$\boxed{\text{I}}$ **Q1** - a) Soit $j \in [\![1,N]\!]$. $f(X^j) = X X^j - \frac{1}{N}(X^2-1)\,j X^{j-1} = (1-\frac{j}{N})X^{j+1} + \frac{j}{N}X^{j-1} = \frac{j}{N}X^{j-1} + (1-\frac{j}{N})X^{j+1}$

$f(X^0) = X$

b) Soit $U \in E$.

$f(U) = XU(X) - \frac{1}{N}(X^2-1).U'(X)$. Si $U=0$: $f(U)=0$ et $f(U) \in E$. Supposons $U \neq 0$

Posons $p = \deg U$ et notons a_p le coefficient de X^p dans U.

$\deg(f(U)) \leq \max(\deg(XU(X)), \deg((X^2-1)U'(X))) = p+1$

Le coefficient de X^{p+1} dans $f(U)$ est : $a_p - \frac{1}{N}p\,a_p = (1-\frac{p}{N})a_p = \frac{N-p}{N}a_p$

Si $p<N$: $p+1 \leq N$ et $f(U) \in E$

Si $p = N$: le coefficient de X^{p+1} dans $f(U)$ est nul ; $\deg(f(U)) \leq p = N$.

Finalement : $\forall U \in E, f(U) \in E$.

La linéarité de f est évidente

c) Il résulte de Q1 a) que : $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \cdots & 0 \\ 0 & 1-1/N & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N/N \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\frac{N-1}{N} & 0 \end{bmatrix}$

Q2 a) Nous avons vu au niveau de Q1 b) que : $U \in E$, $U \neq 0$ et $\deg U = p < N \Rightarrow \deg f(U) = p+1 \Rightarrow \deg(f(U)) = \deg U + 1$.

Par conséquent si $B \in E$, si $B \neq 0$ et si $f(B) = \lambda B$ alors nécessairement $\deg B = N$

b) $f(B) = B$; $XB(X) - \frac{1}{N}(X^2-1)B'(X) = B(X)$; $(X-1)B(X) - \frac{1}{N}(X^2-1)B'(X) = 0$. En divisant par $X-1$ on obtient $B(X) - \frac{1}{N}(X+1)B'(X) = 0$. Donc $B(-1) = 0$

$0 = (X-1)B(X) - \frac{1}{N}(X^2-1)B'(X) = (X-1)(X+1)^k A(X) - \frac{1}{N}(X-1)(X+1)[k(X+1)^{k-1}A(X) + (X+1)^k A'(X)]$.

En divisant par $(X+1)^k$ on obtient : $0 = (X-1)A(X) - \frac{1}{N}(X-1)[kA(X) + (X+1)A'(X)]$

Ce qui donne en -1 : $-2A(-1) + \frac{2}{N}k(A(-1)) = 0$ c'est à dire $-2 + \frac{2k}{N} = 0$ car $A(-1) \neq 0$.

Finalement $k = N$

$B = (X+1)^N A(X)$ et $\deg B \leq N$; par conséquent A est constant.

* "Exactement de la même manière" en supposant $\lambda = -1$ on obtient : $B = \mu(X-1)^N$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

c) $XB(X) - \frac{1}{N}(X^2-1)B'(X) = \lambda B(X)$

En 1 on obtient $B(1) = \lambda B(1)$ donc $B(1) = 0$ car $\lambda \neq 1$. 1 est racine de B

En -1 on obtient $-B(-1) = \lambda B(-1)$ donc $B(-1) = 0$ car $\lambda \neq -1$. -1 est racine de B

$0 = (X-\lambda)B(X) - \frac{1}{N}(X^2-1)B'(X) = (X-\lambda)(X-1)^h(X+1)^k A(X) - \frac{1}{N}(X-1)(X+1)[h(X-1)^{h-1}(X+1)^k A(X) + k(X+1)^{k-1}(X-1)^h A(X) + (X-1)^h(X+1)^k A'(X)]$

Divisons par $(X-1)^h(X+1)^k$.

