CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 14 mai 1991, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

LIMINAIRE

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Pour tout nombre réel strictement positif x, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$$

puis celle de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$$

L'objet de la partie I est l'étude de la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$$

L'objet de la partie II est l'étude d'une méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par la relation :

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$$

PARTIE I

1. *Cas particulier $a = 0$*

a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.

b) Interpréter la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, f_0$ en termes de probabilités.

En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *Propriétés générales de f_a*

a) Montrer que la fonction f_a est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$.
Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0,\ +\infty[$.

c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. *Étude du cas $a > 0$*

a) Montrer que f_a est de classe C^1 sur $[0,\ +\infty[$. Calculer $f_a'(0)$.

b) Étudier la variation de la fonction f_a'.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

4. *Étude du cas $-1 < a < 0$*

a) Montrer que la fonction f_a est continue sur $[0,\ +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que la fonction f_a est convexe.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

5. *Étude de f_a au voisinage de $+\infty$ ($a > -1$)*

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f_a(x) = x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} + (a-1) \int_x^{+\infty} t^{a-2}\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant convergente.

b) En déduire le signe de :

$$f_a(x) - x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

selon les valeurs de a.

c) Établir que pour $x > 0$ et pour $a > -1$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq \frac{|a-1|}{x^2}\, f_a(x)$$

(On pourra utiliser la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[x,\ +\infty[$.)

d) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Application

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\, \mathrm{d}x$.

À l'aide d'une intégration par partie, justifier l'égalité :

$$f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x$$

e) Déduire également de la question *c*) que si $-1 < a \leq 1$ et $x > 0$:

$$(1) \qquad \left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq 2\ x^{a-3}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $a > -1$, on pose :

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

Pour tout nombre réel strictement positif x, on écrit $\varphi(a)$ sous la forme :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x) \qquad \text{avec} \qquad g_a(x) = \int_0^x t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

1. *Relation fonctionnelle vérifiée par* φ

a) Établir l'égalité :

$$(2) \qquad \varphi(a+2) = (a+1)\ \varphi(a)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a+2\ n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

2. *Développement en série de* $g_a(x)$

Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel t positif ou nul, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{t^{2k+a}}{2^k\ k\ !}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0,\ \dfrac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}$.

En déduire le signe de $t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t)$ selon les valeurs de n. En conclure que, pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout couple $(p,\ q)$ de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$$

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left| t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t) \right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n\ n\ !}$$

(On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

c) En conclure que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel strictement positif x :

$$(3) \qquad \left| g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n\ n\ !\ (2\ n+a+1)}$$

Justifier l'écriture :

$$(4) \qquad g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

3. *Méthode d'approximation de $\varphi(a)$*

On suppose désormais que $-1 < a \leq 1$. (On remarque que, grâce à l'égalité (2), on peut toujours se ramener à ce cas.)

On écrit :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$$

Grâce à l'inégalité (1), on choisit une valeur de x pour laquelle $f_a(x)$ est suffisamment petit. Le nombre x étant ainsi fixé, on approche $g_a(x)$ par une somme partielle de la série (4) :

$$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

a) Déterminer le plus petit des nombres entiers naturels p tels que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$2\ p^{a-3}\ \mathrm{e}^{-p^2/2} \leq 10^{-5}$$

b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour $x = 5$ et pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq 10^{-5}$$

c) On prend donc désormais $x = 5$. Pour $a \in]-1,\ 1]$ et pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k. Mettre en place un algorithme de calcul de u_n pour des valeurs données de n et de a.

d) Grâce à l'inégalité (3), déterminer un nombre entier naturel n tel que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq 10^{-5}$$

e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n, d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} près lorsque a est donné dans l'intervalle $]-1,\ 1]$?