PARTIE I

Q1.. $M^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&2&2&2\\1&1&2&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$; $M^3 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&2&2\\1&1&2&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&4&4&4\\2&3&2&2\\1&1&2&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$

$$M^4 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&4&4&4\\2&3&2&2\\1&1&2&1\\1&0&0&1\end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}8&8&8&8\\5&4&4&5\\2&3&2&2\\1&1&2&1\end{bmatrix}$$

donc $4M^4-2M^3-M^2-M = \frac{1}{4}(16M^4-8M^3-4M^2-4M) = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}8&8&8&8\\5&4&4&5\\2&3&2&2\\1&1&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&4&4&4\\2&3&2&2\\1&1&2&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&2&2&2\\1&1&2&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&2&2&2\\2&0&0&2\\0&2&0&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}\right) = 0$!

Q2.. $N^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&2&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&2&4\end{bmatrix}$

$N^3 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&2&4\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&3&2&0\\2&2&1&0\\1&1&1&0\\1&2&4&8\end{bmatrix}$, $N^4 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&2&0\\2&2&1&0\\1&1&1&0\\1&2&4&8\end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}7&6&4&0\\4&3&2&0\\2&2&1&0\\3&5&9&16\end{bmatrix}$

donc $8N^4-12N^3+2N^2+N+I_4 = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}7&6&4&0\\4&3&2&0\\2&2&1&0\\3&5&9&16\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12&9&6&0\\6&6&3&0\\3&3&3&0\\3&6&12&24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&2&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right)$

$= 0$! (vérifié à la main).

PARTIE II

Q1 a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 24x^2-8x-2 = 24(x-1/2)(x+1/6)$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = +\infty$

x	$-\infty$		$-1/6$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	A	↘	B	↗	$+\infty$

A: $g(-1/6) = -22/27$. La courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g admet en $+\infty$ et $-\infty$ une

B: $g(1/2) = -2$ branche parabolique de direction celle de $(x'x)$.

b) g est croissante sur $]-\infty,-1/6]$ et $g(-1/6)<0$, donc $\forall x \in]-\infty,-\frac{1}{6}]$, $g(x)<0$

g est décroissante sur $[-1/6, 1/2[$ et $g(-1/6)<0$; donc $\forall x \in [-1/6,1/2[$, $g(x)<0$

g ne s'annule donc pas sur $]-\infty, 1/2[$.

g est continue et strictement croissante sur $[1/2,+\infty[$. g définit une bijection de $[1/2,+\infty[$ sur l'intervalle $g([1/2,+\infty[) = [B,+\infty[= [-2,+\infty[$.

$0 \in g([1/2,+\infty[)$ donc $\exists!\, r \in [1/2,+\infty[$ tel que : $g(r)=0$.

$\boxed{r = \frac{1}{6}\left[\sqrt[3]{19+\sqrt{297}} + \sqrt[3]{19-\sqrt{297}} + 1\right] \text{ ok ?}}$

Finalement l'équation $x\in\mathbb{R}$ et $g(x)=0$ admet une solution et une seule : r.

Remarque.. $r \simeq 0{,}919\,643\,377$ (dichotomie machine). Exercice.. trouver une valeur exacte de r (... Cardan). Voir à la fin

Q2 $g(1) = 1$ et $g'(1) = 14$.

$y = 14(x-1)+1 = 14x-13$ est une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Cette tangente coupe (x'x) au point d'abscisse $\rho = \frac{13}{14}$.

$g(\rho) = \frac{2+2}{14^3} = \frac{34}{7^3} = \frac{34}{343} > 0$. $\rho - 0{,}01 = \frac{12{,}86}{14}$ et $g(\rho-0{,}01) = -\frac{32{,}124352}{14^3} < 0$!

On a donc $g(\rho)\,g(\rho-0{,}01) < 0$; par conséquent : $\rho - 0{,}01 < r < \rho$. $\underline{\underline{\frac{12{,}86}{14} < r < \frac{13}{14}}}$.

Ceci constitue un encadrement de r d'amplitude 0,01 !

Q3) a) Soit $a \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x-r)(8x^2 + ax + \frac{1}{r})$

$\Updownarrow$

$8X^3 - 4X^2 - 2X - 1 = (X-r)(8X^2 + aX + \frac{1}{r})$

$\Updownarrow$

$8X^3 - 4X^2 - 2X - 1 = 8X^3 + (a-8r)X^2 + (\frac{1}{r} - ar)X - 1$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} -4 = a - 8r \\ \text{et} \\ -2 = \frac{1}{r} - ar \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8r-4 \\ \text{et} \\ -2 = \frac{1}{r} - r(8r-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8r-4 \\ \text{et} \\ -2r = 1 - r^2(8r-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8r-4 \\ \text{et} \\ 8r^3 - 4r^2 - 2r - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 8r-4$

Donc $\exists !\, a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x-r)(8x^2 + ax + \frac{1}{r})$; $\underline{\underline{a = 8r-4}}$.

b) g a un zéro réel et un seul, donc $8x^2 + ax + \frac{1}{r}$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$ et a donc dans $\mathbb{C}$ deux zéros conjugués : z et $\bar{z}$

Donc l'équation $x \in \underline{\underline{\mathbb{C}}}$ et $g(x) = 0$ admet trois solutions ; une réelle r et deux complexes et conjuguées : z et $\bar{z}$.