$0 = (X-\lambda)A(X) - \frac{1}{N}[h(X+1)A(X) + k(X-1)A(X) + (X-1)(X+1)A'(X)]$

En 1 on obtient : $(1-\lambda)A(1) - \frac{2h}{N}A(1) = 0$ et en -1 on obtient : $(-1-\lambda)A(-1) + \frac{2k}{N}A(-1) = 0$

$A(1) \neq 0$ et $A(-1) \neq 0$ donne : $1-\lambda = \frac{2h}{N}$ et $1+\lambda = \frac{2k}{N}$ ce qui donne : $\begin{cases} h+k = N \\ \text{et} \\ \lambda = 1 - \frac{2h}{N} = \frac{2k}{N} - 1 \end{cases}$

Comme : $\deg B \leq N$, $h+k=N$ et $B(X)=(X-1)^h(X+1)^k A(X)$ nécessairement A est constant.

$\exists \mu \in \mathbb{R}^*,\ B(X) = \mu\,(X+1)^k (X-1)^{N-k}$

$\downarrow k=N \Rightarrow h=0$

d) Nous venons de montrer que $\operatorname{Spec}(f) \subset \{-1,1\} \cup \left\{ \frac{2k}{N}-1 \ ;\ k \in [\![1, N-1]\!] \right\}$

donc $\operatorname{Spec}(f) \subset \left\{ \frac{2k}{N}-1 \ ;\ k \in [\![0,N]\!] \right\}$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $\lambda = \frac{2k}{N}-1$ avec $k \in [\![0,N]\!]$. Posons $B_k(X) = (X-1)^{N-k}(X+1)^k$

$f(B_k) = X(X-1)^{N-k}(X+1)^k - \frac{1}{N}(X^2-1)\left[(N-k)(X-1)^{N-k-1}(X+1)^k + k(X-1)^{N-k}(X+1)^{k-1}\right]$ ... à l'abus près !

$$f(B_k) = (X-1)^{N-k}(X+1)^k \left[X - \frac{1}{N}\left[(N-k)(X+1) + k(X-1)\right]\right] = (X-1)^{N-k}(X+1)^k\,\frac{2k-N}{N} = \lambda B_k$$

Comme $B_k \neq 0$: $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$.

Finalement $\operatorname{Spec}(f) = \left\{ \frac{2k}{N}-1 \ ;\ k \in [\![0,N]\!] \right\}$. $\dim_{\mathbb{R}} E = N+1$ et f possède $N+1$ valeurs propres distinctes donc f est diagonalisable.

e) Posons $\forall \lambda \in \operatorname{Spec}(f)$, $F_\lambda = \{ B \in E \mid f(B) = \lambda B \}$. $\forall \lambda \in \operatorname{Spec}(f)$, $\dim_{\mathbb{R}} F_\lambda = 1$ (f est diagonalisable et a $N+1$ valeurs propres).

Mieux $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $F_{\frac{2k}{N}-1} = \operatorname{Vect}(B_k)$ (voir d)).

ceci suffit pour dire que $(B_0, B_1, \dots, B_N)$ est une famille libre de E donc une base car E est de dimension $N+1$.

Il est clair que $\quad M_{B'}(f) = \begin{bmatrix} -1 & & & & 0 \\ & \frac{2}{N}-1 & & & \\ & & \frac{4}{N}-1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

Q3) a) $\forall j \in [\![0,N]\!]$, $B_j(X) = (X-1)^{N-j}(X+1)^j$.

$B_0(X) = (X-1)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i (-1)^{N-i} X^i \quad ; \quad \forall i \in [\![0,N]\!],\ p_{i,0} = C_N^i(-1)^{N-i}$

$B_N(X) = (X+1)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i X^i \quad ; \quad \forall i \in [\![0,N]\!],\ p_{i,N} = C_N^i$

$\forall j \in [\![0,N]\!]$, $X^j = \sum_{i=0}^{N} q_{ij}(X-1)^{N-i}(X+1)^i = q_{0j}(X-1)^N + \sum_{i=1}^{N} q_{ij}(X-1)^{N-i}(X+1)^i$

ceci donne en -1 : $\forall j \in [\![0,N]\!]$, $(-1)^j = q_{0j}(-2)^N$; $\forall j \in [\![0,N]\!]$, $q_{0,j} = \frac{(-1)^j}{(-2)^N} = \frac{1}{2^N}(-1)^{j-N}$

