Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Samedi 7 mai 1988, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

L'objet du problème est d'étudier la convergence d'une suite de polynômes d'interpolation d'une fonction f, ce qui constitue la partie III. Dans la partie I, on construit les polynômes d'interpolation de f ; dans la partie II, on explicite un tel polynôme sur un exemple.

I. Interpolation d'une fonction par un polynôme

Soient n un nombre entier naturel non nul et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une suite de nombres réels distincts. On leur associe les n polynômes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ définis pour $1 \leqslant j \leqslant n$ par :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

1. Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, expliciter le degré et les racines du polynôme L_j. Calculer $L_j(x_j)$.

.2. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré strictement inférieur à n. On pose :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) L_j(x).$$

a) Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, calculer $Q(x_k)$.
b) Prouver que $P = Q$.

3. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, le point x_k appartient à I.

Montrer qu'il existe un polynôme P_f de degré strictement inférieur à n et un seul satisfaisant aux conditions suivantes : pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$P_f(x_k) = f(x_k).$$

II. Exemples

1. On prend $f(x) = \dfrac{64}{x+7}$; $I = [0, 36]$; $n = 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 25$.

a) Expliciter les polynômes L_1, L_2, L_3.

b) Calculer le polynôme P_f défini dans la question I.3. On vérifiera que le polynôme $64\, P_f$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

2. On prend $g(x) = \dfrac{64}{x^2+7}$; $I = [-6, 6]$; $n = 6$; $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.

a) Sans nouveaux calculs, expliciter le polynôme P_g (défini comme dans la question I.3) à l'aide du polynôme P_f.

b) Étudier la variation de P_g sur l'intervalle $[-6, 6]$.

c) Construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de g et de P_g.

III. Étude d'une suite de polynômes d'interpolation

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x + \alpha^2}$$

où α est un nombre réel strictement positif.

Les notations étant les mêmes que dans la partie I, les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont donnés par :

$$x_k = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 \qquad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

On note P_n le polynôme P_f défini dans la question I.3.

1. *Calcul de* $f(x) - P_n(x)$

On pose : $$A(x) = 1 - (x + \alpha^2)\, P_n(x).$$

a) Vérifier que $A(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, qui admet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme racines.

b) On pose :

$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Montrer qu'il existe un nombre réel c_n tel que, pour tout nombre réel x :

$$A(x) = c_n\, Q_n(x).$$

c) Prouver finalement que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^n\, Q_n(x)}{(x + \alpha^2) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\alpha^2 + x_k)}.$$

2. *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + u^2)\,du.$$

a) Calculer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) Vérifier que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$h'(x) = \pi - 2 \operatorname{Arc\,tan} x.$$

c) Étudier la variation de h. Prouver que h se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

d) Montrer qu'il existe un nombre réel α_0 et un seul tel que $0 < \alpha_0 < 1$ *et*:

$$h(\alpha_0) = 2 \ln 2 - 2.$$

e) Construire la courbe représentative de h.

3. *Détermination d'un équivalent de c_n*

a) Soient F une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$ et a un élément de l'intervalle $[0,1[$. Pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq 1 - a$, on pose :

$$G(t) = \int_a^{a+t} F(u)\,du - t\,F\left(a + \frac{t}{2}\right).$$

(i) Calculer G' en fonction de F et de F'.

(ii) Soit x un élément de l'intervalle $[0, 1 - a]$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction F sur l'intervalle $\left[a + \frac{x}{2}, a + x\right]$, établir que :

$$|G'(x)| \leq \frac{x^2}{8} M \qquad \text{où } M = \sup_{t \in [0,1]} |F''(t)|.$$

(iii) En déduire que, pour tout élément x de l'intervalle $[0, 1 - a]$:

$$|G(x)| \leq \frac{x^3}{24} M.$$

b) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\left| \ln(\alpha^2 + x_k) - n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\alpha^2 + u^2)\,du \right| \leq \frac{1 + \alpha^2}{12\,\alpha^4 n^2}.$$

