CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 14 mai 1991, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

LIMINAIRE

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Pour tout nombre réel strictement positif x, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

puis celle de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

L'objet de la partie I est l'étude de la fonction f_a définie sur $[0,\ +\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

L'objet de la partie II est l'étude d'une méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par la relation :

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

PARTIE I

1. *Cas particulier* $a = 0$

a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.

b) Interpréter la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, f_0$ en termes de probabilités.
En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *Propriétés générales de* f_a

a) Montrer que la fonction f_a est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$.
Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0,\ +\infty[$.

c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. *Étude du cas* $a > 0$

a) Montrer que f_a est de classe C^1 sur $[0,\ +\infty[$. Calculer $f_a'(0)$.

b) Étudier la variation de la fonction f_a'.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

4. *Étude du cas* $-1 < a < 0$

a) Montrer que la fonction f_a est continue sur $[0,\ +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que la fonction f_a est convexe.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

5. *Étude de* f_a *au voisinage de* $+\infty$ $(a > -1)$

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f_a(x) = x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} + (a-1) \int_x^{+\infty} t^{a-2}\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant convergente.

b) En déduire le signe de :

$$f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

selon les valeurs de a.

c) Établir que pour $x > 0$ et pour $a > -1$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq \frac{|a-1|}{x^2}\ f_a(x)$$

(On pourra utiliser la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[x,\ +\infty[$.)

d) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Application

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x$.

À l'aide d'une intégration par partie, justifier l'égalité :

$$f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x$$

e) Déduire également de la question *c*) que si $-1 < a \leq 1$ et $x > 0$:

$$(1) \qquad \left| f_a(x) - x^{a-1}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq 2\ x^{a-3}\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $a > -1$, on pose :

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

Pour tout nombre réel strictement positif x, on écrit $\varphi(a)$ sous la forme :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x) \qquad \text{avec} \qquad g_a(x) = \int_0^x t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t$$

1. *Relation fonctionnelle vérifiée par* φ

a) Établir l'égalité :

$$(2) \qquad \varphi(a+2) = (a+1)\ \varphi(a)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a + 2\ n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

2. *Développement en série de* $g_a(x)$

Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel t positif ou nul, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{t^{2k+a}}{2^k\ k\ !}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0,\ \dfrac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}$.

En déduire le signe de $t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t)$ selon les valeurs de n. En conclure que, pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout couple $(p,\ q)$ de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$$

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left| t^a\ \mathrm{e}^{-t^2/2} - S_n(t) \right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n\ n\ !}$$

(On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

c) En conclure que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel strictement positif x :

$$(3) \qquad \left| g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k \; k \,! \; (2\,k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n \; n \,! \; (2\,n+a+1)}$$

Justifier l'écriture :

$$(4) \qquad g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k \; k \,! \; (2\,k+a+1)}$$

3. *Méthode d'approximation de* $\varphi(a)$

On suppose désormais que $-1 < a \leq 1$. (On remarque que, grâce à l'égalité (2), on peut toujours se ramener à ce cas.)

On écrit :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$$

Grâce à l'inégalité (1), on choisit une valeur de x pour laquelle $f_a(x)$ est suffisamment petit. Le nombre x étant ainsi fixé, on approche $g_a(x)$ par une somme partielle de la série (4) :

$$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k \; k \,! \; (2\,k+a+1)}$$

a) Déterminer le plus petit des nombres entiers naturels p tels que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$2\, p^{a-3}\, \mathrm{e}^{-p^2/2} \leq 10^{-5}$$

b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour $x = 5$ et pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \right| \leq 10^{-5}$$

c) On prend donc désormais $x = 5$. Pour $a \in]-1,\ 1]$ et pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k \; k \,! \; (2\,k+a+1)}$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k. Mettre en place un algorithme de calcul de u_n pour des valeurs données de n et de a.

d) Grâce à l'inégalité (3), déterminer un nombre entier naturel n tel que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq 10^{-5}$$

e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n, d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} près lorsque a est donné dans l'intervalle $]-1,\ 1]$?

LIMINAIRE

<u>$a \in \mathbb{R}$ et $a > -1$</u>. Notons que $t \mapsto t^a e^{-t^2/2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$; en particulier elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Fixons x dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim_{t \to +\infty} t^2 (t^a e^{-t^2/2}) = 0$; par conséquent : $\exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in [A, +\infty[,\ 0 \leq t^2 (t^a e^{-t^2/2}) \leq 1$.