$\forall j \in [\![0,N]\!]$, $X^j = q_{N,j}(X+1)^N + \sum_{i=0}^{N-1} q_{ij}(X-1)^{N-i}(X+1)^i$

Ceci donne en 1 : $\forall j \in [\![0,N]\!]$, $1 = q_{N,j}\,2^N$; $\forall j \in [\![0,N]\!]$, $q_{N,j} = \frac{1}{2^N}$

b) $P = (p_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}}$ $\quad \forall i \in [\![0,N]\!]$, $p_{i,0} = C_N^i(-1)^{N-i}$ donne la 1ère colonne de P.

$\forall i \in [\![0,N]\!]$, $p_{i,N} = C_N^i$ donne la dernière colonne de P.

$Q = (q_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}}$ $\quad \forall j \in [\![0,N]\!]$, $q_{0j} = \frac{1}{2^N}(-1)^{j-N}$ donne la 1ère ligne de Q.

$\forall j \in [\![0,N]\!]$, $q_{N,j} = \frac{1}{2^N}$ donne la dernière ligne de Q.

c) $\Pi' = Q \Pi P \quad (Q = P^{-1})$; $P \Pi' Q = \Pi$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \Pi^n = (P\Pi'Q)^n = (P\Pi'P^{-1})^n = P\Pi'^n P^{-1} = P\Pi'^n Q$.

Pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi^{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi^{2n+1}$ il suffit d'obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi'^{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi'^{2n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Pi'^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & & & 0 \\ & (\frac{2}{N}-1)^n & & \\ & & (\frac{4}{N}-1)^n & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2k}{N}-1\right)^n = 0 \quad \left(\left|\frac{2k}{N}-1\right|<1\right)$$

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi'^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ (nous notons A cette matrice) et

$\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi'^{2n+1} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ (nous notons B cette matrice).

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi^{2n} = PAQ$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi^{2n+1} = PBQ$. Calculons PAQ et PBQ.

A est la matrice obtenue en multipliant dans I_{N+1} toutes les lignes sauf la première et la dernière par 0.
AQ est la matrice obtenue en multipliant toutes les lignes de Q par 0 sauf la première et la dernière.

$AQ = \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots & q_{0,N} \\ & 0 & & \\ q_{N,0} & q_{N,1} & \cdots & q_{N,N} \end{bmatrix}$. Calculons maintenant PAQ. Soit $(i,j) \in [\![1, N+1]\!] \times [\![1, N+1]\!]$.
Pour obtenir le terme de PAQ situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne il suffit de multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne $[p_{i-1,0}\ p_{i-1,1} \cdots p_{i-1,N}]$ de P par la $j^{\text{ème}}$ colonne $\begin{bmatrix} q_{0,j-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{N,j-1} \end{bmatrix}$ de AQ

ceci donne : $p_{i-1,0}\, q_{0,j-1} + p_{i-1,N}\, q_{N,j-1} \underset{\text{voir Q3b}}{=} C_N^{i-1} (-1)^{N-(i-1)} \frac{1}{2^N} (-1)^{j-1-N} + C_N^{i-1} \frac{1}{2^N}$

Donc $p_{i-1,0}\, q_{0,j-1} + p_{i-1,N}\, q_{N,j-1} = C_N^{i-1} \frac{1}{2^N} \left(1 + (-1)^{j-i}\right) = C_N^{i-1} \frac{1}{2^N} \left(1 + (-1)^{j+i}\right)$!!

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi^{2n} = \left(C_N^{i-1} \frac{1}{2^N} (1 + (-1)^{j+i}) \right)_{\substack{1 \le i \le N+1 \\ 1 \le j \le N+1}} = \left(C_N^{i} \frac{1}{2^N} (1 + (-1)^{j+i}) \right)_{\substack{0 \le i \le N \\ 0 \le j \le N}}$

Un raisonnement analogue donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi^{2n+1} = \left(C_N^{i-1} \frac{1}{2^N} (1 - (-1)^{i+j}) \right)_{\substack{1 \le i \le N+1 \\ 1 \le j \le N+1}} = \left(C_N^{i} \frac{1}{2^N} (1 - (-1)^{i+j}) \right)_{\substack{0 \le i \le N \\ 0 \le j \le N}}$