$z\bar{z} = \frac{1}{8r}$ (et $z + \bar{z} = -\frac{a}{8}$) car z et $\bar{z}$ sont les zéros de $8X^2 + aX + \frac{1}{r}$.

Par conséquent : $\underline{\underline{|z| = \frac{1}{\sqrt{8r}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{r}}}}$

Pour montrer que $|z| < r$ il suffit de montrer que $\frac{1}{2\sqrt{2r}} < r$ c'est à dire que : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 < (\sqrt{r})^3$

Soit donc à montrer que : $\sqrt{r} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'est à dire que $r > 1/2$ ce qui est clair d'après Q1 b) ou Q2 b).

Q4) a) Notons plus simplement que si t est un zéro de $8X^3 - 4X^2 - 2X - 1$ alors $(t^n)_{n \geq 1} \in E$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 8t^{n+3} - 4t^{n+2} - 2t^{n+1} - t^n = t^n(8t^3 - 4t^2 - 2t - 1) = 0$ car t est zéro de $8X^3 - 4X^2 - 2X - 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 8t^{n+3} = 4t^{n+2} + 2t^{n+1} + t^n$; $(t^n)_{n \geq 1} \in E$

Et par conséquent : $(r^n)_{n \geq 1}$, $(z^n)_{n \geq 1}$ et $(\bar{z}^n)_{n \geq 1}$ sont des éléments de E car r, z et $\bar{z}$ sont des (ou les !) zéros de $8X^3 - 4X^2 - 2X - 1$.

b) ⊛ Voir l'existence et l'unicité de la solution page suivante. Notons que : $\alpha = \frac{1}{8r^3 + 4r^2 + 1}$

$8(\alpha r^3 + \beta z^3 + \gamma \bar{z}^3) - 4(\alpha r^2 + \beta z^2 + \gamma \bar{z}^2) - 2(\alpha r + \beta z + \gamma \bar{z}) = 1$ $\quad (8 \times \frac{1}{8} - 4 \times 0 - 2 \times 0 = 1\,!)$

$\alpha(8r^3 - 4r^2 - 2r) + \beta(8z^3 - 4z^2 - 2z) + \gamma(8\bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 - 2\bar{z}) = 1$

r, z et $\bar z$ étant des zéros de $8X^3-4X^2-2X-1$ on obtient : $\alpha+\beta+\gamma = 1$ $(8r^3-4r^2-2r=1,\dots)$

Nous savons que : $8z^2+az+\frac{1}{r} = 8\bar z^2 + a\bar z + \frac{1}{r}$ et que : $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = 1\\ \alpha r+\beta z+\gamma \bar z = 0\\ \alpha r^2+\beta z^2+\gamma\bar z^2 = 0\end{cases}$

En multipliant respectivement ces trois équations par $1/r$, a et 8 on obtient alors : $\alpha\left(\frac{1}{r}+ar+8r^2\right) = 1/r$

c'est à dire : $\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{8r^3+ar^2+1}}}$ ... il est aussi aisé de prouver que : $\beta = \frac{r\bar z}{(z-r)(z-\bar z)}$ et $\gamma = \frac{rz}{(\bar z-r)(\bar z-z)}$

(*) Montrons que le système proposé admet une solution et une seule (ce n'est pas demandé mais le texte semble admettre implicitement ce résultat !)

Il suffit de montrer que la matrice $\begin{bmatrix} r & z & \bar z\\ r^2 & z^2 & \bar z^2\\ r^3 & z^3 & \bar z^3\end{bmatrix}$ est inversible (le système est alors de Cramer)
cherchons une réduite de Gauss de cette matrice.

$$\begin{bmatrix} r & z & \bar z\\ 0 & z(z-r) & \bar z(\bar z-r)\\ 0 & z(z-r)(z+r) & \bar z(\bar z-r)(\bar z+r)\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix} r & z & \bar z\\ 0 & z(z-r) & \bar z(\bar z-r)\\ 0 & 0 & ^{\blacktriangle}\,\bar z(\bar z-r)(\bar z+r-z-r)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & z & \bar z\\ 0 & z(z-r) & \bar z(\bar z-r)\\ 0 & 0 & \bar z(\bar z-r)(\bar z-z)\end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - rL_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - r^2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - (z+r)L_2$ $\quad\left(\blacktriangle\ \bar z(\bar z-r)(\bar z+r) - \bar z(\bar z-r)(z+r) = \bar z(\bar z-r)(\bar z+r-z-r)\right)$

La matrice initiale est inversible si et seulement si : $r\neq 0$, $z(z-r)\neq 0$, $\bar z(\bar z-r)(\bar z-z)\neq 0$; ceci est clair car r, z et $\bar z$ sont deux à deux distincts et non nuls.

Ceci achève donc de prouver que le système admet une solution et une seule que nous noterons (α,β,γ). Ce qui précède montre que : $\alpha = \frac{1}{8r^3+ar^2+1}$. Montrons que $\bar\beta = \gamma$.