Donc $\forall t \in [A, +\infty[,\quad 0 \leq t^a e^{-t^2/2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc $\int_A^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ aussi ; $\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ encore !

La convergence de $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ résultera donc de la convergence de $\int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt$.

▲ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^a e^{-t^2/2} \geq 0$ et $t^a e^{-t^2/2} \underset{0}{\sim} t^a = \frac{1}{t^{-a}}$.

$-a < 1$ car $a > -1$ donc $\int_0^x \frac{dt}{t^{-a}}$ converge ; par conséquent : $\int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt$ converge.

Finalement
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ converge. (← ceci vaut en fait pour tout $a \in \mathbb{R}$ mais pas cela)
- $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ converge.

▲ Voilà à la fin une démonstration conforme au programme

PARTIE I

Q1.. <u>$a = 0$</u>. <u>a)</u> f_0 est définie sur $\mathbb{R}$ si $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ converge pour tout réel x.

Le préliminaire montre que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ existe ($x = 1$ et $a = 0$ ...), de plus pour tout réel x, $\int_x^1 e^{-t^2/2} dt$ existe ; par conséquent $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ converge pour tout réel x.

Par conséquent : "$D_{f_0} = \mathbb{R}$." (f_0 est en "fait" (sic) définie sur $\mathbb{R}$).

<u>b)</u> Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.

Soit X une var suivant une loi normale centrée réduite.

φ_0 est une densité de X.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $p(X \geq x) = 1 - p(X < x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t) dt = \int_x^{+\infty} \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0(x) = p(X \geq x) = 1 - F_X(x)$ (F_X étant la fonction de répartition de X).

Donc $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0(0) = p(X \geq 0) = \frac{1}{2}$; $\underline{\underline{f_0(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}}$.

$\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2\pi}(1 - F_X(x)) = \sqrt{2\pi}(1-1) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = \sqrt{2\pi}(1-0) = \sqrt{2\pi}$

Donc $f_0(0) = \sqrt{\pi/2}$, $\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = \sqrt{2\pi}$

Q2 Propriétés générales de f_a. ($a > -1$ ← oublié dans le texte à ce niveau).

a) $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_a(x) = \int_1^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt - \int_1^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$

$x \mapsto \int_1^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $t \mapsto t^a e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a'(x) = 0 - x^a e^{-x^2/2}$

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}}$

f_a' est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (faut-il le montrer ? En toute rigueur oui, mais vu la longueur de l'épreuve ... non)
f_a' étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, f_a aussi.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a''(x) = \left[-a x^{a-1} + x^{a+1}\right] e^{-x^2/2} = \underline{x^{a-1}(x^2 - a)\, e^{-x^2/2}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a'(x) < 0$. f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

c) $\int_1^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ converge ; en particulier $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt = 0$

Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0}$.

Q3 Etude du cas $a > 0$.

a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_a(t) = t^a e^{-t^2/2}$ et $\varphi_a(0) = 0$.

φ_a est clairement continue sur $[0,+\infty[$ (... $\lim_{t\to 0} t^a e^{-t^2/2} = 0$ car $a > 0$)

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt = \int_x^{+\infty} \varphi_a(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \varphi_a(t)\,dt - \int_1^x \varphi_a(t)\,dt$

φ_a étant continue sur $[0,+\infty[$, f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+$; de plus $f_a' = -\varphi_a$.
Par conséquent f_a' est continue sur $[0,+\infty[$.
Finalement f_a est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

$f_a'(0) = -\varphi_a(0) = \underline{0}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}$; f_a' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais pas nécessairement en 0)

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a''(x) = x^{a-1}(x^2 - a)\, e^{-x^2/2}$. Le signe de f_a'' sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de $x \mapsto x - \sqrt{a}$

x	0		$\sqrt{a}$	
$f_a''(x)$	||	$-$	0	$+$
$f_a'(x)$		↘		↗

Remarque.. f_a est convexe sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ et concave sur $[0, \sqrt{a}]$, le point de $\mathcal{C}_{f_a}$ d'abscisse $\sqrt{a}$ est un point d'inflexion.

c) voir p 3 (Q4 c)

Q4 Etude du cas $-1 < a < 0$.

a) $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}dt$ converge donc $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}dt = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}dt$;

par conséquent : $\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = f_a(0)$; f_a est continue en 0.