À cet effet, on appliquera le résultat de la question précédente, avec :

$$F(u) = \ln(\alpha^2 + u^2)\,; \quad a = \frac{k-1}{n}\,; \quad x = \frac{1}{n}.$$

c) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général :

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} (\alpha^2 + x_k).$$

Déduire du *b*) la limite de la suite $(\ln a_n - n\,h(\alpha))_{n \geq 1}$. Obtenir enfin un équivalent simple de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

4. *Étude de la suite $(P_n(1))_{n \geq 1}$*

a) Vérifier que :

$$Q_n(1) = \frac{(4n)!}{2^{4n}\,n^{2n}\,(2n)!}.$$

b) On admet l'équivalent (formule de Stirling) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Déterminer un équivalent simple de la suite $(Q_n(1))_{n \geq 1}$.

c) Déterminer l'ensemble des nombres réels strictement positifs α tels que la suite $(P_n(1))_{n \geq 1}$ converge vers $f(1)$.

Quelques éléments de correction sur HEC 88 (gentil problème à faire sous la douche)

I Interpolation d'une fonction par un polynôme.

Q0.. Notons que si $n=1$, L_1 n'est pas défini !

Q1.. Supposons $n \geq 2$. $j \in [\![1,n]\!]$. L_j est un polynôme de degré $n-1$ (en effet L_j est le produit de $n-1$ polynômes de degré 1). $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}-\{j\}$, $L_j(x_i) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = 0$; $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ sont $n-1$ zéros distincts de L_j qui est de degré $n-1$; les zéros de L_j sont donc $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$.

$L_j(x_j) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{(x_j - x_k)}{x_j - x_k} = 1$.

<u>Remarque</u>.. Si $n=1$, ce qui précède conduit à dire que L_1 est de degré 0 et vaut 1 en x_1, nous poserons donc $L_1 = 1$.

Q2.. <u>a</u> Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $Q(x_k) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) L_j(x_k) \overset{\downarrow}{=} P(x_k) L_k(x_k) \overset{\downarrow}{=} P(x_k)$; $\forall k \in [\![1,n]\!], (P-Q)(x_k) = 0$

$L_j(x_k) = 0$ si $j \neq k$ et 1 si $j = k$

<u>b</u> $\deg P \leq n-1$ et $\deg Q \leq n-1$ (Q est somme de polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$)

Par conséquent : $P-Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ ayant n zéros distincts, $P-Q$ est nul. $P=Q$.

<u>Remarque</u>.. $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur cette base sont : $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$.

Q3.. <u>Unicité</u>.. Supposons que P_f soit solution du problème. $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P_f = \sum_{j=1}^{n} P_f(x_j) L_j = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j$

<u>Existence</u>.. Posons $P_f = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j$. $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (P_f est combinaison linéaire de $(L_1, L_2, \dots, L_n)$) et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P_f(x_k) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j(x_k) = f(x_k) L_k(x_k) = f(x_k)$; P_f est donc solution du problème.

II Exemples.

Q1.. $f(x) = \frac{64}{x+7}$; $I = [0,36]$; $n=3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 25$

<u>a</u> $L_1 = \frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(X-9)(X-25)}{(1-9)(1-25)} = \underline{\frac{1}{192}(X^2-34X+225)}$. De même $\underline{L_2 = -\frac{1}{128}(X^2-26X+25)}$

$\underline{L_3 = \frac{1}{384}(X^2-10X+9)}$.

