Un grand bravo au concepteur pour la clarté et la précision de son énoncé (... le statut du α est admirable)

clarifions et simplifions (?)

1°. L'urne contient b boules blanches et b boules noires

2°. On effectue une succession de tirages dans l'urne en respectant le protocole suivant :

a.. On s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

b.. Lorsque l'on obtient une boule blanche on la remet dans l'urne ainsi que a boules blanches et on procède alors à un nouveau tirage

PARTIE I

Q1 Nous notons N_i (resp. B_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire (resp. blanche). Ici $a=b$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n=1$, $p(X=n)=p(X=1)=p(N_1)=1/2$. Supposons $n \geqslant 2$.

$p(X=n)=p(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{n-1}\cap N_n)=p(B_1)\,p(B_2/B_1)\,p(B_3/B_1\cap B_2)\cdots p(B_{n-1}/B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{n-2})\,p(N_n/B_1\cap\cdots\cap B_{n-1})$

$$p(B_i/B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{i-1})=\frac{b+(i-1)a}{b+b+(i-1)a}\underset{a=b}{=}\frac{1+i-1}{2+i-1}=\frac{i}{i+1}\quad \text{pour tout } i\in\mathbb{N}^*-\{1\}$$

$$p(N_n/B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{n-1})=\frac{b}{b+b+(n-1)a}=\frac{1}{n+1}.\quad \text{Notons encore que } p(B_1)=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}\ !$$

$$p(X=n)=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i}{i+1}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$p(X=1)=1/2$ et $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $p(X=n)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}$.

Récap : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(X=n)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n=p(X=n)=\frac{1}{n(n+1)}.$$

b) Clairement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}p_k=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Par conséquent $\sum_{n=1}^{+\infty}p_n=1$

<u>Morale</u> .. $p(X=0)=1-p(X\neq 0)=1-p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}X=n\right)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}p(X=n)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}p_n=1-1=0$

$p(X=0)=0$

L'événement le jeu ne s'arrête pas est quasi-impossible.

d) $n\,p_n = \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\,p_n \geqslant 0$ et $n\,p_n \sim \dfrac{1}{n}$.

La série de terme général $n\,p_n$ est de même nature que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ (règle de comparaison des séries à termes positifs) donc divergente (Riemann)

Par conséquent $\underline{\underline{X \text{ n'a pas d'espérance}}}$.

Q2 .. Retour au cas général.. On prend les mêmes et on recommence.

$A_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$. Si $n=1$, $p(A_n) = p(B_1) = \dfrac{b}{b+b} = 1/2$; supposons $n \geqslant 2$

$p(A_n) = p(B_1)\,p(B_2/B_1) \cdots p(B_n / B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1})$

$p(B_1) = 1/2 = \dfrac{b+(1-1)a}{2b+(1-1)a}$! et $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $p(B_i / B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{i-1}) = \dfrac{b+(i-1)a}{b+b+(i-1)a} = \dfrac{b+(i-1)a}{2b+(i-1)a}$

donc $\underline{\underline{p(A_n)}} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{b+(i-1)a}{2b+(i-1)a} = \underline{\underline{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+b}{ka+2b}}}$

Q3 .. a) Montrons par récurrence que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{i}(1+x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=0}^{i} x_k$

- C'est clair pour $i=0$ car $1+x_0 \geqslant 1+x_0$.
- Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![0,n-2]\!]$ et montrons la pour $i+1$

$$\prod_{k=0}^{i+1}(1+x_k) = (1+x_{i+1})\prod_{k=0}^{i}(1+x_k) \underset{\substack{\uparrow \\ 1+x_{i+1} \geqslant 0 \text{ et H.R.}}}{\geqslant} (1+x_{i+1})\left(1+\sum_{k=0}^{i} x_k\right) = 1 + \sum_{k=0}^{i+1} x_k + x_{i+1}\sum_{k=0}^{i} x_k \underset{\substack{\uparrow \\ x_k \geqslant 0 \text{ pour } k \in [\![0,i+1]\!]}}{\geqslant} 1 + \sum_{k=0}^{i+1} x_k$$

Ceci achève la récurrence.