(ne pas oublier pour obtenir AQ de multiplier la première ligne de Q par -1)

PARTIE II Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$

1er cas. Supposons $k > N$. $N\,p(n,k) = N\,p(X_n = k) \overset{k>N}{=} 0$

$(N-k+1)\,p(n-1,k-1) = 0$ car : $\begin{cases} k > N+1 \Rightarrow k-1 > N \Rightarrow p(n-1,k-1)=0 \\ k = N+1 \Rightarrow N-k+1 = 0 \end{cases}$

$(k+1)\,p(n-1,k+1) = (k+1)\,p(X_{n-1}=k+1) \underset{k+1>N}{=} 0$

La formule (1) est vérifiée car $0 = 0+0$!

2ème cas. Supposons $k \leq N$.

$p(n,k) = p(X_n = k) = p(X_n = k \mid X_{n-1}=k-1)\,p(X_{n-1}=k-1) + p(X_n = k \mid X_{n-1}=k+1)\,p(X_{n-1}=k+1)$

$p(n,k) = p(X_n = k \mid X_{n-1}=k-1)\,p(n-1,k-1) + p(X_n=k \mid X_{n-1}=k+1)\,p(n-1,k+1)$.

a) $1 \leq k \leq N-1$

$p(X_n = k \mid X_{n-1} = k-1) = \dfrac{N-k+1}{N}$ On a ajouté 1 rouge donc on a obtenu au nième tirage une blanche en tirant dans une urne contenant $k-1$ rouges et $N-(k-1)$ blanches

$p(X_n = k \mid X_{n-1} = k+1) = \dfrac{k+1}{N}$ On a retiré une rouge donc on a obtenu au nième tirage une rouge en tirant dans une urne contenant $k+1$ rouges et $N-(k+1)$ blanches.

Il est clair que ces deux égalités donnent la formule (1).

Voir raisonnement précédent

b) $k = 0$. $p(n,k) = p(X_n = 0) = p(X_n = 0 \mid X_{n-1}=1)\,p(X_{n-1}=1) = \dfrac{1}{N}\,p(n-1,1) = \dfrac{1}{N}\,p(n-1,k+1)$.

En remarquant que $p(n-1,k-1) = p(n-1,-1) = 0$ on peut encore écrire :

$p(n,k) = \dfrac{N-k+1}{N}\,p(n-1,k-1) + \dfrac{k+1}{N}\,p(n-1,k+1)$ ... d'où la formule (1)

c) $k = N$ même chose que b) (il suffit de remarquer que : $p(n-1,k+1) = 0$)

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N},\ N\,p(n,k) = (N-k+1)\,p(n-1,k-1) + (k+1)\,p(n-1,k+1)$.

Q2 a) $n \in \mathbb{N}^*$. $F_n(X) = \sum_{k=0}^{N} p(n,k) X^k = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N} (N-k+1)\,p(n-1,k-1)\,X^k + \sum_{k=0}^{N} (k+1)\,p(n-1,k+1)\,X^k\right]$

$$N F_n(X) = \sum_{k=-1}^{N-1} (N-k)\,p(n-1,k)\,X^{k+1} + \sum_{k=1}^{N+1} k\,p(n-1,k)\,X^{k-1} = \sum_{k=0}^{N} (N-k)\,p(n-1,k)\,X^{k+1} + \sum_{k=1}^{N} k\,p(n-1,k)\,X^{k-1}$$

. $p(n-1,-1) = 0$
. $N-N = 0$!
. $p(n-1,N+1) = 0$

$$N F_n(X) = \sum_{k=0}^{N} N\,p(n-1,k)\,X^{k+1} - \sum_{k=1}^{N} k\,p(n-1,k)\,X^{k+1} + \sum_{k=1}^{N} k\,p(n-1,k)\,X^{k-1}$$

$$N F_n(X) = NX \sum_{k=0}^{N} p(n-1,k)\,X^k + \sum_{k=1}^{N} k\,p(n-1,k)\,X^{k-1}(1-X^2) = NX\,F_{n-1}(X) + (1-X^2)\,F'_{n-1}(X)$$

donc $F_n(X) = X\,F_{n-1}(X) - \frac{1}{N}(X^2-1)\,F'_{n-1}(X) = f(F_{n-1})$ (2)

b) $n \in \mathbb{N}$. $F'_n(X) = \sum_{k=1}^{N} k\,p(n,k)\,X^{k-1}$. $F'_n(1) = \sum_{k=1}^{N} k\,p(n,k) = E(X_n)$.

