Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

Direction de l'Enseignement

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ÉCOLE EUROPÉENNE DES AFFAIRES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

Mathématiques II

OPTION : Générale

Samedi 6 mai 1989, de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large .

L'objet du problème est l'étude d'une promenade aléatoire (parties III et IV). Dans les parties I et II on établit des résultats liminaires qui seront utilisés dans la partie III.

PARTIE I

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 des nombres réels. On considère le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur y_1, y_2, y_3, y_4 pour que ce système admette au moins une solution.

2. On suppose que cette condition est satisfaite. Soit a un nombre réel. Exprimer en fonction de y_2, y_3, y_4 l'unique solution $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ vérifiant la relation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a.$$

PARTIE II

On considère une suite réelle (p_n) satisfaisant à la relation de récurrence :

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n) . \tag{1}$$

On lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$m_n = \min(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}) \ ; \quad M_n = \max(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}) .$$

(m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}.)

1. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n).

a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3} et p_{n+4}. En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0.$$

c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :

$$m \leq M.$$

2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n).

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m_n$$
$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m.$$

En appliquant la dernière inégalité à p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}, montrer que :

$$M_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m.$$

b) En déduire que $M \leq m$, puis que $M = m$.

c) Établir la convergence de la suite (p_n).

3. Dans cette question, on étudie numériquement la suite (p_n) vérifiant la relation de récurrence (1) et les conditions initiales :

$$p_0 = 1 \ ; \quad p_1 = \frac{1}{4} \ ; \quad p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \ ; \quad p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} .$$

a) Rédiger un algorithme (en français) permettant de calculer, pour tout nombre entier naturel N, les termes p_0, p_1,..., p_N de la suite (p_n).

b) Utiliser cet algorithme pour donner des valeurs décimales approchées (à la précision de la calculatrice employée) de p_0, p_1,..., p_{10} et encadrer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

PARTIE III

Dans la suite du problème, on étudie la promenade aléatoire d'un jeton sur les quatre cases C_1, C_2, C_3, C_4 suivantes :

C_1	C_2	C_3	C_4

Au cours des instants successifs 0, 1, 2,..., n,..., on y déplace un jeton de la manière suivante :

a) À l'instant 0, le jeton est placé sur C_1.

b) Si, à l'instant n, le jeton est placé sur C_1, on le place à l'instant $n+1$ sur l'une des cases C_1, C_2, C_3, C_4, le choix d'une de ces cases s'effectuant de manière équiprobable (et indépendamment des positions du jeton aux instants antérieurs).

c) Si, à l'instant n, le jeton est placé sur C_i, où $2 \leq i \leq 4$, on le place à l'instant $n+1$ sur la case C_{i-1}.

Pour tout nombre entier naturel n et pour i égal à 1, 2, 3 ou 4, on note désormais :

$Z(n,\ i)$ la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si le jeton est sur la case C_i à l'instant n, et 0 dans le cas contraire ;

$q(n,\ i)$ la probabilité pour que le jeton soit sur la case C_i à l'instant n.

On pose :

$$Q_n = \begin{pmatrix} q(n,\ 1) \\ q(n,\ 2) \\ q(n,\ 3) \\ q(n,\ 4) \end{pmatrix}.$$

1. Dans cette question, on étudie les suites $(q(n,\ i))$, où i est égal à 1, 2, 3 ou 4.

a) Expliciter la matrice A d'ordre 4 telle que, pour tout nombre entier naturel n :

$$Q_{n+1} = A\,Q_n.$$

b) En déduire les relations suivantes :

$$\begin{cases} q(n+1,\ 4) = \dfrac{1}{4}\, q(n,\ 1) \\[2mm] q(n+2,\ 3) = \dfrac{1}{4}\, [q(n,\ 1)+q(n+1,\ 1)] \\[2mm] q(n+3,\ 2) = \dfrac{1}{4}\, [q(n,\ 1)+q(n+1,\ 1)+q(n+2,\ 1)] \\[2mm] q(n+4,\ 1) = \dfrac{1}{4}\, [q(n,\ 1)+q(n+1,\ 1)+q(n+2,\ 1)+q(n+3,\ 1)] \end{cases}$$

c) Calculer $q(0,\ 1)$, $q(1,\ 1)$, $q(2,\ 1)$, $q(3,\ 1)$. Comparer la suite $(q(n,\ 1))$ à la suite définie dans la question **II.3.** En déduire que les quatre suites $(q(n,\ i))$, où i est égal à 1, 2, 3 ou 4, sont convergentes ; exprimer leurs limites en fonction de la limite L de la suite $(q(n,\ 1))$.

d) Calculer $q(n,\ 1)+q(n,\ 2)+q(n,\ 3)+q(n,\ 4)$. En déduire les limites des quatre suites $(q(n,\ i))$ pour i égal à 1, 2, 3 ou 4.