$\begin{cases}\alpha r+\beta z+\gamma\bar z = 0\\ \alpha r^2+\beta z^2+\gamma\bar z^2 = 0\\ \alpha r^3+\beta z^3+\gamma\bar z^3 = \frac{1}{8}\end{cases}$ donc $\begin{cases}\bar\alpha r+\bar\beta\bar z+\bar\gamma z = 0\\ \bar\alpha r^2+\bar\beta\bar z^2+\bar\gamma z^2 = 0\\ \bar\alpha r^3+\bar\beta\bar z^3+\bar\gamma z^3 = \frac{1}{8}\end{cases}$ par conjugaison. Or $\alpha = \bar\alpha$; par

conséquent : $\begin{cases}\alpha r+\bar\gamma z+\bar\beta\bar z = 0\\ \alpha r^2+\bar\gamma z^2+\bar\beta\bar z^2 = 0\\ \alpha r^3+\bar\gamma z^3+\bar\beta\bar z^3 = 1/8.\end{cases}$; $(\alpha,\bar\gamma,\bar\beta)$ est encore solution et donc :
$(\alpha,\bar\gamma,\bar\beta) = (\alpha,\beta,\gamma)$ (unicité de la solution)

Par conséquent : $\bar\gamma = \beta$ et $\bar\beta = \gamma$. $\underline{\bar\beta = \gamma.}$

c) Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 3 que :
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $q_n = \alpha r^n+\beta z^n+\bar\beta\bar z^n$ c'est à dire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $q_n = \alpha r^n+\beta z^n+\gamma\bar z^n$
La propriété est vraie pour $n=1,2$ et 3 car $q_1=q_2=0$, $q_3=\frac{1}{8}$ et $\begin{cases}\alpha r+\beta z+\gamma\bar z = 0\\ \alpha r^2+\beta z^2+\gamma\bar z^2 = 0\\ \alpha r^3+\beta z^3+\gamma\bar z^3 = 1/8\end{cases}$

– Supposons la propriété vraie pour n, $n+1$ et $n+2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, montrons la pour $n+3$.

$8q_{n+3} = 4q_{n+2} + 2q_{n+1} + q_n$

$8q_{n+3} = 4(\alpha r^{n+2} + \beta z^{n+2} + \sigma \bar{z}^{n+2}) + 2(\alpha r^{n+1} + \beta z^{n+1} + \sigma \bar{z}^{n+1}) + (\alpha r^n + \beta z^n + \sigma \bar{z}^n)$ (H.R)

$8q_{n+3} = \alpha(4r^{n+2} + 2r^{n+1} + r^n) + \beta(4z^{n+2} + 2z^{n+1} + z^n) + \sigma(4\bar{z}^{n+2} + 2\bar{z}^{n+1} + \bar{z}^n)$

$8q_{n+3} = \alpha\, 8r^{n+3} + \beta\, 8z^{n+3} + \sigma\, 8\bar{z}^{n+3}$ car $(r^n)_{n \geq 1}$, $(z^n)_{n\geq 1}$ et $(\bar{z}^n)_{n\geq 1}$ sont dans E

$q_{n+3} = \alpha r^{n+3} + \beta z^{n+3} + \sigma \bar{z}^{n+3}$ ... ce qui achève la récurrence.

Montrons que : $|q_n - \alpha r^n| \leq \dfrac{2|\beta|}{(8r)^{n/2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$|\mathrm{Re}(\omega)| \leq |\omega|$ pour $\omega \in \mathbb{C}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|q_n - \alpha r^n| = |\beta z^n + \sigma \bar{z}^n| = |\beta z^n + \bar{\beta}\bar{z}^n| = |2\,\mathrm{Re}(\beta z^n)| \leq 2|\beta z^n| = 2|\beta||z|^n$

Or $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{8r}}$; par conséquent : $|q_n - \alpha r^n| \leq \dfrac{2|\beta|}{(\sqrt{8r})^n} = \dfrac{2|\beta|}{(8r)^{n/2}}$ ... cqfd.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $q_n = \alpha r^n + \beta z^n + \sigma \bar{z}^n$

$$\frac{q_n}{r^n} = \alpha + \beta\left(\frac{z}{r}\right)^n + \sigma\left(\frac{\bar{z}}{r}\right)^n.$$

$\left|\dfrac{z}{r}\right| = \dfrac{|z|}{r} < 1$ et $\left|\dfrac{\bar{z}}{r}\right| = \dfrac{|\bar{z}|}{r} = \dfrac{|z|}{r} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q_n}{r^n} = \alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\bar{z}}{r}\right)^n = 0$

Par conséquent : $q_n \sim \alpha r^n$.

$\dfrac{q_{n+1}}{q_n} \sim \dfrac{\alpha r^{n+1}}{\alpha r^n} = r$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q_{n+1}}{q_n} = r$.

Remarque .. Ceci montre que les récurrences linéaires d'ordre p sont au service des équations de degré p ... et non pas le contraire ... en général !