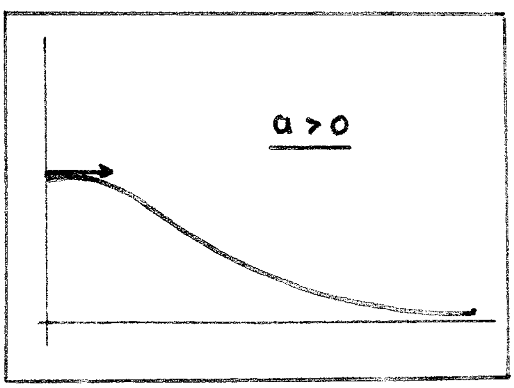
Nous avons vu dans Q2 que f_a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

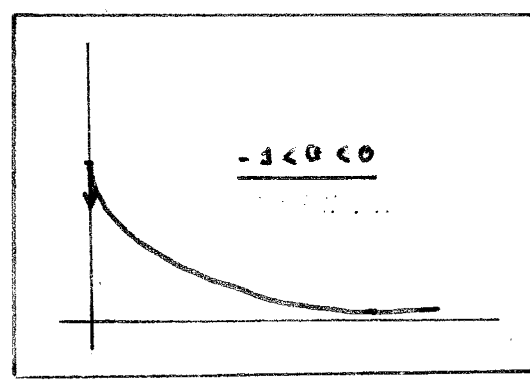
Finalement f_a est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}$ donc $\lim_{x\to 0^+} f_a'(x) = -\infty$ $(a<0)$; par conséquent : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x-0} = -\infty$ ("théorème du prolongement de la dérivée").

Donc f_a n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une demi tangente "verticale".

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a''(x) = (x^2 - a) e^{-x^2/2} x^{a-1} > 0$; f_a étant continue sur $\mathbb{R}_+$, f_a est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.





Q5 Etude de f_a au voisinage de $+\infty$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_x^A t^a e^{-t^2/2}dt = \int_x^A \underbrace{(-t^{a-1})}_{u}\underbrace{(-te^{-t^2/2})}_{v'}dt = \left[-t^{a-1}e^{-t^2/2}\right]_x^A - \int_x^A -(a-1)t^{a-2}e^{-t^2/2}dt$$

$$\int_x^A t^a e^{-t^2/2}dt = -A^{a-1}e^{-A^2/2} + x^{a-1}e^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^A t^{a-2}e^{-t^2/2}dt$$

$\lim_{A\to+\infty}(A^{a-1}e^{-A^2/2}) = 0$; donc $f_a(x) = x^{a-1}e^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}dt$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = x^{a-1}e^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}dt$$

Remarque.. L'existence de $\lim_{A\to+\infty}(A^{a-1}e^{-A^2/2})$ et sa "finitude" montre que $\int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2}dt$ est de même nature que $\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}dt$ donc convergente (... au moins pour $a \neq 1$!)

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^{a-2} e^{-t^2/2} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{+\infty} t^{a-2} e^{-t^2/2} > 0$.

$f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}$ est donc du signe de $a-1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $a = 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} = 0$

Si $a > 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} > 0$

Si $a < 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} < 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| = |\int_x^{+\infty} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt| |a-1| = \int_x^{+\infty} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt \times |a-1|$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in [x, +\infty[$, $t^{a-2} e^{-t^2/2} = \frac{1}{t^2} t^a e^{-t^2/2} \leq \frac{1}{x^2} t^a e^{-t^2/2}$

$\underline{\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt \text{ étant convergente}}$: $\int_x^{+\infty} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{x^2} f_a(x)$

Finalement : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; |f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq \frac{|a-1|}{x^2} f_a(x).}$

d) Ce qui précède donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|1 - \frac{x^{a-1} e^{-x^2/2}}{f_a(x)}\right| \leq \frac{|a-1|}{x^2}$ (division par $f_a(x) > 0$!)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{|a-1|}{x^2} = 0$; par conséquent, "par encadrement", $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{a-1} e^{-x^2/2}}{f_a(x)} = 1$

Donc $\underline{f_a(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{a-1} e^{-x^2/2}}$.