<u>b</u> $P_f = \frac{64}{1+7}L_1 + \frac{64}{9+7}L_2 + \frac{64}{25+7}L_3 = \frac{64}{8} \times \frac{1}{192}(X^2-34X+225) - \frac{64}{16} \times \frac{1}{128}(X^2-26X+25) + \frac{64}{32}\frac{1}{384}(X^2-10X+9)$

$P_f = \frac{64}{512}\frac{1}{3}(X^2-34X+225) - \frac{64}{512} \times \frac{1}{4}(X^2-26X+25) + \frac{64}{512} \times \frac{1}{24}(X^2-10X+9)$

$P_f = \frac{64}{512 \times 24}(8X^2-272X+1800-6X^2+156X-150+X^2-10X+9) = \frac{1}{192}(3X^2-126X+1659) = \frac{1}{64}(X^2-42X+553)$

$P_f = \frac{1}{64}(X^2-42X+553)$. Notons que $64P_f = X^2-42X+553 \in \mathbb{Z}[X]$ (polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$)

Q2.. $\forall x \in [-6,6]$, $g(x) = f(x^2)$

Q3.. $g(x) = \frac{64}{x^2+7}$; $I = [-6,6]$; $n = 6$; $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.

<u>a</u> $\forall x \in [-6,6]$, $g(x) = f(x^2)$. Posons $P = P_f(X^2)$. $\underline{\deg P = 4 \leq 6-1}$ et $P(x_1) = P_f(25) = f(25) = g(-5) = g(x_1)$

$P(x_2) = P_f(9) = f(9) = g(-3) = g(x_2)$; de même $P(x_3) = g(x_3)$, $P(x_4) = g(x_4)$, $P(x_5) = g(x_5)$ et $P(x_6) = g(x_6)$.

P_8 a toutes les qualités pour être P_g ! $P_g = f_8(X^2) = \frac{1}{64}(X^4 - 42X^2 + 553)$.

b) $P_g' = \frac{1}{64}(4X^3 - 84X) = \frac{1}{16}X(X^2 - 21) = \frac{1}{16}X(X-\sqrt{21})(X+\sqrt{21})$.

x	-6	$-\sqrt{21}$		0		$\sqrt{21}$		6
P_g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
P_g	C $\searrow$	A	$\nearrow$	B	$\searrow$	A	$\nearrow$	C

$B = P_g(0) = \frac{553}{64}$ et $A = P_g(\sqrt{21}) = P_g(-\sqrt{21}) = \frac{112}{64} = \frac{7}{4}$. $C = \frac{337}{64}$

c) Voir peut-être plus loin ! Mais sans doute très loin !

III Etude d'une suite de polynomes d'interpolation.

Q1) a) $A = 1 - (X+\alpha^2)P_n$. $\deg P_n \leq n-1$; $\deg (X+\alpha^2)P_n \leq n$; $\deg A \leq n$.

$A(x_k) = 1 - (x_k+\alpha^2)P_n(x_k) = 1 - (x_k+\alpha^2)f(x_k) = 1-1 = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n racines de A et $\deg A \leq n$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines de A.

b) Ce qui précède montre que : $\exists C_n \in \mathbb{R}$, $A = C_n Q_n$ ($\dots Q_n$ divise A, $\deg Q_n = n$ et $\deg A \leq n$).

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - (x+\alpha^2)P_n(x) = C_n Q_n(x)$

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) - P_n(x) = \frac{C_n Q_n(x)}{x^2+\alpha^2}$ et $C_n Q_n(-\alpha^2) = 1 - (-\alpha^2+\alpha^2)P_n(-\alpha^2) = 1$

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) - P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{(x^2+\alpha^2)Q_n(-\alpha^2)}$. $Q_n(-\alpha^2) = \prod_{k=1}^{n}(-\alpha^2 - x_k) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(\alpha^2+x_k) = \frac{1}{(-1)^n}\prod_{k=1}^{n}(\alpha^2+x_k)$

Finalement : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^n Q_n(x)}{(x^2+\alpha^2)\prod_{k=1}^{n}(\alpha^2+x_k)}$.