(Q5) a) Programme calculant $q_4, q_5, \dots, q_N$

```
?→N : 0→A : 0→B : 8⁻¹→C : N-3→N
Lbl 0
8⁻¹(4C+2B+A)→D ◢
B→A : C→B : D→C
Dsz N : Goto 0
"FIN"
```

$q_4 = 0,062500$	$q_{11} \simeq 0,039551$
$q_5 = 0,062500$	$q_{12} \simeq 0,036377$
$q_6 = 0,062500$	$q_{13} \simeq 0,033447$
$q_7 \simeq 0,054688$	$q_{14} \simeq 0,030762$
$q_8 \simeq 0,050781$	$q_{15} \simeq 0,028290$
$q_9 \simeq 0,046875$	
$q_{10} \simeq 0,042969$	

Pour $\dfrac{q_{k+1}}{q_k}$, changer $N-3\to N$ en $N-2\to N$ et

$8^{-1}(4C+2B+A)\to D$ ◢ en $8^{-1}(4C+2B+A)\to D : D/C$ ◢

Voir à la fin un programme en TP4

Posons $w_k = \frac{q_{k+1}}{q_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 3$

$w_3 = 0,5000$ $\quad$ $w_8 \simeq 0,9231$ $\quad$ $w_{13} \simeq 0,9197$

$w_4 = 1$ $\quad$ $w_9 \simeq 0,9167$ $\quad$ $w_{14} \simeq 0,9196$

$w_5 = 1$ $\quad$ $w_{10} \simeq 0,9205$ $\quad$ $w_{15} \simeq 0,9196$ $\quad (\simeq 0,919\ 633\ 225)$

$w_6 = 0,8750$ $\quad$ $w_{11} \simeq 0,9198$

$w_7 \simeq 0,9286$ $\quad$ $w_{12} \simeq 0,9195$

b) Utilisons donc la dichotomie.

Ce qui précède invite à calculer $g(0,9197)$ et $g(0,9196)$.

$g(0,9197) \simeq 0,000619\ 547$! et $g(0,9196) \simeq -0,000474\ 548$

Par conséquent : $g(0,9197) \times g(0,9196) < 0$; $\underline{\underline{0,9196 < r < 0,9197}}$

PARTIE III $\quad$ A

Q1) $p(Y_{n+1}=0) = p(Y_{n+1}=0 / Y_n=0)\,p(Y_n=0) + p(Y_{n+1}=0/Y_n=1)\,p(Y_n=1) + p(Y_{n+1}=0/Y_n=2)\,p(Y_n=2) +$
$p(Y_{n+1}=0/Y_n=3)\,p(Y_n=3)$

$\underline{\underline{p(Y_{n+1}=0) = 1/2\,\left(p(Y_n=0)+p(Y_n=1)+p(Y_n=2)+p(Y_n=3)\right)}}$ (... on doit obtenir pile au rang n+1 !)

$p(Y_{n+1}=1) = \sum_{j=0}^{3} p(Y_{n+1}=1/Y_n=j) = \frac{1}{2}p(Y_n=0) + 0.\,p(Y_n=1) + 0.\,p(Y_n=2) + \frac{1}{2}p(Y_n=3)$

$\underline{\underline{p(Y_{n+1}=1) = \frac{1}{2}p(Y_n=0) + \frac{1}{2}p(Y_n=3)}}$

{ au rang n+1 on doit avoir 3k+1 faces depuis la dernière pile. Ceci exige ~~fac~~ au rang n+1 et pile au rang n ou 3k+3 faces depuis la dernière pile au rang n !

De même $p(Y_{n+1}=2) = 0.\,p(Y_n=0) + \frac{1}{2}.\,p(Y_n=1) + 0.\,p(Y_n=2) + 0.\,p(Y_n=3)$ $\quad$ { même type de raisonnement.

$\underline{\underline{p(Y_{n+1}=2) = \frac{1}{2}p(Y_n=1)}}$

On a encore $\underline{\underline{p(Y_{n+1}=3) = \frac{1}{2}p(Y_n=2)}}$.

Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $V_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(Y_{n+1}=0) \\ p(Y_{n+1}=1) \\ p(Y_{n+1}=2) \\ p(Y_{n+1}=3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(Y_n=0) \\ p(Y_n=1) \\ p(Y_n=2) \\ p(Y_n=3) \end{bmatrix}$

Donc $V_{n+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} V_n$; $\underline{\underline{V_{n+1} = \Pi V_n}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\underline{\underline{n \geqslant 2}}$.

$4\Pi^4 - 2\Pi^3 - \Pi^2 - \Pi = 0$ donc $4\Pi^4 V_{n-1} - 2\Pi^3 V_{n-1} - \Pi^2 V_{n-1} - \Pi V_{n-1} = 0$

$\Pi V_{n-1} = V_n$, $\Pi^2 V_{n-1} = V_{n+1}$, $\Pi^3 V_{n-1} = V_{n+2}$ et $\Pi^4 V_{n-1} = V_{n+3}$

Par conséquent : $4V_{n+3} - 2V_{n+2} - V_{n+1} - V_n = 0$.

En particulier $4d_{n+3} - 2d_{n+2} - d_{n+1} - d_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

$d_1 = d_2 = 0$. $d_3 = \frac{1}{8}$ (FFF) et $d_4 = \frac{1}{16}$ (PFFF). La pompe est amorcée !

d) Il suffit de remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2 \Rightarrow d_{k+3} = \frac{1}{4}(2d_{k+2} + d_{k+1} + d_k)$.

Notons que ceci vaut encore pour $k = 1$.

Donc $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ d_{k+3} = \frac{1}{4}(2d_{k+2} + d_{k+1} + d_k)}}$.

Pour l'algorithme ou le programme, même chose que pour II Q 5c) !

(remplacer $8^{-1}(4C+2B+A) \to D$ par $4^{-1}(2C+B+A) \to D$ ou voir la partie "II-éco"; voir encore à la fin).