Supposons $n \geq 1$.

(2) donne $F'_n(X) = F_{n-1}(X) + X\,F'_{n-1}(X) - \frac{1}{N}\,2X\,F'_{n-1}(X) - \frac{1}{N}(X^2-1)\,F''_{n-1}(X)$. $F_{n-1}(1) = 1$

$E(X_n) = F'_n(1) = F_{n-1}(1) + F'_{n-1}(1) - \frac{2}{N}\,F'_{n-1}(1) = E(X_{n-1})\left(1 - \frac{2}{N}\right) + 1$

$E(X_n) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_{n-1}) + 1$.

$(E(X_n))_{n\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique et $(\ell\in\mathbb{R}$ et $\ell=(1-\frac{2}{N})\ell+1) \Leftrightarrow \ell=\frac{N}{2}$

$(E(X_n)-\ell)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $1-\frac{2}{N}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $E(X_n)=(1-\frac{2}{N})^n(E(X_0)-\ell)$. $E(X_0)=r$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ E(X_n)=\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\left(r-\frac{N}{2}\right)+\frac{N}{2}.$$

$|1-\frac{2}{N}|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{2}{N})^n=0$. Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X_n)=\frac{N}{2}$.

c) $n\in\mathbb{N}^*$. $F_n''(X)=\sum_{k=2}^{N}k(k-1)p(n,k)X^{k-2}$. $F_n''(1)=\sum_{k=2}^{N}k(k-1)p(n,k)=\sum_{k=0}^{N}k(k-1)p(n,k)$

$F_n''(1)=\sum_{k=0}^{N}k^2p(n,k)-\sum_{k=0}^{N}k\,p(n,k)$. $F_n''(1)=E(X_n^2)-E(X_n)$.

En dérivant une fois (2) nous avons obtenu : $F_n'(X)=F_{n-1}(X)+X(1-\frac{2}{N})F_{n-1}'(X)-\frac{1}{N}(X^2-1)F_{n-1}''(X)$

En dérivant deux fois nous obtenons :

$F_n''(X)=F_{n-1}'(X)+(1-\frac{2}{N})F_{n-1}'(X)+X(1-\frac{2}{N})F_{n-1}''(X)-\frac{2X}{N}F_{n-1}''(X)-\frac{1}{N}(X^2-1)F_{n-1}'''(X)$. En 1 ceci donne :

$F_n''(1)=F_{n-1}'(1)\,2(1-\frac{1}{N})+(1-\frac{4}{N})F_{n-1}''(1)$

Par conséquent : $E(X_n^2)-E(X_n)=2(1-\frac{1}{N})E(X_{n-1})+(1-\frac{4}{N})\left(E(X_{n-1}^2)-E(X_{n-1})\right)$

$E(X_n^2)=E(X_n)+(1+\frac{2}{N})E(X_{n-1})+(1-\frac{4}{N})E(X_{n-1}^2)$

$a_n=E(X_n^2)-NE(X_n)=(1-N)E(X_n)+(1-\frac{4}{N})\left(E(X_{n-1}^2)-NE(X_{n-1})\right)+\underbrace{\left(1+\frac{2}{N}+N(1-\frac{4}{N})\right)}_{(N-1)(1-\frac{2}{N})}E(X_{n-1})$

$a_n=(1-\frac{4}{N})a_{n-1}+(1-N)E(X_n)+(N-1)(1-\frac{2}{N})E(X_{n-1})$

$a_n=(1-\frac{4}{N})a_{n-1}+(1-N)\left[(1-\frac{2}{N})E(X_{n-1})+1\right]+(N-1)(1-\frac{2}{N})E(X_{n-1})$.

$$a_n=\left(1-\frac{4}{N}\right)a_{n-1}+1-N$$

$(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique.