Q2) a) Soit $x \in]0,+\infty[$. $h(x) = \int_0^1 \ln(x^2+u^2)\,du = [u\ln(x^2+u^2)]_0^1 - \int_0^1 u\frac{2u}{x^2+u^2}du = \ln(x^2+1) - 2\int_0^1 \frac{u^2}{x^2+u^2}du$

$h(x) = \ln(x^2+1) - 2\int_0^1 \frac{u^2+x^2}{x^2+u^2}du + 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+u^2}du = \ln(x^2+1) - 2 + 2\int_0^1 \frac{du}{\left(\frac{u}{x}\right)^2+1} = \ln(x^2+1) - 2 + \left[2x \operatorname{Arctan}\frac{u}{x}\right]_0^1$

$h(x) = \ln(x^2+1) - 2 + 2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \ln(x^2+1) - 2 + 2x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2x\frac{1}{1+x^2} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) = \pi - 2\operatorname{Arctan} x$ (h est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$)

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\pi - 2\operatorname{Arctan} x > 0$. h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $\hat{h}(x) = \ln(x^2+1) - 2 + 2x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)$. $\hat{h}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la restriction de $\hat{h}$ à $\mathbb{R}_+^*$ est h, h est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement par continuité est $\hat{h}$.
$x \mapsto \ln(x^2+1)$, $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$; $\hat{h}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$

d) h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. h définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\left]\lim_{x\mapsto 0} h(x), \lim_{x\mapsto+\infty} h(x)\right[=]-2,+\infty[$ $\left(\lim_{x\mapsto+\infty} h(x) = \lim_{X\mapsto 0^+}\left[\ln\left(\frac{1}{X^2}+1\right) - 2 + 2\underbrace{\frac{\operatorname{Arctan} X}{X}}_{\to 1}\right] = +\infty\right)$

$2\ln 2 - 2 \in]-2,+\infty[$; $\exists!\, \alpha_0 \in \mathbb{R}_+$, $h(\alpha_0) = 2\ln 2 - 2$

$h(1) = \ln 2 - 2 + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} = 2\ln 2 - 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right) > 2\ln 2 - 2 = h(\alpha_0)$;

Il existe donc α_0 unique, dans $]0,1[$ tel que $h(\alpha_0) = 2\ln 2 - 2$

La machine donne $\alpha_0 \simeq 0{,}525\,524\,915$

Notons que : $\forall x \in]0,\alpha_0[$, $h(x) < 2\ln 2 - 2$ et $\forall x \in]\alpha_0, 1[$, $h(x) > 2\ln 2 - 2$

Q3. a) i) Soit H une primitive de F sur $[0,1]$. $\forall t\in[0,1-a]$, $G(t)=H(a+t)-H(a)-tF(a+\frac{t}{2})$.
Ceci montre que H est dérivable sur $[0,1-a]$ et que : $\forall t\in[0,1-a]$, $G'(t)=H'(a+t)-F(a+\frac{t}{2})-t\times\frac{1}{2}F'(a+\frac{t}{2})$.
$\forall t\in[0,1-a]$, $G'(t)=F(a+t)-F(a+\frac{t}{2})-\frac{t}{2}F'(a+\frac{t}{2})$.

ii) Soit $x\in[0,1-a]$. $F(a+x)=F(a+\frac{x}{2})+\dfrac{a+x-(a+\frac{x}{2})}{1!}F'(a+\frac{x}{2})+\displaystyle\int_{a+\frac{x}{2}}^{a+x}\frac{(a+x-t)^1}{1!}F''(t)\,dt$

$F(a+x)=F(a+\frac{x}{2})+\frac{x}{2}F'(a+\frac{x}{2})+\displaystyle\int_{a+\frac{x}{2}}^{a+x}(a+x-t)F''(t)\,dt$.