$d_4 = 0{,}062\,500$; $d_5 = 0{,}062\,500$; $d_6 = 0{,}078\,125$; $d_7 \simeq 0{,}070\,313$; $d_8 \simeq 0{,}070\,313$; $d_9 \simeq 0{,}072\,266$; $d_{10} \simeq 0{,}071\,289$; $d_{11} \simeq 0{,}071\,289$; $d_{12} \simeq 0{,}071\,533$; $d_{13} \simeq 0{,}071\,411$; $d_{14} \simeq 0{,}071\,411$; $d_{15} \simeq 0{,}071\,442$.

e)

Il apparaît que : $d_4 = d_5$, $d_7 = d_8$, $d_{10} = d_{11}$; $d_{13} = d_{14}$; notons que $d_1 = d_2$!

Ce qui laisse croire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ d_{3k+1} = d_{3k+2}$.

Montrons ce résultat par récurrence (ce qui n'est pas demandé ... dans le texte initial)

- C'est clair pour $k = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$ ($d_{3k+1} = d_{3k+2}$) et montrons la pour $k+1$ ($d_{3k+4} = d_{3k+5}$).

$$d_{3k+5} - d_{3k+4} = \frac{1}{4}(2d_{3k+4} + d_{3k+3} + d_{3k+2} - 4d_{3k+4}) = \frac{1}{4}(d_{3k+3} + d_{3k+2} - 2d_{3k+4})$$
$$= \frac{1}{8}(2d_{3k+3} + 2d_{3k+2} - 4d_{3k+4}) = \frac{1}{8}(2d_{3k+3} + 2d_{3k+2} - 2d_{3k+3} - d_{3k+2} - d_{3k+1})$$
$$= \frac{1}{8}(d_{3k+2} - d_{3k+1}) = 0 \quad \text{(H.R.)}$$

Ceci achève la récurrence et prouve le résultat.

<u>Remarque</u>.. On pourra regarder dans <u>l'option économique</u> (HEC 88 !!) l'étude de la suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ (... qui est notée $(p_n)_{n \geqslant 1}$).

On montre en particulier que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = \frac{1}{14} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2^n} \cos \frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{7\sqrt{3}} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2\pi n}{3}$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \frac{1}{14}$. ($\simeq 0{,}071\,429$ ...)
- $\left| d_n - \frac{1}{14} \right| \leqslant 1/2^{n+1}$ (vitesse de convergence).

B Q1 En fait le principe est le même que dans A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $p(Z_{n+1}=i) = \sum_{j=0}^{3} p(Z_{n+1}=i / Z_n=j)\, p(Z_n=j)$

$p(Z_{n+1}=i / Z_n=3) = 0$ pour $i=0, 1$ ou 2 et $p(Z_{n+1}=3/Z_n=3) = 1$.

$p(Z_{n+1}=0 / Z_n=j)$ pour $j=0, 1$ ou 2 est $1/2$ (il faut obtenir pile au lancer $n+1$).

$p(Z_{n+1}=1 / Z_n=0) = 1/2$ (face au $n+1^{\text{ème}}$ lancer). $p(Z_{n+1}=1/Z_n=1) = p(Z_{n+1}=1/Z_n=2) = 0$.

$p(Z_{n+1}=2 / Z_n=0) = p(Z_{n+1}=2/Z_n=2) = 0$ et $p(Z_{n+1}=2/Z_n=1) = 1/2$ (le $n+1^{\text{ème}}$ lancer donne face).

$p(Z_{n+1}=3 / Z_n=0) = p(Z_{n+1}=3/Z_n=1) = 0$ et $p(Z_{n+1}=3/Z_n=2) = 1/2$ (————————)

Donc
$$p(Z_{n+1}=0) = \frac{1}{2}p(Z_n=0) + \frac{1}{2}p(Z_n=1) + \frac{1}{2}p(Z_n=2)$$
$$p(Z_{n+1}=1) = \frac{1}{2}p(Z_n=0)$$
$$p(Z_{n+1}=2) = \frac{1}{2}p(Z_n=1)$$
$$p(Z_{n+1}=3) = \frac{1}{2}p(Z_n=2) + p(Z_n=3) = \frac{1}{2}\left(p(Z_n=2) + 2p(Z_n=3)\right)$$

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$W_{n+1} = \begin{bmatrix} p(Z_{n+1}=0) \\ p(Z_{n+1}=1) \\ p(Z_{n+1}=2) \\ p(Z_{n+1}=3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(Z_n=0)+p(Z_n=1)+p(Z_n=2) \\ p(Z_n=0) \\ p(Z_n=1) \\ p(Z_n=2)+2p(Z_n=3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p(Z_n=0) \\ p(Z_n=1) \\ p(Z_n=2) \\ p(Z_n=3) \end{bmatrix} = N W_n.$$

b) $8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $8N^4W_n - 12N^3W_n + 2N^2W_n + NW_n + I_4W_n = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $8W_{n+4} - 12W_{n+3} + 2W_{n+2} + W_{n+1} + W_n = 0$

En considérant les dernières coordonnées on obtient :

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, 8d'_{n+4} - 12d'_{n+3} + 2d'_{n+2} + d'_{n+1} + d'_n = 0}}$.

c) $p(X=1) = p(X=2) = 0$; $p(X=3) = \frac{1}{8}$ (FFF) et $p(X=4) = \frac{1}{16}$ (PFFF).