<u>Application</u>.- f_a est continue et positive sur $[0, +\infty[$; en particulier f_a est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. La convergence de $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$ résulte donc de la convergence de $\int_1^{+\infty} f_a(x) dx$ or $\forall x \in [1, +\infty[$, $f_a(x) \geq 0$, $f_a(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{a-1} e^{-x^2/2}$ et $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x^2/2} dx$ converge (pour $a > 0$ voir liminaire et pour $-1 < a \leq 0$ même démonstration que le cas précédent)

Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

$\int_\varepsilon^A f_a(x) dx = [x f_a(x)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A x f_a'(x) dx$ (f_a est de classe C^1 sur $\underline{\underline{\mathbb{R}_+^*}}$).

$\int_\varepsilon^A f_a(x) dx = A f_a(A) - \varepsilon f_a(\varepsilon) - \int_\varepsilon^A x(-x^a e^{-x^2/2}) dx = A f_a(A) - \varepsilon f_a(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A x^{a+1} e^{-x^2/2} dx$

f_a est continue en 0 donc $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon f_a(\varepsilon) = 0$. $A f_a(A) \underset{+\infty}{\sim} A A^{a-1} e^{-A^2/2} = A^a e^{-A^2/2}$ donc $\lim_{A \to +\infty} A f_a(A) = 0$

Par conséquent : $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx = \int_0^{+\infty} x^{a+1} e^{-x^2/2} dx = f_{a+1}(0)$. $\underline{\underline{f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x) dx}}$.

e) $-1 < a \leq 1$; $a - 1 \leq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \leq 0$

$|a-1| \leq 2$ car $-1 < a \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq \frac{|a-1|}{x^2} f_a(x) \leq \frac{|a-1|}{x^2} x^{a-1} e^{-x^2/2} = |a-1| x^{a-3} e^{-x^2/2} \leq 2 x^{a-3} e^{-x^2/2}$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq 2 x^{a-3} e^{-x^2/2}$

PARTIE II Q1 Relation fonctionnelle vérifiée par φ.

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_{a+2}(x) = x^{a+1} e^{-x^2/2} + (a+1)\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ (I Q5 a))

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_{a+2}(x) = x^{a+1} e^{-x^2/2} + (a+1) f_a(x)$.

$\lim_{x\to 0}\left(x^{a+1} e^{-x^2/2}\right) = 0$ $(a+1>0)$ et f_a et f_{a+2} sont continues en 0. En passant à la limite en 0 sur la relation précédente on obtient : $f_{a+2}(0) = (a+1) f_a(0)$, c'est à dire :

$\underline{\underline{\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)}}$.

b) Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(a+2n) = \prod_{k=0}^{n-1}(a+2k+1)\ \varphi(a)$

$\varphi(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\varphi(1) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2/2}\,dt \,"="\, \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^{+\infty} \,"="\, 1$ (en toute rigueur $\int_0^A \cdots$ et passage à la limite)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(2n) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\,\varphi(0) \underset{\text{bien connu}}{\uparrow}= \frac{(2n)!}{2^n n!}\varphi(0) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; ceci vaut encore pour $n=0$. Finalement :

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(2n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)\ \varphi(1) = 2^n n!\,\varphi(1) = 2^n n!$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(2n+1) = 2^n n!$; ceci vaut encore pour $n=0$; finalement :

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(2n+1) = 2^n n!}}$

[Attaque pour $t=0$ la définition de $S_n(t)$ par problème ! ($k=0$ et $0<0$)

Q2 Développement en série de $g_a(x)$.

a) $h : u \mapsto e^{-u}$ est de classe C^∞ sur $[0, t^2/2]$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}(0) = (-1)^k$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $h(t^2/2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t^2/2-0)^k}{k!} h^{(k)}(0) + \int_0^{t^2/2} \frac{(t^2/2-u)^n}{n!} h^{(n+1)}(u)\,du$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-t^2/2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{2^k k!}(-1)^k + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^{t^2/2}(t^2/2-u)^n e^{-u}\,du$. Supposons $\underline{\underline{t>0}}$

(Et non pas simplement $t \geqslant 0$)

$t^a e^{-t^2/2} = S_n(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} t^a \int_0^{t^2/2}(t^2/2-u)^n e^{-u}\,du$

$t^a e^{-t^2/2} - S_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} t^a \int_0^{t^2/2}(t^2/2-u)^n e^{-u}\,du$.

$\forall u \in [0, t^2/2]$, $(t^2/2-u)^n e^{-u} \geq 0$ donc $t^a \displaystyle\int_0^{t^2/2} (t^2/2-u)^n e^{-u}\,du \geq 0$.

