Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris
Direction de l'Enseignement
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mercredi 10 mai 1989, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

PROBLÈME

Soit k un nombre entier naturel non nul. L'objet du problème est l'étude de la série de terme général $1/p^{2k}$, où $p \geq 1$.

LIMINAIRE

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul p :

$$(0) \qquad \frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right) \leq \frac{1}{p^{2k}}.$$

En déduire la convergence de la série de terme général $1/p^{2k}$ et un majorant simple de sa somme.

Dans la suite, pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$S_{2k}(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{2k}}, \quad R_{2k}(n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} \quad \text{et} \quad S_{2k} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = S_{2k}(n) + R_{2k}(n).$$

Dans la partie I, on traite le cas particulier où $k = 1$ et l'on détermine S_2.
Dans la partie II, on étudie d'abord une suite de polynômes et l'on généralise la méthode de la partie I pour déterminer S_{2k}.

PARTIE I

Dans cette partie, on désigne par n un nombre entier naturel non nul.

1. On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,\ 1[$ par la relation :

FAUX ($x=\frac{1}{2}\ldots$)

$$f_1(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\cot \pi x$$

$\cot \pi x = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$

(où $\cot \pi x = 1/\tan \pi x$).

a) Comparer $f_1(x)$ et $f_1(1-x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.

On prolonge désormais f_1 par continuité en 0 et en 1.

c) Pour tout élément x de $]0,\ 1[$, calculer $f_1'(x)$. Montrer que f_1 est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\ 1]$.

~~*d*) Construire la courbe représentative de f_1.~~

d) Etudier les variations de f_1. Donner l'allure de la courbe représentative de $\mathcal{C}_1$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour toute fonction f de classe C^1 sur $[0,\ 1,]$, il existe un nombre réel strictement positif a tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|\int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x \,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{a}{n}.$$

En déduire la limite de $\int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul p, calculer l'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \cos 2\pi p x \,\mathrm{d}x.$$

4. *a*) Vérifier que, pour tout élément x de l'intervalle $]0,\ 1[$:

$$2\sum_{p=1}^{n} \cos 2\pi p x = \cot \pi x \sin 2\pi n x + \cos 2\pi n x - 1.$$

(On pourra multiplier chacun des deux membres par $\sin \pi x$.)

b) À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\sum_{p=1}^{n} I_p = \frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x) \sin 2\pi n x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \cos 2\pi n x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

c) En faisant tendre n vers $+\infty$, déduire de l'égalité précédente que :

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On se propose dans cette question de comparer $S_2(n)$, $S_2(n) + 1/n$ et $\pi^2/6$.

a) Écrire un algorithme de calcul de $S_2(n)$ lorsque l'entier n est donné. Comparer les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de $S_2(n)$, $S_2(n) + 1/n$ et $\pi^2/6$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1\ 000$.

b) À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq S_2(n) + \frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{6} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Expliquer alors les résultats numériques précédents.

PARTIE II

A) Étude d'une suite de polynômes

On se propose d'étudier les suites (Q_n) de polynômes à coefficients réels satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &(1) & Q_0 &= 1 \\ &(2) & \forall n \geq 1, \quad Q_n' &= Q_{n-1} \\ &(3) & \forall n \geq 2, \quad Q_n(1) &= Q_n(0). \end{aligned}$$

1. *a)* Établir qu'il existe une suite (r_n) de nombres rationnels et une seule telle que :

$$r_0 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2 \ : \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)\,!} = 0.$$

Expliciter r_1, r_2, r_3 et r_4 sous forme de fractions irréductibles.

On considère désormais la suite (P_n) de polynômes définie par :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n-j)\,!} X^{n-j}.$$

b) Montrer que la suite (P_n) vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Expliciter P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. On considère une suite (Q_n) de polynômes vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).

a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_j(0)}{(n-j)\,!} X^{n-j}.$$

b) Montrer que la suite $(Q_n(0))$ vérifie :

$$Q_0(0) = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2 \ : \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(0)}{(n-j)\,!} = 0.$$

c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $Q_n = P_n$.

3. *a)* En considérant la suite de polynômes $((-1)^n P_n(1-X))$, établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X).$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel non nul k, $r_{2k+1} = 0$. Calculer r_6 et r_8. On pourra vérifier que :

$$r_8 = -\frac{1}{1\,209\,600}.$$

B) Expression de S_{2k}

1. Pour tout nombre entier naturel $k \geq 2$, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0,\ 1[$ par la relation :

$$f_k(x) = (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cot \pi x.$$

a) Comparer $f_k(x)$ et $f_k(1-x)$.

b) Déterminer les limites de f_k aux bornes de son ensemble de définition.
On prolonge désormais f_k par continuité en 0 et en 1.

c) Prouver que f_k est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\ 1]$.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on considère les intégrales :

$$J_p(k) = \int_0^1 P_{2k}(x) \cos 2\pi px \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_p(k) = \int_0^1 (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cos 2\pi px \, \mathrm{d}x.$$

a) Calculer $J_p(1)$.
b) Exprimer $J_p(k+1)$ en fonction de $J_p(k)$. En déduire $J_p(k)$ puis $I_p(k)$.

3. *a*) En calculant de deux façons la somme :

$$I_1(k) + I_2(k) + \cdots + I_n(k),$$

puis en faisant tendre n vers $+\infty$, exprimer S_{2k} en fonction de r_{2k}.
b) Retrouver ainsi l'expression de S_2 ; calculer S_4, S_6 et S_8.

4. À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq S_{2k}(n) + \frac{1}{(2k-1)\, n^{2k-1}} - S_{2k} \leq \frac{1}{n^{2k}}.$$

En déduire des valeurs approchées à 10^{-6} près de S_4, S_6 et S_8 ; les comparer aux valeurs exactes obtenues précédemment.