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $p(X=n) = p(X\leq n) - p(X\leq n-1) = p(Z_n=3) - p(Z_{n-1}=3) = d'_n - d'_{n-1}$.

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, n\geq 2 \Rightarrow p(X=n) = d'_n - d'_{n-1}}}$.

d) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = d'_n - d'_{n-1}$ (par convention $d'_0 = 0$!).

$\Delta_1 = d'_1 - d'_0 = 0$; $\Delta_2 = d'_2 - d'_1 = 0 - 0$; $\Delta_3 = d'_3 - d'_2 = d'_3 = 1/8$ (FFF).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 = 8d'_{n+4} - 12d'_{n+3} + 2d'_{n+2} + d'_{n+1} + d'_n = 8(d'_{n+4} - d'_{n+3}) - 4(d'_{n+3} - d'_{n+2}) - 2(d'_{n+2} - d'_{n+1})$
$- (d'_{n+1} - d'_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 = 8\Delta_{n+4} - 4\Delta_{n+3} - 2\Delta_{n+2} - \Delta_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $8\Delta_{n+4} = 4\Delta_{n+3} + 2\Delta_{n+2} + \Delta_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $8\Delta_{n+3} = 4\Delta_{n+2} + 2\Delta_{n+1} + \Delta_n$. Vérifions que ceci vaut encore pour $n=1$.

$4p_3+2p_2+p_1=1/2$

$8p_4=8(d'_4-d'_3)=8\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\right)$ $\left(d'_4=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ \ldots\ \text{FFF ou PFFF}\right)$

donc $8p_4=\frac{1}{2}=4p_3+2p_2+p_1$

Finalement $\begin{cases} p_1=p_2=0\ ,\ p_3=1/8 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 8p_{n+3}=4p_{n+2}+2p_{n+1}+p_n \end{cases}$ et $\begin{cases} q_1=q_2=0\ ,\ q_3=1/8 \\ \text{et} \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 8q_{n+3}=4q_{n+2}+2q_{n+1}+q_n \end{cases}$

Une simple récurrence d'ordre 2 montre classique : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n=q_n$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p(X=n)=q_n=\alpha r^n+\beta z^n+\gamma \bar{z}^n}}$

Ceci donne encore : $\underline{\underline{p(X=n)\sim \alpha r^n}}$

Donc $\frac{p(X=n+1)}{p(X=n)}\sim\frac{\alpha r^{n+1}}{\alpha r^n}$; $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\frac{p(X=n+1)}{p(X=n)}=r}}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, n\,p(X=n)\geqslant 0$; l'existence de $E(X)$ résulte alors de la convergence de la série de terme général $n\,p(X=n)$.

Or $n\,p(X=n)\sim n\alpha r^n=\alpha r(nr^{n-1})$. $|r|<1$ donc la série de terme général $\alpha r(nr^{n-1})$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $n\,p(X=n)$ est (absolument) convergente. $E(X)$ existe.

$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,p(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,q_n=\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}n r^n+\beta\sum_{n=1}^{+\infty}n z^n+\gamma\sum_{n=1}^{+\infty}n\bar{z}^n$ (les 3 séries convergent)

$E(X)=\alpha r\sum_{n=1}^{+\infty}nr^{n-1}+\beta z\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1}+\gamma\bar{z}\sum_{n=1}^{+\infty}n\bar{z}^{n-1}=\alpha\frac{r}{(1-r)^2}+\beta\frac{z}{(1-z)^2}+\gamma\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z})^2}$.

Soit u un zéro de g $(x\mapsto 8x^3-4x^2-2x-1)$ dans $\mathbb{C}$.

$(104u^2+44u+14)(u-1)^2=(104u^2+44u+14)(u^2-2u+1)$

$=104u^4+44u^3+14u^2-208u^3-88u^2-28u+104u^2+44u+14$

$=104u^4-164u^3+30u^2+16u+14$

$=13u\times 8u^3-164u^3+30u^2+16u+14=13u\times(4u^2+2u+1)-164u^3+30u^2+16u+14$

$=-112u^3+56u^2+29u+14=-14(8u^3)+56u^2+29u+14$

$=-14(4u^2+2u+1)+56u^2+29u+14=u$! $\frac{u}{(u-1)^2}=104u^2+44u+14$

Exercice.. Réfléchir au pourquoi (... voir $E(X)$) et surtout au comment de cette formule (considérer les restes des divisions de $xg(x)$ et $g(x)$ par $(x-1)^2$... et éliminer les constantes).

Revenons à $E(X)$.

$$E(X)=\alpha\frac{r}{(1-r)^2}+\beta\frac{j}{(1-j)^2}+\gamma\frac{\bar{j}}{(1-\bar{j})^2}=\alpha(104r^2+44r+14)+\beta(104j^2+44j+14)+\gamma(104\bar{j}^2+44\bar{j}+14)$$

$$E(X)=104(\alpha r^2+\beta j^2+\gamma\bar{j}^2)+44(\alpha r+\beta j+\gamma\bar{j})+14(\alpha+\beta+\gamma)$$

Nous avons vu dans II Q4 que : $\alpha+\beta+\gamma=1$ (p3), $\alpha r+\beta j+\gamma\bar{j}=\alpha r^2+\beta j^2+\gamma\bar{j}^2=0$.