En particulier la propriété vaut pour $i = n-1$

donc $\underline{\underline{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1+x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x_k}}$

$$\frac{1}{p(A_n)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+2b}{ka+b} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{b}{ka+b}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{b}{ka+b} \geqslant 0 \text{ pour } k \in [\![0,n-1]\!]}}{\geqslant} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{ka+b}$$

$\dfrac{b}{ka+b} \sim \dfrac{b}{a} \times \dfrac{1}{k}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{b}{ka+b} > 0$. La série de terme général $\dfrac{b}{ka+b}$ est donc de même nature que la série de terme général $\dfrac{b}{a}\dfrac{1}{k}$ donc divergente

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{ka+b}\right)_{n \geqslant 1}$ est donc croissante $\left(\dfrac{b}{ka+b} \geqslant 0\right)$ et non majorée

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{b}{ka+b}\right)=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{p(A_n)}=+\infty$

Finalement : $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n)=0}}$.

<u>Remarque</u>.. On pouvait aller plus vite en passant au log.

$\ln\frac{ka+b}{ka+cb}\sim\frac{ka+b}{ka+cb}-1=-\frac{b}{ka+cb}\sim-\frac{b}{a}\times\frac{1}{k}\ \dots\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{ka+b}{ka+cb}\right)=-\infty\ \dots$

b.. Notons T_n l'événement on a obtenu une boule noire à l'un des n premiers tirages

$T_n=\overline{A_n}$

$T_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(X_a=k)$; $\sum\limits_{k=1}^{n}p(X_a=k)=p\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}(X_a=k)\right)=p(T_n)=p(\overline{A_n})=1-p(A_n)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}p(X_a=k)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-p(A_n))=1$. $\underline{\underline{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p(X_a=k)=1}}$.

<u>Morale</u>.. $p(X_a=0)=0$. L'événement le jeu ne s'arrête pas est quasi-impossible.

Q4.. C'est du COURS. Si Z est une var à valeurs dans IN, E(Z) existe ssi la série de terme général $p(Z>n)$ converge. En cas d'existence : $E(Z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p(Z>n)$

Ici $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(Y=n)=p_n$. Posons aussi $p_0=p(Y=0)$.

<u>a)</u> $E_n=\sum\limits_{k=0}^{n}p(Y>k)=\sum\limits_{k=0}^{n}(1-p(Y\leq k))=n+1-\sum\limits_{k=0}^{n}p(Y\leq k)=n+1-\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k}p(Y=i)$

$E_n=(n+1)-\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=i}^{n}p_i=(n+1)-\sum\limits_{i=0}^{n}(n-i+1)p_i=(n+1)(1-(p_0+p_1+\dots+p_n))+\sum\limits_{i=0}^{n}ip_i$

$E_n=(n+1)[1-(p_0+p_1+\dots+p_n)]+\sum\limits_{i=0}^{n}ip_i=(n+1)p(Y>n)+\sum\limits_{i=0}^{n}ip_i$

ou encore $E_n=(n+1)[1-(p_1+p_2+\dots+p_n)]+\sum\limits_{i=1}^{n}ip_i=\underline{\underline{(n+1)\left[1-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}ip_i}}$

<u>b)</u> Supposons que Y possède une espérance.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $E_{n+1}-E_n=\sum\limits_{k=0}^{n+1}p(Y>k)-\sum\limits_{k=0}^{n}p(Y>k)=p(Y>n+1)\geq 0$; $(E_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $E(Y)-E_n=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}ip_i-(n+1)\left[1-\sum\limits_{i=0}^{n}p_i\right]-\sum\limits_{i=0}^{n}ip_i=\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty}ip_i-(n+1)\left(\underbrace{\sum\limits_{i=0}^{+\infty}p_i}_{1}-\sum\limits_{i=0}^{n}p_i\right)$

Donc $E(Y)-E_n=\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty}ip_i-\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty}(n+1)p_i=\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty}(i-(n+1))p_i$

$\forall i\in[\![n+1,+\infty[\![$, $(i-(n+1))p_i\geq 0$; donc $E(Y)-E_n\geq 0$. Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $E_n\leq E(Y)$.

la suite $(E_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante et majorée par $E(Y)$; elle converge.
Cela signifie encore que la série de terme général $p(Y>n)$ converge.

┘ Supposons que $(E_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrons que $E(Y)$ existe.
Soit à montrer que la série de terme général np_n est absolument convergente ou simplement convergente car $\forall n \in \mathbb{N}^{(*)}, np_n \geqslant 0$.
Montrons donc que la suite $(\sum_{i=0}^{n} i p_i)_{n\geqslant 0}$ converge ; cette suite est clairement croissante ($\forall n\in\mathbb{N}, np_n \geqslant 0$!). La convergence sera montrée si l'on prouve qu'elle est majorée.

a : $\forall n\in\mathbb{N},\ E_n = (n+1)p(Y>n) + \sum_{i=0}^{n} i p_i$ — $(E_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n} i p_i = E_n - (n+1)p(Y>n) \leqslant E_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} E_n$

Finalement $(\sum_{i=0}^{n} i p_i)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée donc convergente ; par conséquent $E(Y)$ existe.