Le signe de $t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)$ est donc celui de $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$ ou celui de $(-1)^{n+1}$.

Par conséquent si n est pair : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^a e^{-t^2/2} \leq S_n(t)$;

si n est impair : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^a e^{-t^2/2} \geq S_n(t)$.

Clairement : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $S_{2p+1}(t) \leq t^a e^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| = \frac{t^a}{n!}\int_0^{t^2/2} (t^2/2-u)^n e^{-u}\,du \leq \frac{t^a}{n!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n \int_0^{t^2/2} e^{-u}\,du = \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}\left[-e^{-u}\right]_0^{t^2/2}$$

$$|t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}(1-e^{-t^2/2}) \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| \leq \dfrac{t^{2n+a}}{2^n n!}$; les spécialistes des séries alternées rient !

Remarque : on pouvait encore utiliser a) "+ 2 cas" pour obtenir cette inégalité !!

c) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon \in]0, x[$

$$\left|\int_\varepsilon^x t^a e^{-t^2/2}\,dt - \int_\varepsilon^x S_n(t)\,dt\right| \leq \int_\varepsilon^x |t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)|\,dt \leq \int_\varepsilon^x \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}\,dt = \left[\frac{t^{2n+a+1}}{(2n+a+1)\,2^n n!}\right]_\varepsilon^x$$

$$\left|\int_\varepsilon^x t^a e^{-t^2/2}\,dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k k!}\left[\frac{1}{2k+a+1}\,t^{2k+a+1}\right]_\varepsilon^x\right| \leq \frac{x^{2n+a+1} - \varepsilon^{2n+a+1}}{(2n+a+1)\,2^n n!}$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient :

$$\left|g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k k!}\,\frac{x^{2k+a+1}}{2k+a+1}\right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n!\,(2n+a+1)}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{y^n}{n!} = 0$ (... la série de terme général $\dfrac{y^n}{n!}$ converge) ; donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = 0$

comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{a+1}}{2^n(2n+a+1)} = 0$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n!\,(2n+a+1)} = 0$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!\,(2k+a+1)} = g_a(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!\,(2k+a+1)}$

Q3) Méthode d'approximation de $\varphi(a)$.

a) $\forall a \in]-1,1]$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $2p^{a-1}e^{-p^2/2} \leq 2p^{-2}e^{-p^2/2} = \dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2}$

Nous faut déterminer le plus petit p tel que : $\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} \leq 10^{-5}$

La suite $\left(\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2}\right)_{p\geq 1}$ est strictement décroissante comme produit de deux suites strictement décroissantes et positives ; de plus elle converge vers 0 ; par conséquent $\exists!\, p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$\forall p \in [\![1, p_0[\![$, $\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} > 10^{-5}$ et $\forall p \in [\![p_0, +\infty[\![$, $\dfrac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} \leq 10^{-5}$.

$$\frac{e^{-p^2/2}}{p^2/2} \simeq \begin{cases} 4{,}19 \times 10^{-5} & \text{pour } p=4 \\ 2{,}98 \times 10^{-5} & \text{pour } p=5 \end{cases} \quad ; \text{ donc } p_0 = 5$$

5 est le plus petit entier p tel que : $\forall a \in]-1,1]$, $2p^{a-1}e^{-p^2/2} \leq 10^{-5}$.

b) $a \in]-1,1]$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq 2x^{a-3}e^{-x^2/2}$

Pour $x=5$: $|f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq 2 \cdot 5^{a-3} e^{-5^2/2} \leq 10^{-5}$

Pour $x=5$: $|f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq 10^{-5}$

c) $x=5$ et $a \in]-1,1]$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{5^{2k+2}}{2^{k+1}(k+1)!\,(2k+2+a+1)} \times \frac{2^k k!\,(2k+a+1)}{5^{2k}} = \frac{25\,(2k+a+1)}{2(k+1)(2k+a+3)}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = 12{,}5\, \frac{2k+a+1}{(k+1)(2k+a+3)}\, u_k = 12{,}5 \times \frac{1}{k+1} \times \left[1 - \frac{2}{2k+a+3}\right] u_k.$$

Notons que $u_0 = \dfrac{1}{a+1}$.