Il vient donc : $\underline{E(X)=14}$.

e) L'énoncé du problème

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_i l'événement obtenir face au $i^{\text{ème}}$ lancer.

$(P_1, F_1\cap P_2, F_1\cap F_2\cap P_3, F_1\cap F_2\cap F_3)$ est un système complet d'événements

$p(X=n+3\,|\,P_1)=p(X=n+2)$ (tout est à faire en $n+2$ lancers)

$p(X=n+3\,|\,F_1\cap P_2)=p(X=n+1)$ (" " " $n+1$ ")

$p(X=n+3\,|\,F_1\cap F_2\cap P_3)=p(X=n)$ (" " " n ")

$p(X=n+3\,|\,F_1\cap F_2\cap F_3)=0$ car $n+3\geqslant 4$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

La formule des probabilités totales donne alors :

$p(X=n+3)=p(P_1)\,p(X=n+2)+p(F_1\cap P_2)\,p(X=n+1)+p(F_1\cap F_2\cap P_3)\,p(X=n)+0.$

Donc $p(X=n+3)=\frac{1}{2}p(X=n+2)+\frac{1}{4}p(X=n+1)+\frac{1}{8}p(X=n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Clairement : $\underline{p(X=1)=p(X=2)=0}$ et $\underline{p(X=3)=p(F_1\cap F_2\cap F_3)=1/8}$ ... et :

$\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 8p(X=n+3)=4p(X=n+2)+2p(X=n+1)+p(X=n)}$

On retrouve alors la suite (q_n)

Retrouvons maintenant $E(X)$. Commençons par l'existence.

Montrons par une récurrence d'ordre 3 que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(X=n)\leqslant\left(\frac{13}{14}\right)^n$

C'est clair pour $n=1$, 2 et 3

Supposons la propriété vraie pour $n, n+1, n+2$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ et montrons la pour $n+3$.

$8p(X=n+3)=4p(X=n+2)+2p(X=n+1)+p(X=n)$

$8p(X=n+3)\leqslant 4\left(\frac{13}{14}\right)^{n+2}+2\left(\frac{13}{14}\right)^{n+1}+\left(\frac{13}{14}\right)^{n}=\left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}\left[4\left(\frac{14}{13}\right)+2\left(\frac{14}{13}\right)^2+\left(\frac{14}{13}\right)^3\right]$

$8p(X=n+3)\leqslant\left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}\frac{1}{13^3}\left[4\times14\times13^2+2\times14^2\times13+14^3\right]=\frac{17304}{13^3}\left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}$

$p(X=n+3)\leqslant\frac{17304}{8\times2197}\left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}=\frac{2163}{2197}\left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}\leqslant\left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}$. Ceci achève la récurrence.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant n\,p(X=n)\leqslant n\left(\frac{13}{14}\right)^n$. La série de terme général $n\left(\frac{13}{14}\right)^n$ étant convergente il en est de même de la série de terme général $n\,p(X=n)$ (règle de comparaison des séries à termes positifs)

La série de terme général $n\,p(X=n)$ est absolument convergente ($n\,p(X=n)\geqslant 0$...) donc $E(X)$ existe.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; $8n\,p(X=n+3)=4n\,p(X=n+2)+2n\,p(X=n+1)+n\,p(X=n)$.

Donc $8\sum_{n=1}^{+\infty}n\,p(X=n+3)=4\sum_{n=1}^{+\infty}n\,p(X=n+2)+2\sum_{n=1}^{+\infty}n\,p(X=n+1)+\sum_{n=1}^{+\infty}n\,p(X=n)$ (les quatre séries sont convergentes). Par quelques changements d'indice on obtient :

$$8\sum_{n=4}^{+\infty}(n-3)p(X=n)=4\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)p(X=n)+2\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)p(X=n)+E(X)$$

$(n-3)p(X=n)=0$ pour $n=3$, 2 et 1 (ok!)

$(n-2)p(X=n)=0$ pour $n=2$ et 1

$(n-1)p(X=n)=0$ pour $n=1$

Il vient alors :

$$8\sum_{n=1}^{+\infty}(n-3)p(X=n)=4\sum_{n=1}^{+\infty}(n-2)p(X=n)+2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)p(X=n)+E(X) \text{ ou :}$$

$$8E(X)-24\sum_{n=1}^{+\infty}p(X=n)=4E(X)-8\sum_{n=1}^{+\infty}p(X=n)+2E(X)-2\sum_{n=1}^{+\infty}p(X=n)+E(X)$$

Donc $8E(X)-4E(X)-2E(X)-E(X)=(24-8-2)\sum_{n=1}^{+\infty}p(X=n)=14$

Donc $\underline{\underline{E(X)=14.}}$

```
Donnez la valeur de n. n=15

q(3)=   0.125000    q(4)/q(3)=  0.5000
q(4)=   0.062500    q(5)/q(4)=  1.0000
q(5)=   0.062500    q(6)/q(5)=  1.0000
q(6)=   0.062500    q(7)/q(6)=  0.8750
q(7)=   0.054688    q(8)/q(7)=  0.9286
q(8)=   0.050781    q(9)/q(8)=  0.9231
q(9)=   0.046875    q(10)/q(9)=  0.9167
q(10)=  0.042969    q(11)/q(10)=  0.9205
q(11)=  0.039551    q(12)/q(11)=  0.9198
q(12)=  0.036377    q(13)/q(12)=  0.9195
q(13)=  0.033447    q(14)/q(13)=  0.9197
q(14)=  0.030762    q(15)/q(14)=  0.9196
q(15)=  0.028290    q(16)/q(15)=  0.9196
```