┘ Ce qui précède montre que $E(Y)$ existe si et seulement si $(E_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
Supposons donc que $E(Y)$ existe ou que $(E_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
Nous avons : $\forall n\in\mathbb{N},\ E_n \leqslant E(Y)$ (b)) donc $\lim_{n\to+\infty} E_n \leqslant E(Y)$

Nous avons : $\forall n \in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n} i p_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} E_n$; donc $E(Y) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} i p_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} E_n$

Finalement : $E(Y) = \lim_{n\to+\infty} E_n$

Donc $\underline{\underline{E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Y>n)}}$.

__Remarque__.. ce résultat classique se montre chez les gens biens en 4 lignes.

Q5 .. __Ici $a \geqslant b$.__ $\forall n\in\mathbb{N},\ r_n(a) = p(X_a>n) = p(\text{"}A_n\text{"}) \overset{\text{pour } n\geqslant 1}{=} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+b}{ka+2b} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{b}{ka+2b}\right)$.

__a)__ Soit $n\in\mathbb{N}^*$
$\forall k\in [\![0,n-1]\!],\ \frac{b}{ka_1+2b} \geqslant \frac{b}{ka_2+2b}$ car $a_1 \leqslant a_2$

Donc $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ 0 \leqslant \frac{ka_1+b}{ka_1+2b} = 1 - \frac{b}{ka_1+2b} \leqslant 1 - \frac{b}{ka_2+2b} = \frac{ka_2+b}{ka_2+2b}$

Par conséquent : $r_n(a_1) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka_1+b}{ka_1+2b} \leqslant \prod_{k=0}^{n-1}\frac{ka_2+b}{ka_2+2b} = r_n(a_2)$.

Si $n=0$: $r_n(a_1) = 1 \leqslant 1 = r_n(a_2)$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\underline{\underline{r_n(a_1) \leqslant r_n(a_2) \text{ si } a_1\leqslant a_2}}$.

$b \leqslant a$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ r_n(a) \underset{\text{voir Q1}}{\geqslant} r_n(b) = p(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ (considérer $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$)

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ r_n(a) \geqslant \frac{1}{n+1} > 0$
La série de terme général $1/n+1$ étant divergente il en est de même de la série de terme

$r_n(a) = p(X_a > n)$;

b) La série de terme général $p(X_a > n)$ étant divergente, Q4 prouve que X_a n'a pas d'espérance lorsque : $a \geqslant b$.

Q6.. $1 \leqslant a < b$

a) $r_{n+1}(a) = \prod_{k=0}^{n} \frac{ka+b}{ka+2b} = \frac{na+b}{na+2b}\, r_n(a)$. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; ce résultat vaut encore pour $n=0$ car $r_0(a)=1$ et $r_1(a) = 1/2 = \frac{b}{2b} = \frac{0+b}{0+2b}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+1}(a) = \frac{na+b}{na+2b}\, r_n(a)$

> Pour les initiés
>
> $\frac{r_{n+1}(a)}{r_n(a)} = \frac{na+b}{na+2b} = \frac{1+\frac{b}{na}}{1+\frac{2b}{na}} = \left(1+\frac{b}{na}\right)\left(1-\frac{2b}{na}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$
>
> $\frac{r_{n+1}(a)}{r_n(a)} = 1 - \frac{b}{a}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; comme $\frac{b}{a} > 1$ Duhamel donne la convergence de la série de T.G. $r_n(a)$! et l'existence de $E(X_a)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\, r_{n+1}(a) = \frac{n+1}{n} \times \frac{na+b}{na+2b}\, (n\, r_n(a))$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{(n+1)\, r_{n+1}(a)}{n\, r_n(a)} = \frac{n+1}{n} \times \frac{na+b}{na+2b}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{(n+1)\, r_{n+1}(a)}{n\, r_n(a)} - 1 = \frac{(n+1)(na+b) - n(na+2b)}{n(na+2b)} = \frac{n(a-b)+b}{n(na+2b)} = \frac{(a-b)}{n(na+2b)}\left[n + \frac{b}{a-b}\right]$.

