \qquad \text{avec } A(-1) \neq 0.$$

Montrer que $k = N$ et que A est constant.

En supposant que $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1.

c) On suppose maintenant que λ est différent de 1 et de -1. Montrer que 1 et -1 sont racines de B. Soient h et k leurs ordres de multiplicité respectifs.

On pose :

$$B(X) = (X-1)^h (X+1)^k A(X).$$

Montrer que $h + k = N$. Exprimer alors λ en fonction de k et de N. En déduire une factorisation des polynômes B ainsi obtenus.

d) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

e) On considère la famille $\mathcal{B}' = (B_0, B_1, \cdots, B_N)$ des éléments de E définis par :

$$B_k(X) = (X-1)^{N-k}(X+1)^k$$

Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Ecrire la matrice M' de f dans $\mathcal{B}'$.

3) *Calcul des limites des suites* (M^{2n}) *et* (M^{2n+1})

On appelle limite d'une suite (M_n) de matrices carrées d'ordre $N+1$ la matrice carrée L d'ordre $N+1$ dont les éléments sont les limites (si elles existent) des éléments de M_n lorsque n tend vers $+\infty$. On admet que, dans ces conditions, pour tout couple (P, Q) de matrices carrées d'ordre $N+1$, la suite $(P\, M_n\, Q)$ a pour limite la matrice $P\, L\, Q$.

a) Pour tout nombre entier naturel j tel que $j \leqslant N$, on pose :

$$B_j(X) = \sum_{i=0}^{N} p_{i,j}\, X^i \quad \text{et} \quad X^j = \sum_{i=0}^{N} q_{i,j}\, B_i(X)$$

Déterminer les éléments $p_{i,0}$ et $p_{i,N}$ pour $0 \leqslant i \leqslant N$, et les éléments $q_{0,j}$ et $q_{N,j}$ pour $0 \leqslant j \leqslant N$.

b) On note respectivement P et Q les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Quels sont les éléments ainsi connus de P et de Q?

c) Exprimer M en fonction de M', P et Q. En déduire (sans expliciter davantage les matrices P et Q) les limites des suites (M^{2n}) et (M^{2n+1}) lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE II

On suppose désormais que $N \geqslant 3$. Une urne contient r boules rouges et b boules blanches avec $r + b = N$. On procède à des tirages de la manière décrite ci-après :

— lorsqu'on obtient une boule rouge, celle-ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule blanche avant de passer au tirage suivant ;

— lorsqu'on obtient une boule blanche, celle-ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule rouge avant de passer au tirage suivant.

Soit n un nombre entier naturel. On note X_n la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage (c'est-à-dire lorsque la $n^{\text{ième}}$ boule a été tirée puis remplacée selon la procédure décrite). En particulier, $X_0 = r$.

Pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$p(n, k) = P([X_n = k]).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p(n,k) &= 0 && \text{si } k > N \\ p(0,k) &= 1 && \text{si } k = r \\ p(0,k) &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On convient de poser :

$$p(n, -1) = 0.$$

On désigne par $E(X_n)$ et $V(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n. On se propose de calculer par deux méthodes ces deux valeurs typiques, puis d'étudier le comportement asymptotique de $p(n, k)$.

1) On suppose dans cette question que n est non nul. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout nombre entier naturel k :

$$N\,p(n,k) = (N-k+1)\,p(n-1,k-1) + (k+1)\,p(n-1,k+1) \qquad (1)$$

2) *Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de polynômes*

Pour tout nombre entier naturel n, soit F_n le polynôme défini par :

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^{N} p(n,k)\,X^k.$$

3

On suppose désormais que n est non nul.

a) Établir la relation :

$$F_n = f(F_{n-1}) \qquad (2)$$

b) Montrer que :

$$F_n'(1) = E(X_n).$$

En dérivant (2), former une relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$. En déduire $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que :

$$F_n''(1) = E(X_n^2) - E(X_n)$$

On pose :

$$a_n = E(X_n^2) - N\,E(X_n).$$

En dérivant deux fois (2), former une relation entre a_n et a_{n-1}. En déduire $V(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

3) *Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de matrices*

On considère la matrice à $N+1$ lignes et une colonne :

$$\begin{pmatrix} p(n,0) \\ p(n,1) \\ \dots \\ p(n,N) \end{pmatrix}$$

a) A l'aide la relation (1), prouver que :

$$U_n = M\,U_{n-1}$$

où M est la matrice définie dans la question I 1).

On considère les trois matrices à une ligne et $N+1$ colonnes :

$$J = (1\,1 \dots 1)\; K_1 = (0\,1 \dots N)\; K_2 = (0^2\,1^2 \dots N^2)$$

b) Calculer le produit $K_1 M$ en fonction de K_1 et de J.

Vérifier que :

$$E(X_n) = K_1\,U_n.$$

Retrouver ainsi la relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$ établie dans la question II 2) *b*).

c) Calculer le produit $(K_2 - N K_1)M$ *en fonction de* $K_2 - N K_1$ et de J. Retrouver ainsi la relation entre a_n et a_{n-1} établie dans la question II 2) *c*).

4

4) *Étude de la distribution asymptotique de* (X_n)

En utilisant les résultats de la fin de la première partie, déterminer selon la parité de r les limites des suites $(p(2n, k))$ et $(p(2n+1, k))$ lorsque n tend vers $+\infty$.