L'algorithme de II § 5 a)

```
program HEC88MII;

uses crt;
var k,n:integer;a,b,c,d:real;

begin
clrscr;
a:=0;b:=0;c:=1/8;
write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);writeln;

for k:=3 to n do
    begin
    write('q(',k,')=',c:10:6);
    d:=(4*c+2*b+a)/8;
    writeln('    q(',k+1,')/q(',k,')=',d/c:8:4);
    a:=b;b:=c;c:=d;
    end;

end.
```

COMPLEMENTS

1°. Complément 1.

```
(* simulation du temps d'attente des 3 faces consécutifs *)

program hec88MIIb;

uses crt;
var n,k:integer;moy:real;

function simule:integer;

var compteur,compte_face:integer;

begin
compteur:=0;compte_face:=0;
while compte_face<3 do
      begin
      compteur:=compteur+1;
      if random(2)=0 then compte_face:=0
                     else compte_face:=compte_face+1;
      end;
simule:=compteur;
end;

begin
randomize;
write('Donnez le nombre n d''itérations souhaitées. n=');readln(n);

moy:=0;
for k:=1 to n do moy:=moy+simule;

writeln('Nous avons simulé ',n,' fois l''expérience.');
write('Le temps d''attente de 3 faces consécutives est en moyenne, ');
writeln('sensiblement ',moy/n:5:2);
writeln('Pour mémoire l''espérance est 14.');
end.
```

```
Donnez le nombre n d'itérations souhaitées. n=9999
Nous avons simulé 9999 fois l'expérience.
Le temps d'attente de 3 faces consécutives est en moyenne, sensiblement 14.02
Pour mémoire l'espérance est 14.

Donnez le nombre n d'itérations souhaitées. n=100
Nous avons simulé 100 fois l'expérience.
Le temps d'attente de 3 faces consécutives est en moyenne, sensiblement 14.63
Pour mémoire l'espérance est 14.

Donnez le nombre n d'itérations souhaitées. n=10000
Nous avons simulé 10000 fois l'expérience.
Le temps d'attente de 3 faces consécutives est en moyenne, sensiblement 14.00
Pour mémoire l'espérance est 14.
```

2.. complément 2 : recherche des zéros de $P = 8X^3-4X^2-2X-1$

Soit $a \in \mathbb{R}$. $P = \sum_{k=0}^{3} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$. $P' = 24X^2-8X-2$, $P'' = 48X-8$, $P''' = 48$.

Prenons $a = 8/48$ (on fait disparaître le terme "X^2" !). $a = 1/6$. $P'''(a) = 48$, $P''(a) = 0$, $P'(a) = -8/3$ et $P(a) = -38/27$.

Ainsi $P = 8(X-a)^3 - \frac{8}{3}(X-a) - \frac{38}{27}$.

Soit $x \in \mathbb{C}$. Posons $y = x-a$. $8x^3-4x^2-2x-1 = 0 \iff 8y^3 - \frac{8}{3}y - \frac{38}{27} = 0$.

Posons $y = u+v$ avec $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ et supposons que : $8y^3 - \frac{8}{3}y - \frac{38}{27} = 0$.

$0 = 8y^3 - \frac{8}{3}y - \frac{38}{27} = 8(u^3+v^3) + 8(u+v)(3uv - \frac{1}{3}) - \frac{38}{27}$.

Posons $uv = \frac{1}{9}$ (on a donc choisi $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tq $u+v = y$ et $uv = 1/9$!).

Alors $u^3v^3 = (1/9)^3$ et $8(u^3+v^3) = \frac{38}{27}$; $u^3v^3 = 1/9$ et $u^3+v^3 = \frac{19}{4\times 27}$.

u^3 et v^3 sont les solutions de $T \in \mathbb{C}$ et $T^2 - \frac{19}{4\times 27}T + (\frac{1}{9})^3 = 0$.

Donc $u^3 \in \left\{ \frac{19+\sqrt{297}}{8\times 27}, \frac{19-\sqrt{297}}{8\times 27} \right\}$ (résolution de l'équation du second degré !).

La symétrie du problème autorise à choisir $u^3 = \frac{19+\sqrt{297}}{8\times 27}$

ou $u = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6}$ et $v = \frac{\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}}{6}$ (car $uv = \frac{1}{9}$) ; $y = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6} + \frac{\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}}{6}$

ou $u = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6} j$ et $v = \frac{\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}}{6}$ (car $uv = 1/9$) ; $y = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6} j + \frac{\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}}{6} j^2$.

De même $u = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6} j^2$ donne $y = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6} j^2 + \frac{\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}}{6} j$.

Finalement les zéros de $8X^3-4X^2-2X-1$ sont :

$$r = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6} + \frac{\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}}{6} + \frac{1}{6} \simeq 0,919\,643\,378$$

$$z = \frac{\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}}{6} j + \frac{\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}}{6} j^2 + \frac{1}{6}$$

et $\bar{z}$!