Si $n > -\frac{b}{a-b} = \frac{b}{b-a}$ alors $\frac{1}{n(na+2b)}\left[n+\frac{b}{a-b}\right] > 0$ donc : $\frac{(a-b)}{n(na+2b)}\left[n+\frac{b}{a-b}\right] < 0$

Par conséquent : si $n > \frac{b}{b-a}$: $\frac{(n+1)\, r_{n+1}(a)}{n\, r_n(a)} - 1 < 0$ donc $(n+1)\, r_{n+1}(a) < n\, r_n(a)$

Finalement $(n\, r_n(a))_{n \geqslant 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Cette suite étant minorée par 0, elle converge.

On pose alors $\ell = \lim_{n \to +\infty} (n\, r_n(a))$.

b) On suppose que : $\ell \neq 0$. $(n\, r_n(a))_{n \geqslant 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang p et converge vers ℓ. Par conséquent : $n\, r_n(a) \geqslant \ell$ pour $n \geqslant p$.

$\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ n\, r_n(a) \geqslant \ell$. $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ r_n(a) \geqslant \frac{\ell}{n}$.

$\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\quad 0 \leqslant \frac{\ell}{n} \leqslant r_n(a)$ et la série de terme général $\frac{\ell}{n}$ diverge ;

par conséquent la série de terme général $r_n(a) = p(X_a > n)$ diverge.

X_a n'a donc pas d'espérance si ℓ est différent de zéro.

c) Rappelons que : $\forall k \in \mathbb{N},\ r_{k+1}(a) = \dfrac{ka+b}{ka+2b}\, r_k(a)$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$(ka+2b)\, r_{k+1}(a) = ka\, r_k(a) + b\, r_k(a)$

$(ka+a)\, r_{k+1}(a) - ka\, r_k(a) = (-2b+a)\, r_{k+1}(a) + b\, r_k(a)$

Donc $a(k+1)\, r_{k+1}(a) - ak\, r_k(a) = (a-2b)\, r_{k+1}(a) + b\, r_k(a)$

$\forall k \in \mathbb{N},\ a(k+1)\, r_{k+1}(a) - ak\, r_k(a) = (a-2b)\, r_{k+1}(a) + b\, r_k(a)$.

d) soit $n \in \mathbb{N}$

$$a \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, r_{k+1}(a) - a \sum_{k=0}^{n} k\, r_k(a) = (a-2b) \sum_{k=0}^{n} r_{k+1}(a) + b \sum_{k=0}^{n} r_k(a)$$

$$a(n+1)\, r_{n+1}(a) - 0 = (a-2b)\left(\sum_{k=0}^{n+1} r_k(a) - r_0(a) \right) + b \sum_{k=0}^{n} r_k(a).$$

$$a(n+1)\, r_{n+1}(a) = (a-2b)\left(\sum_{k=0}^{n+1} r_k(a) - 1 \right) + b \sum_{k=0}^{n} r_k(a)$$

$$a(n+1)\, r_{n+1}(a) + a - 2b = (a-2b)\, r_{n+1}(a) + (a-b) \sum_{k=0}^{n} r_k(a)$$

Donc $$\sum_{k=0}^{n} r_k(a) = \frac{1}{a-b}\left[a(n+1)\, r_{n+1}(a) + a - 2b - (a-2b)\, r_{n+1}(a) \right]$$

Nous savons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, r_n(a) = \ell$ et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(a) = 0$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k(a) \right) = \dfrac{1}{a-b}\left[a\ell + a - 2b - 0 \right] = \dfrac{a\ell + (a-2b)}{a-b}$

La série de terme général $r_n(a)$ est donc convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(a) = \frac{a\ell + a - 2b}{a-b}$

Ceci montre que : 1°.. $E(X_a)$ existe (Q4)

2°.. $\ell = 0$ (Q6..b)

3°.. $E(X_a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(a) = \frac{a\ell + a - 2b}{a-b} = \frac{a-2b}{a-b}$

Finalement X_a possède une espérance et $E(X_a) = \dfrac{a-2b}{a-b} = \dfrac{2b-a}{b-a}$.

<u>Message personnel</u>.. Gégé aimé je pense sincèrement que ta gestion de X_a et de son espérance est particulièrement indigeste. L'utilisation de ln (pour des produits !), de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ avec un zest de Duhamel (préalablement démontré) auraient rendu la sauce plus légère.