$|G'(x)|=|F(a+x)-F(a+\frac{x}{2})-\frac{x}{2}F'(a+\frac{x}{2})|=\left|\displaystyle\int_{a+\frac{x}{2}}^{a+x}(a+x-t)F''(t)dt\right|\leq\displaystyle\int_{a+\frac{x}{2}}^{a+x}(a+x-t)|F''(t)|dt\leq M\displaystyle\int_{a+\frac{x}{2}}^{a+x}(a+x-t)dt=M\times\frac{x^2}{8}$

iii) $\forall t\in[0,1-a]$, $-M\frac{t^2}{8}\leq G'(t)\leq M\frac{t^2}{8}$

$\forall x\in[0,1-a]$, $-\frac{M}{8}\displaystyle\int_0^x t^2dt\leq\int_0^x G'(t)dt\leq\frac{M}{8}\int_0^x t^2dt$. $\forall x\in[0,1-a]$, $-M\frac{x^3}{24}\leq G(x)-G(0)\leq\frac{Mx^3}{24}$

Comme $G(0)=0$: $\forall x\in[0,1-a]$, $|G(x)|\leq\dfrac{Mx^3}{24}$.

b) Posons $\forall u\in[0,1]$, $F(u)=\ln(\alpha^2+u^2)$. F est de classe C^2 sur $[0,1]$. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,n]\!]$

$\frac{k-1}{n}\in[0,1[$ et $\frac{1}{n}\in[0,1-(\frac{k-1}{n})]$. Le résultat précédent donne :

$\left|\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}}F(u)du-\frac{1}{n}F(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{2n})\right|\leq\sup_{t\in[0,1]}|F''(t)|\times\dfrac{1}{24n^3}$. Soit encore :

$\left|F(\frac{2k-1}{n})-n\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}F(u)du\right|\leq\sup_{t\in[0,1]}|F''(t)|\times\dfrac{1}{24n^2}$; $\left|\ln(\alpha^2+(\frac{2k-1}{n})^2)-n\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\ln(\alpha^2+u^2)du\right|\leq\dfrac{1}{24n^2}\sup_{t\in[0,1]}|F''(t)|$

$\forall t\in[0,1]$, $F'(t)=\dfrac{2t}{\alpha^2+t^2}$ et $F''(t)=2\dfrac{\alpha^2-t^2}{(\alpha^2+t^2)^2}$. F'' est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1]$, $F'''(t)=\dfrac{4t(t^2-3\alpha^2)}{(\alpha^2+t^2)^3}$

$\alpha>0$!!

$\forall t\in[0,1]$, $F'''(t)=\dfrac{4t(t+\sqrt3\alpha)(t-\sqrt3\alpha)}{(\alpha^2+t^2)^3}\left(=\dfrac{4t(t+\sqrt3|\alpha|)(t-\sqrt3|\alpha|)}{(\alpha^2+t^2)^3}\right)$. Le signe de $F'''(t)$ sur $[0,1]$ est celui de $t-\sqrt3\,\alpha$. 1er cas.. $\sqrt3\,\alpha\geq1$; $\forall t\in[0,1]$, $F'''(t)\leq0$. F'' décroît de $F''(0)=\frac{2}{\alpha^2}$ à $F''(1)=2\frac{\alpha^2-1}{(\alpha^2+1)^2}$.

$\forall t\in[0,1]$, $|F''(t)|\leq\max\left(\dfrac{2|\alpha^2-1|}{(\alpha^2+1)^2},\dfrac{2}{\alpha^2}\right)=\dfrac{2}{\alpha^2}$ $\left(\dfrac{2(\alpha^2-1)}{(\alpha^2+1)^2}\leq\dfrac{2}{\alpha^2}\right.$ et $\left.-\dfrac{2(\alpha^2-1)}{(\alpha^2+1)^2}\leq\dfrac{2}{\alpha^2}\text{... calculs simples}\right)$

2ème cas.. $0<\sqrt3\alpha<1$

t	0		$\sqrt3\alpha$		1
$F'''(t)$		$-$	0	$+$	
F''	A	$\searrow$	B	$\nearrow$	C

$A=F''(0)=\dfrac{2}{\alpha^2}$, $B=F''(\sqrt3\alpha)=-\dfrac{1}{4\alpha^2}$ et $C=F''(1)=2\dfrac{(\alpha^2-1)}{(\alpha^2+1)^2}$

$\forall t\in[0,1]$, $|F''(t)|\leq\max\left(\dfrac{2}{\alpha^2},\dfrac{1}{4\alpha^2},\dfrac{2(1-\alpha^2)}{(\alpha^2+1)^2}\right)=\dfrac{2}{\alpha^2}$

Dans les deux cas $\forall t\in[0,1]$, $|F''(t)|\leq\dfrac{2}{\alpha^2}$; $\sup_{t\in[0,1]}|F''(t)|\leq\dfrac{2}{\alpha^2}$ (En fait on a égalité !)