Calculer u_k n'a strictement aucun intérêt. Ce qui importe c'est de savoir calculer $S_n(5)$ ou encore $S_n(5) - 5^{a-1}e^{-5^2/2}$.

Voir donc à la fin

d) $a \in]-1,1]$. Version 2.. Version rapide.

$\left\{\begin{array}{l} 2n+a+1 \leq 2n+1+1 = 2(n+1) \\ 2n+a+1 > 2n \end{array}\right.$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $$|f_a(5) - S_n(5)| \leq \frac{5^{2n+a+1}}{2^n n!\,(2n+a+1)} \leq \frac{5^{2(n+1)}}{2^n n!\,(2n)} = \frac{5^{2(n+1)}}{2^{n+1} \times n \times n!} = \frac{(12{,}5)^{n+1}}{n \times n!}$$

Un programme simple montre que le plus petit entier n tel que : $\dfrac{(12{,}5)^{n+1}}{n \times n!} \leq 10^{-5}$ est **41**... et pas 39 Leboeuf !

Version 2.- Davantage pour le même résultat.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $\forall a\in]-1,1]$, $f(a)=\dfrac{5^a}{2n+a+1}$

f est dérivable sur $]-1,1]$ et $\forall a\in]-1,1]$, $f'(a)=\dfrac{1}{(2n+a+1)^2}\left[\ln 5\times 5^a\times(2n+a+1)-5^a\right]$

$\forall a\in]-1,1]$, $f'(a)=\dfrac{5^a\ln 5}{(2n+a+1)^2}\left[2n+a+1-\dfrac{1}{\ln 5}\right]>0$ $\quad\left(\dfrac{1}{\ln 5}\simeq 0{,}62\ ,\ a+1>0 \text{ et } n\geq 1\right)$

f est donc croissante sur $]-1,1]$. $\forall a\in]-1,1]$, $\dfrac{5^a}{2n+a+1}\leq\dfrac{5}{2n+2}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|g_a(5)-A_n(5)|\leq\dfrac{5^{2n+a+1}}{2^n n!\,(2n+a+1)}=\dfrac{5^{2n+1}}{2^n n!}f(a)\leq\dfrac{5^{2n+1}}{2^n n!}\times\dfrac{5}{2n+2}=\dfrac{5^{2(n+1)}}{2^{n+1}(n+1)!}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|g_a(5)-A_n(5)|\leq\dfrac{(12{,}5)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad\left(\text{au lieu de } \dfrac{(12{,}5)^{n+1}}{n\times n!}\right)$

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $t_n=\dfrac{(12{,}5)^{n+1}}{(n+1)!}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}=\dfrac{12{,}5}{n+2}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{12{,}5}{n+2}<1\iff n>10{,}5$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{12{,}5}{n+2}>1\iff n<10{,}5$

Par conséquent $(t_n)_{n\in[\![1,11]\!]}$ est strictement croissante et $(t_n)_{n\geq 11}$ est décroissante strictement

$\forall n\in[\![1,11]\!]$, $t_n\geq t_1=78{,}125$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$.

Par conséquent : $\exists!\,n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![1,n_0-1]\!]$, $t_n>10^{-5}$ et $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $t_n\leq 10^{-5}$

Notons que $n_0>11$!

$t_n\simeq\begin{cases}2{,}8\times10^{-5} \text{ pour } n=40\\ 8{,}3\times10^{-6} \text{ pour } n=41\end{cases}$

Donc $|g_a(5)-A_n(5)|\leq 10^{-5}$ pour tout $a\in]-1,1]$ dès que $n\geq 41$.

e) oui ! Soit $a\in]-1,1]$ $x=5$ et $n=41$.

$|\varphi(a)-x^a e^{-x^2/2}-A_n(x)|=|f_a(x)+g_a(x)-x^a e^{-x^2/2}-A_n(x)|\leq|f_a(x)-x^a e^{-x^2/2}|+|g_a(x)-A_n(x)|$

$|\varphi(a)-x^a e^{-x^2/2}-A_n(x)|\leq 10^{-5}+10^{-5}=2\times10^{-5}$

Pour $a\in]-1,1]$, $x=5$ et $n=41$, $x^a e^{-x^2/2}-A_n(x)$ est une valeur approchée à 10^{-5} près de $\varphi(a)$.

Donnons maintenant un programme permettant pour $a\in]-1,1]$ d'obtenir numériquement $\varphi(a)$ à 10^{-E} près.