$\ell\in\mathbb{R}$ et $\ell=(1-\frac{4}{N})\ell+1-N \Leftrightarrow \ell=\frac{N(1-N)}{4}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=(1-\frac{4}{N})^n\left(a_0-\frac{N(1-N)}{4}\right)+\frac{N(1-N)}{4}$. $a_0=E(X_0^2)-NE(X_0)=r^2-Nr$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\left(1-\frac{4}{N}\right)^n\left[r^2-Nr-\frac{N(1-N)}{4}\right]+\frac{N(1-N)}{4}.$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $V(X_n)=E(X_n^2)-(E(X_n))^2=a_n+NE(X_n)-(E(X_n))^2=\cdots$

$\lim\limits_{n\to+\infty}E(X_n)=\frac{N}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{N(1-N)}{4}$ $\left(|1-\frac{4}{N}|<1\ \ldots\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}V(X_n)=\frac{N(1-N)}{4}+N\times\frac{N}{2}-\left(\frac{N}{2}\right)^2=\frac{N}{4}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}V(X_n)=\frac{N}{4}$.

Q3 a) $\Pi = (\alpha_{ij})_{\substack{0\le i\le N\\ 0\le j\le N}}$ avec $\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i\ne j-1 \text{ et } i\ne j+1 \\ \alpha_{ij} = \frac{j}{N} \text{ si } i=j-1 \\ \alpha_{ij} = 1-\frac{j}{N} \text{ si } i=j+1 \end{cases}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\Pi U_{n-1} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \quad \text{avec } z_k = \sum_{j=0}^{N} \alpha_{kj}\, p(n-1,j) \quad \text{pour tout } k\in[\![0,N]\!]$$

Si $k\in[\![1,N-1]\!]$ on obtient $z_k = \alpha_{k,k-1}\,p(n-1,k-1) + \alpha_{k,k+1}\,p(n-1,k+1)$
$= \left(1-\frac{k-1}{N}\right)p(n-1,k-1) + \frac{k+1}{N}\,p(n-1,k+1) = p(n,k)$

Si $k=0$ on obtient $z_k = \alpha_{01}\,p(n-1,1) = \frac{1}{N}\,p(n-1,1) = \frac{N-0+1}{N}\,p(n-1,-1) + \frac{1}{N}\,p(n-1,1)$
$= p(n,0)$

De même si $k=N$ on obtient $z_N = p(n,N)$

Finalement : $\Pi U_{n-1} = U_n$.

b) $K_1\Pi = (t_0,t_1,\dots,t_N)$ avec $t_j = \sum_{i=0}^{N} i\,\alpha_{ij}$

$\forall j\in[\![1,N-1]\!]$, $t_j = (j-1)\,\alpha_{j-1,j} + (j+1)\,\alpha_{j+1,j} = (j-1)\frac{j}{N} + (j+1)\left(1-\frac{j}{N}\right) = 1+j-\frac{2j}{N}$

$\forall j\in[\![1,N-1]\!]$, $t_j = 1+j-\frac{2j}{N}$

Il est aisé de voir que ceci vaut encore pour $j=0$ et N (à faire)

Donc $\forall j\in[\![1,N-1]\!]$, $t_j = 1+j-\frac{2j}{N} = 1+\left(1-\frac{2}{N}\right)j$

Par conséquent $K_1\Pi = J+\left(1-\frac{2}{N}\right)K_1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $K_1U_n = [0\ 1 \dots N]\begin{bmatrix} p(n,0) \\ p(n,1) \\ \vdots \\ p(n,N) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} k\,p(n,k) = E(X_n)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $E(X_n) = K_1U_n = K_1\Pi U_{n-1} = \left(J+\left(1-\frac{2}{N}\right)K_1\right)U_{n-1} = JU_{n-1} + \left(1-\frac{2}{N}\right)\underbrace{K_1U_{n-1}}_{E(X_{n-1})}$

$JU_{n-1} = p(n-1,0)+p(n-1,1)+\dots+p(n-1,N) = 1$ donc $E(X_n) = 1+\left(1-\frac{2}{N}\right)E(X_{n-1})$.