Gégé c'est bien de te dévouer pour faire la cuisine mais n'oublie pas que c'est nous qui la mangeons... alors " TANT QUE tu la fais aussi bien arrête toi "

PARTIE II

Q1.. a] Remarque.. u_n mesure le nombre de boules blanches dans l'urne avant le $(n+1)^{ième}$ tirage si il a lieu. Dans la partie I $u_n = na+b$

Si $n=1$: $p(A_1) = 1/2 = \frac{u_0}{u_0+b}$

Si $n \geq 2$: $p(A_n) = p(B_1)\,p(B_2/B_1)\cdots p(B_n/_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}})$

$$p(A_n) = \frac{u_0}{u_0+b} \times \frac{u_1}{u_1+b} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}+b} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{u_k+b}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{q_n = p(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{u_k+b}}} = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_k+b}$

b] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{u_n}{u_n+b} \leq 1$. $(q_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge.

Posons $L = \lim_{n\to+\infty} q_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \leq q_1 = \frac{1}{2}$ donc : $\underline{\underline{L \leq \frac{1}{2}}}$.

c] Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

$\overline{A_n} = \bigcup_{k=1}^{n} N_k$. $1 - p(A_n) = p(\overline{A_n}) = \sum_{k=1}^{n} p(N_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k$

Donc $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 - p(A_n) = 1 - q_n$

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 - q_n.}}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} q_n = L$: $\lim_{n\to+\infty} (p_1+p_2+\cdots+p_n) = 1-L$

Finalement : $\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1-L}}$

d] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{q_n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k+b}{u_k}$; $\ln \frac{1}{q_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{b}{u_k}\right)$. (Enfin le log !)

La suite $\left(\ln \frac{1}{q_n}\right)$ converge donc si la série de terme général $\ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right)$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right) \geq 0$

Supposons que la série de T.G. $\ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right)$ converge ; $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right) = 0$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{b}{u_n} = 0$ donc $\frac{b}{u_n} \sim \ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right) \geq 0$; la série de T.G. $\ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right)$ étant convergente celle de T.G. $\frac{b}{u_n}$ aussi.

Réciproquement supposons que la série de T.G $\frac{b}{u_n}$ converge ; $\lim_{n\to+\infty} \frac{b}{u_n} = 0$ donc $\ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right) \sim \frac{b}{u_n}$; la série de T.G. $\ln\left(1+\frac{b}{u_n}\right)$ converge.

En dernier, la suite $(\ln \frac{1}{q_n})$ converge si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge

cette suite et cette série sont donc de même nature.

Notons H l'événement ne jamais obtenir une boule noire

$$p(\bar{H}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n . \quad p(H)=0 \Leftrightarrow p(\bar{H})=1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow L=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} q_n = 0^+ \ (q_n \geq 0) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty$$

$$p(H)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{q_n}\right) = +\infty \Leftrightarrow \left(\ln \frac{1}{q_n}\right)_{n\geq 0} \text{ diverge} \Leftrightarrow \text{la série de terme général } \frac{1}{u_n} \text{ diverge.}$$

la suite $(\ln \frac{1}{q_n})$ est croissante

La probabilité de ne pas obtenir de boule noire est nulle si la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.

c) * $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = b + na$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n-1} = a$; on est dans les conditions de la partie I

Après chaque tirage d'une boule blanche on remet cette boule en ajoutant a boules blanches

conclusion : $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{na}$; la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge et on retrouve

ainsi $p(H)=0$ (voir I Q1c et I Q3b)

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = ba^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n-1} = ba^n - ba^{n-1} = ba^{n-1}(a-1)$

si on obtient une boule blanche au $n$ième tirage on la remet en ajoutant $(a-1)ba^{n-1}$ boules blanches.

$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{ba^n}$ est donc le terme général d'une série convergente ; $p(H) \neq 0$.

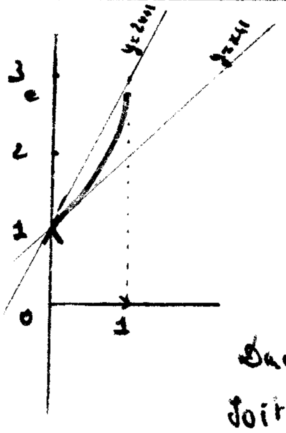
l'événement ne pas obtenir une noire n'est plus quasi-impossible (normal on rajoute des wagons de boules blanches)

Q2. a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = ba^n$

$(q_0 = 1$ et$)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n(a) = q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ba^k}{ba^k + b} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{a^k+1}$

$(q_0(a) = 1$ et$)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{a^k+1}$.

b) $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^n} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^p}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{1}{a^{n-1}} \times \frac{1}{a-1} \times \left(1 - \frac{1}{a^p}\right) \leq \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}$.