Rappelons que : $\forall a \in]-1,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq 2x^{a-3} e^{-x^2/2}$

et que : $\forall a \in]-1,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|g_a(x) - s_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}$.

La 1ère étape consiste à calculer x entier tel que : $2x^{a-3}e^{-x^2/2} < \dfrac{10^{-p}}{2}$

La 2ième étape consiste à calculer $s_n(x)$ jusqu'à ce que : $\dfrac{x^{2n+a+1}}{2^n n!(2n+a+1)} < \dfrac{10^{-p}}{2}$

On affiche pour finir $s_n(x) + x^{a-1}e^{-x^2/2}$. **En CASIO 7000G.**

```
"A"?→A:"P"?→P: (10 x^y(-P))÷2 →Z:0→X
Lbl 0: X+1→X: 2 x X x^y (A-3) x e(-X²÷2) ≥ Z ⇒ Goto 0: X ◢
X x^y (A+1) ÷ (A+1) → U: U → S: 0 → K
Lb 1
K+1→K: -X² U (2K+A-1) ÷ 2 ÷ K ÷ (2K+A+1) → U: S+U → S: Abs(U) ≥ Z ⇒ Goto 1: K ◢
S+ (X x^y (A-1)) e (-X²÷2) ◢
```

les résultats !

$a = 1$

$\varphi(a) = 1$

P = 3	X = 4	N = 26	1,000 049 646	
P = 4	X = 4	N = 28	1,000 003 705	
P = 5	X = 5	N = 42	1,000 000 508	
P = 6	X = 5	N = 44	1,000 000 009	
P = 7	X = 6	N = 61	0,999 999 002	!
P = 8	X = 6	N = 63	0,999 990 0443	
P = 9	X = 7	N = 83	1,000 261 139	← méditez !
P = 10	X = 7	N = 84	1,000 261 139	
P = 11	X = 7	N = 86	1,000 261 139	
P = 12	X = 8	N = 109	3,499 384 244	

$a = 0$ $\quad \varphi(a) = \sqrt{\pi/2} \simeq 1,253 314 137$

P = 3	X = 4	N = 25	1,253 274 694
P = 4	X = 4	N = 27	1,253 315 105
P = 5	X = 5	N = 41	1,253 311 783
P = 6	X = 5	N = 42	1,253 314 275
P = 7	X = 6	N = 59	1,253 313 646
P = 8	X = 6	N = 61	1,253 313 655
P = 9	X = 6	N = 63	1,253 313 656

En T P 4.

```
program hec91d;

uses crt;
var p,x,k:integer;a,Epsilon,u,s:real;

begin
{clrscr;}
write('Donnez a. a=');readln(a);
write('Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=');readln(p);
Epsilon:=exp(-p*ln(10))/2;

x:=1;
while 2*exp((a-3)*ln(x)-x*x/2)>Epsilon do x:=x+1;
writeln;write('x vaut ',x);

u:=exp((a+1)*ln(x))/(a+1);s:=u;k:=0;
while abs(u)>Epsilon do
      begin
      k:=k+1;u:=-u*x*x/2/k*(1-2/(k+k+a+1));s:=s+u;
      end;

writeln('. On a calculé s(',k,').');writeln;
write(s+exp((a-1)*ln(x)-x*x/2),' est une valeur approchée ');
writeln('de Φ(',a:1:0,') à ',2*Epsilon,' près');
end.
```

```
Donnez a. a=1
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=6

x vaut 5. On a calculé s(44).

 1.0000001085E+00 est une valeur approchée de Φ(1) à  1.0000000000E-06 près
```

```
Donnez a. a=1
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=8

x vaut 6. On a calculé s(63).

 1.0000119550E+00 est une valeur approchée de Φ(1) à  1.0000000000E-08 près
```

```
Donnez a. a=1
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=10

x vaut 7. On a calculé s(84).

 1.0072927043E+00 est une valeur approchée de Φ(1) à  1.0000000000E-10 près
```

```
Donnez a. a=0
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=5

x vaut 5. On a calculé s(41).

 1.2533137864E+00 est une valeur approchée de Φ(0) à  1.0000000000E-05 près
```

```
Donnez a. a=0
Précision de 10 puissance -p.Donnez p. p=6

x vaut 5. On a calculé s(42).

 1.2533142785E+00 est une valeur approchée de Φ(0) à  1.0000000000E-06 près
```

LES résultats en TP4

Présentation différente mais même algorithme.