Finalement $\left|F(\frac{2k-1}{n})-n\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}F(u)du\right|\leq\dfrac{1}{12\alpha^2n^2}\leq\dfrac{1}{12\alpha^2n^2}\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)=\dfrac{1+\alpha^2}{12\alpha^4n^2}$ cqfd.

Remarque.. On pouvait se dispenser de $\sup_{t\in[0,1]}|F''(t)|$. Il suffisait en fait de montrer que :

$\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{1}{24n^2}\left|2\dfrac{\alpha^2-t^2}{(\alpha^2+t^2)^2}\right|\leq\dfrac{1+\alpha^2}{12\alpha^4n^2}$, c'est à dire $\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{|\alpha^2-t^2|}{(\alpha^2+t^2)^2}\leq\dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^4}$

Or $\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{1}{(\alpha^2+t^2)^2}\leq\dfrac{1}{\alpha^4}$; il suffit donc de montrer que $\forall t\in[0,1]$, $|\alpha^2-t^2|\leq1+\alpha^2$ ou que :

$\forall t\in[0,1]$, $\alpha^4-2\alpha^2t^2+t^4\leq1+\alpha^4+2\alpha^2$, soit encore que : $\forall t\in[0,1]$, $0\leq1-t^4+2\alpha^2(1+t^2)$!

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln a_n - n h(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\alpha^2+x_k^2) - n\int_0^1 \ln(\alpha^2+u^2)\,du = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(\alpha^2+x_k^2) - n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln(\alpha^2+u^2)\,du\right]$

$|\ln(a_n) - nh(\alpha)| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\ln(\alpha^2+x_k^2) - n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\ln(\alpha^2+u^2)\,du\right| \le n\times\frac{1+\alpha^2}{12\alpha^4 n^2} = \frac{1+\alpha^2}{12\alpha^4 n}$.

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}(\ln a_n - nh(\alpha)) = 0$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\alpha^2}{12\alpha^4 n}=0\right)$; donc $0=\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{a_n}{e^{nh(\alpha)}}\right)$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{e^{nh(\alpha)}} = 1$

Finalement : $\underline{\underline{a_n \sim e^{nh(\alpha)}}}$.

Q4 a) $Q_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \left(1-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2n-(2k-1)}{2n}\right)\prod_{k=1}^{n} \frac{2n+(2k-1)}{2n} = \frac{1}{(2n)^n}\times\frac{1}{(2n)^n}\times\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\prod_{j=n+1}^{2n}(2j-1)$

$Q_n(1) = \frac{1}{2^{2n}\times n^{2n}}\prod_{i=1}^{2n}(2i-1) = \frac{1}{2^{2n}\times n^{2n}}\times\frac{(4n)!}{(4n)(4n-2)(4n-4)\times\dots\times 2} = \frac{(4n)!}{2^{2n}\times n^{2n}\times 2^{2n}(2n)!} = \underline{\underline{\frac{(4n)!}{2^{4n}\times n^{2n}\times(2n)!}}}$

« on bouche les trous »

b) $Q_n(1) \sim \sqrt{2\pi\times 4n}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}\times\frac{1}{2^{4n}}\times\frac{1}{n^{2n}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 2n}}\times\left(\frac{e}{2n}\right)^{2n} = \sqrt{2}\times\frac{4^{4n}}{2^{4n}\times 2^{2n}}\times\frac{e^{2n}}{e^{4n}}\times\frac{n^{4n}}{n^{2n}\times n^{2n}}$