2. Pour tout nombre entier naturel n et pour i égal à 1, 2, 3 ou 4, on pose :

$$Y(n,\ i) = Z(0,\ i) + Z(1,\ i) + \cdots + Z(n,\ i).$$

$Y(n,\ i)$ est donc la variable aléatoire indiquant le nombre de passages du jeton sur la case C_i au cours des instants 0, 1, 2,..., n. On détermine dans cette question le nombre moyen des passages du jeton sur l'une des cases au cours de ces instants, autrement dit les espérances des variables aléatoires $Y(n,\ i)$.

a) Déterminer la somme $Y(n,\ 1)+Y(n,\ 2)+Y(n,\ 3)+Y(n,\ 4)$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$$E_n = \begin{pmatrix} E[Y(n,\ 1)] \\ E[Y(n,\ 2)] \\ E[Y(n,\ 3)] \\ E[Y(n,\ 4)] \end{pmatrix}.$$

Exprimer l'espérance $E[Z(n,\ i)]$ en fonction de $q(n,\ i)$. En déduire que :

$$E_n = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_n.$$

c) Déduire des résultats précédents que :

$$(A - I_4)\ E_n\ = Q_{n+1}\ - Q_0,$$

où I_4 est la matrice identité d'ordre 4, et que :

$$E[Y(n,\ 1)] + E[Y(n,\ 2)] + E[Y(n,\ 3)] + E[Y(n,\ 4)] = n + 1.$$

Déduire des résultats de la partie I l'expression de $E[Y(n,\ i)]$, où i est égal à 1, 2, 3 ou 4, en fonction de $q(n+1,\ j)$, où j est égal à 2, 3 ou 4.

d) Pour i égal à 1, 2, 3 ou 4, expliciter des nombres réels f_i et g_i tels que :

$$E[Y(n,\ i)]\ = f_i\ n + g_i\ + \varepsilon_i(n) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty}\ \varepsilon_i\ (n) = 0.$$

PARTIE IV

On étudie dans cette partie les deux variables aléatoires suivantes :
U, indiquant le premier instant $n \geq 1$ où le jeton se trouve sur la case C_2 ;
V, indiquant le premier instant $n \geq 1$ où le jeton se trouve sur la case C_3.

1. *a*) Calculer les probabilités $P(U = 1)$ et $P(U = 2)$, puis $P(U = n)$ pour $n \geq 3$.

b) Vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) = 1.$$

c) Calculer l'espérance de U.

2. Pour tout nombre entier naturel n et pour i égal à 1, 2 ou 4, on note $\pi(n,\ i)$ la probabilité pour que le jeton soit placé à l'instant n sur la case C_i sans jamais avoir été placé au cours des instants 0, 1, 2,..., n sur la case C_3.

a) Calculer $\pi(0,\ 1)$ et $\pi(1,\ 1)$. Montrer que, pour tout nombre $n \geq 2$:

$$\pi(n,\ 1)\ = \frac{1}{4}[\pi(n-1,\ 1) + \pi(n-2,\ 1)].$$

En déduire la valeur de $\pi(n,\ 1)$ en fonction de n.

b) Calculer $\pi(n,\ 2)$ et $\pi(n,\ 4)$.

c) Calculer la probabilité $P(V = n)$ et l'espérance de V.

En plus

3. On note pour $n \geq 0$, a_n la probabilité pour que le jeton soit à l'instant n en C_1 sans avoir été en C_4.

Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

Trouver une relation entre a_{n+3}, a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

Soit W la var indiquant le premier instant $n \geq 1$ où le jeton se trouve sur la case C_4.

Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} p(W = k) = 1$!

Montrer que $E(W)$ existe et vaut 7.