Donnez la valeur de a. a=1

p	x	n	Valeur approchée
3	4	26	1.00004964600
4	4	28	1.00000370510
5	5	42	1.00000060750
6	5	44	1.00000010850
7	6	61	1.00001195060
8	6	63	1.00001195500
9	7	83	1.00729270430
10	7	84	1.00729270430
11	7	86	1.00729270430
12	8	109	1.36903066960

Donnez la valeur de a. a=0

p	x	n	Valeur approchée
3	4	25	1.25327469450
4	4	27	1.25331510500
5	5	41	1.25331378640
6	5	42	1.25331427850
7	6	59	1.25331406840
8	6	61	1.25331407720
9	6	63	1.25331407790
10	7	83	1.25399923320
11	7	85	1.25399923320
12	7	86	1.25399923320

Ici je transforme : $1-\frac{2}{2k+1+a}$ en $\frac{2k-1+a}{2k+1+a}$!

Donnez la valeur de a. a=1

p	x	n	Valeur approchée
3	4	26	1.00004964580
4	4	28	1.00000370490
5	5	42	1.00000056060
6	5	44	1.00000006160
7	6	61	1.00000942800
8	6	63	1.00000943240
9	7	83	1.00594676300
10	7	84	1.00594676300
11	7	86	1.00594676300
12	8	109	-0.51829182041

Donnez la valeur de a. a=0

p	x	n	Valeur approchée
3	4	25	1.25327469440
4	4	27	1.25331510490
5	5	41	1.25331377730
6	5	42	1.25331426950
7	6	59	1.25331726370
8	6	61	1.25331727250
9	6	63	1.25331727320
10	7	83	1.25305127980
11	7	85	1.25305127980
12	7	86	1.25305127980

Avec une TI 82 en calculant directement $(-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)}$ on obtient la même chose pour x et n et :

	a = 1	a = 0
p=3	1,000 049 646	1,253 274 694
p=4	1,000 003 705	1,253 315 105
p=5	1,000 000 539	1,253 313 782
p=6	1,000 00004	1,253 314 274
p=7	1,000 000 103	1,253 314 15
p=8	1,000 000 108	1,253 314 159
p=9	OVER FLOW	OVER FLOW
p=10	" "	"

MORALE :

VIVE L'ALGOGORITHMIQUE

RETOUR SUR LA CONVERGENCE DE $\int_0^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$ ($x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$)

$\varphi_a : t \mapsto t^a e^{-t^2/2}$ est continue sur $]0,x]$ donc localement intégrable.

$\forall \varepsilon \in]0,x]$, $\int_\varepsilon^x t^a e^{-t^2/2}\,dt \underset{u=1/t}{=} \int_{1/\varepsilon}^{1/x} (1/u)^a e^{-\frac{1}{2u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_{1/x}^{1/\varepsilon} \frac{1}{u^{a+2}} e^{-\frac{1}{2u^2}} du$

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} = +\infty$ donc $\int_0^x t^a e^{-t^2/2}$ est de même nature que : $\int_{1/x}^{+\infty} \frac{1}{u^{a+2}} e^{-\frac{1}{2u^2}} du$.

$\hat{\varphi}_a : u \mapsto \frac{1}{u^{a+2}} e^{-\frac{1}{2u^2}}$ est positive et continue sur $]\frac{1}{x}, +\infty[$ et $\hat{\varphi}_a(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{a+2}}$

Par conséquent $\int_{1/x}^{+\infty} \hat{\varphi}_a(u)\,du$ est de même nature que $\int_{1/x}^{+\infty} \frac{du}{u^{a+2}}$. Cette dernière intégrale converge si et seulement si $a+2>1$ (Riemann).

Finalement, $\int_0^x t^a e^{-t^2/2}\,dt$ converge si et seulement si $a>-1$.

LE PROGRAMME DE II Q3 c)

```
program hec91a;

uses crt;
var n,k:integer;a,u:real;

begin
clrscr;

write('Donnez a. a=');readln(a);
write('Donnez n. n=');readln(n);

u:=1/(a+1);
for k:=0 to n-1 do
    begin
    u:=u*12.5/(k+1)*(1-2/(k+k+3+a));
    end;

writeln;
writeln('u(',n,')=',u);
end.
```