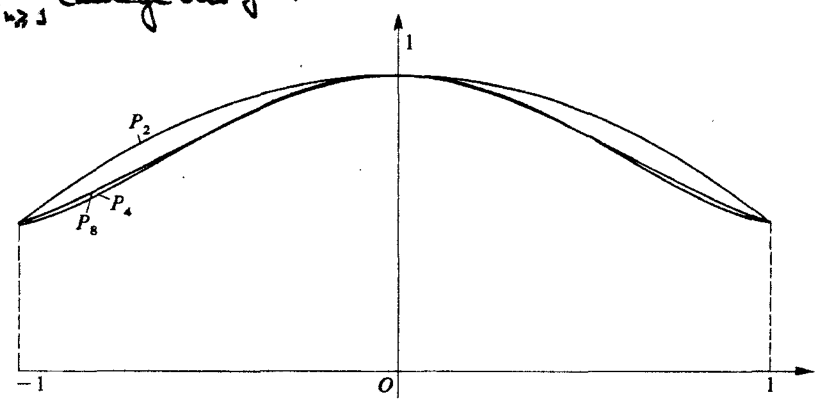
$\underline{\underline{Q_n(1)\sim\sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^{2n}}}$

c) $|f(1)-P_n(1)| = \left|\frac{(-1)^n Q_n(1)}{(1+\alpha^2)\prod_{k=1}^{n}(\alpha^2+x_k^2)}\right| = \frac{1}{1+\alpha^2}\times Q_n(1)\times\frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{1+\alpha^2}\sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^{2n}\frac{1}{e^{nh(\alpha)}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\alpha^2}e^{-2n-nh(\alpha)+2n\ln 2}$

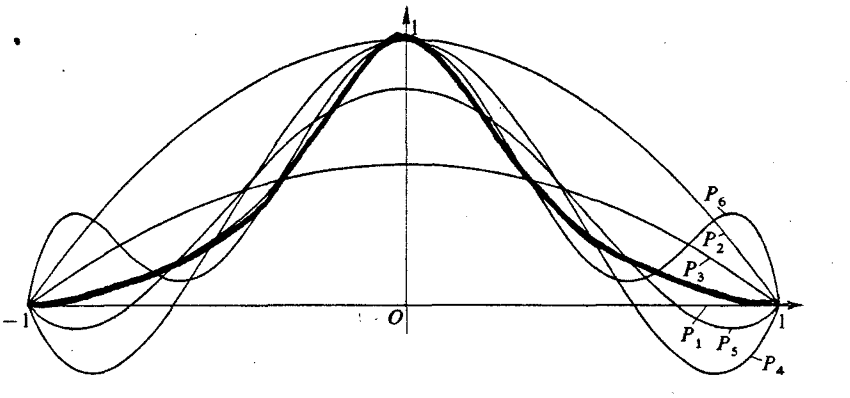
Par conséquent $(P_n(1))_{n\ge1}$ converge vers $f(1)$ si $\left(e^{-2n-nh(\alpha)+2n\ln 2}\right)_{n\ge1}$ converge vers 0 c'est-à-dire si $\lim_{n\to+\infty}\left[-n(2+h(\alpha)-2\ln 2)\right] = -\infty$; soit encore si $2+h(\alpha)-2\ln 2>0$!!

Les variations de h montrent donc que $(P_n(1))_{n\ge1}$ converge vers $f(1)$ si $\alpha>\alpha_0$

Notons partout que si $\alpha<\alpha_0$ alors $(P_n(1))_{n\ge1}$ ne converge pas vers $f(1)$.



⚠ dans cette illustration les points d'interpolation ne sont pas ceux du problème



Cette figure concerne l'interpolation des fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{1+8x^2}$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Les graphes de P_8 et de f sont pratiquement confondus. En revanche, pour la fonction g, les graphes de P_5 et de P_6 approchent très bien g au voisinage de 0, mais il appa raît des oscillations importantes au voisinage des extrémités de l'intervalle (phénomène d Runge).