On retrouve ainsi la formule de II 2° b)

c) $K_2-NK_1 = [0,\ 1-N,\ 2^2-2N,\ \dots,\ N^2-N^2] = [j^2-jN]_{0\le j\le N}$

$(K_2-NK_1)\Pi = [v_0,v_1,\dots,v_N]$ avec $\forall j\in[\![0,N]\!]$, $v_j = \sum_{i=0}^{N}(i^2-iN)\,\alpha_{ij}$

$\forall j\in[\![1,N-1]\!]$, $v_j = ((j-1)^2-(j-1)N)\,\alpha_{j-1\,j} + ((j+1)^2-(j+1)N)\,\alpha_{j+1\,j}$

$\forall j\in[\![1,N-1]\!]$, $v_j = ((j-1)^2-(j-1)N)\frac{j}{N} + ((j+1)^2-(j+1)N)\left(1-\frac{j}{N}\right) = -\frac{4j^2}{N}+4j+j^2+1-jN-N$

$\forall j\in[\![1,N-1]\!]$, $v_j = \left(1-\frac{4}{N}\right)(j^2-jN)+1-N$

Il est facile de montrer que ceci vaut encore pour $j=0$ et $j=N$.

Donc $\forall j\in[\![0,N]\!]$, $v_j = \left(1-\frac{4}{N}\right)(j^2-jN)+1-N$. Par conséquent : $(K_2-NK_1)\Pi = \left(1-\frac{4}{N}\right)(K_2-NK_1)+(1-N)J$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $a_n = E(X_n^2) - N\,E(X_n) = \sum_{k=0}^{N} k^2 p(n,k) - N\sum_{k=0}^{N} k\,p(n,k) = \sum_{k=0}^{N} (k^2 - Nk)\,p(n,k)$

$a_n = E(X_n^2) - NE(X_n) = (K_2 - NK_1)\,U_n$.

$a_n = (K_2-NK_1)U_n = (K_2-NK_1)\,M\,U_{n-1} = \left[(1-\frac{4}{N})(K_2-NK_1) + (1-N)J\right]U_{n-1} = (1-\frac{4}{N})(K_2-NK_1)\,U_{n-1} + (1-N)\,JU_{n-1}$

$JU_{n-1} = 1$ et $(K_2-NK_1)U_{n-1} = a_{n-1}$

donc $a_n = (1-\frac{4}{N})a_{n-1} + (1-N)$ ... on retrouve II 2 c)

Q4 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n = M U_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n = M^n U_0$. $U_0 = (r_i)_{0\le i\le N}$ avec $r_i = 0$ si $i\ne r$, $r_i = 1$ si $i = r$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}(M^n U_0) = (\lim_{n\to+\infty} M^n)\,U_0$. Envisageons deux cas.

→ $\lim_{n\to+\infty} M^{2n} = \left(C_N^i \frac{1}{2^N}(1+(-1)^{j+i})\right)_{\substack{0\le i\le N\\ 0\le j\le N}}$

$\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = (\lim_{n\to+\infty} M^{2n})\,U_0 = \left(C_N^i\frac{1}{2^N}(1+(-1)^{j+i})\right)_{\substack{0\le i\le N\\ 0\le j\le N}} \times (r_i)_{0\le i\le N} = \left(C_N^i\frac{1}{2^N}(1+(-1)^{r+i})\right)_{0\le i\le N}$

donc $\lim_{n\to+\infty} p(2n,k) = C_N^k\frac{1}{2^N}(1+(-1)^{r+k})$ pour tout $k\in[\![0,N]\!]$

→ ...

de la même manière : $\lim_{n\to+\infty} p(2n+1,k) = C_N^k\frac{1}{2^N}(1-(-1)^{k+r})$

Suite de l'énoncé.

Retrouver ainsi la relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$ établie dans II 2 b)

c) Calculer le produit $(K_2-NK_1)M$ en fonction de K_2-NK_1 et de J. Retrouver ainsi la relation entre a_n et a_{n-1} établie dans la question II 2) c).

Q4.. En utilisant le résultat de la fin de la 1ère partie, déterminer selon la parité de r les limites des suites $(p(2n,k))$ et $(p(2n+1,k))$ lorsque n tend vers $+\infty$.