Montrons que : $\forall x\in[0,1]$, $1+x\le e^x\le 1+2x$

V1 Etude de 2 fonctions ... pas de problème.

V2 $f : x\mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est « au-dessus de ses tangentes » et « en dessous de ses cordes »

Sa tangente au point A d'abscisse 1 admet pour équation $y=x+1$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $x+1\le e^x$; en particulier $\forall x\in[0,1]$, $x+1\le e^x$

Soit B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. La corde [AB] est portée par la droite (AB) d'équation $y=\frac{e-1}{1-0}(x-0)+1=(e-1)x+1$

Donc $\forall x\in[0,1]$, $e^x\le(e-1)x+1$. Comme $e-1\le 2$: $\forall x\in[0,1]$, $e^x\le 2x+1$

Finalement : $\forall x\in[0,1]$, $1+x\le e^x\le 1+2x$.

$n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{q_n(a)}{q_{n+p}(a)}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a^k}{a^k+1}}{\prod_{k=0}^{n+p-1}\frac{a^k}{a^k+1}}=\prod_{k=n}^{n+p-1}\frac{a^k+1}{a^k}=\prod_{k=n}^{n+p-1}\left(1+\frac{1}{a^k}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 1+\frac{1}{a^k}\ge 1}}{1\le}\prod_{k=n}^{n+p-1}\left(1+\frac{1}{a^k}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ x+1\le e^x \text{ pour } x\in[0,1] \text{ ou } \mathbb{R}}}{\le}\prod_{k=n}^{n+p-1}e^{1/a^k}=e^{\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{a^k}}\le e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}$$

Donc $1\le\frac{q_n(a)}{q_{n+p}(a)}\le e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}$ ou $q_{n+p}(a)\le q_n(a)\le e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}q_{n+p}(a)$

En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient : $L(a)\le q_n(a)\le e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}L(a)$.

$$0\le q_n(a)-L(a)\le\left(e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}-1\right)L(a)\underset{\substack{\uparrow\\ e^x\le 1+2x \text{ pour } x\in[0,1]}}{\le}\frac{2}{a^{n-1}(a-1)}L(a)\le\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}.\quad(0\le L(a)\le 1/2)$$

c) Voir à la fin

d) $a_1\in\mathbb{N}^*$, $a_2\in\mathbb{N}^*$ et $a_1\le a_2$. Soit $n\in\mathbb{N}$

Si $n=0$: $q_0(a_1)=1\le 1=q_0(a_2)$

Supposons $n\ge 1$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $x\mapsto\frac{x^k}{1+x^k}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (calculer la dérivée ou écrire $\frac{x^k}{1+x^k}=1-\frac{1}{1+x^k}$)

Donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{a_1^k}{1+a_1^k}\le\frac{a_2^k}{1+a_2^k}$. Donc $q_n(a_1)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_1^k}{1+a_1^k}\le\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_2^k}{1+a_2^k}=q_n(a_2)$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $q_n(a_1)\le q_n(a_2)$. En passant à la limite on obtient $L(a_1)\le L(a_2)$.

La suite $(L(a))_{a\ge 2}$ est donc croissante ($a\ge2$ géré dans l'avant dernière ligne !)

Pour $n=1$, (3) donne : $0 \leq q_1(a) - L(a) \leq \frac{1}{(a-1)\times a^0} = \frac{1}{a-1}$ pour tout $a \in [\![2,+\infty[\![$

Comme $\lim\limits_{a\mapsto+\infty} \frac{1}{a-1} = 0$: $\lim\limits_{a\mapsto+\infty} (q_1(a) - L(a)) = 0$. Notons que $q_1(a) = 1/2$ pour tout $a \in [\![2,+\infty[\![$.

Par conséquent : $\underline{\underline{\lim\limits_{a\mapsto+\infty} L(a) = 1/2}}$.

ALGORITHMIQUE. **Remarques** 1.. On partira de $q_1 = 1/2$

2.. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{a^k}{a^k+1}$; $\forall k \in \mathbb{N}$, $q_{k+1} = \frac{a^k}{a^k+1}\, q_k$

On a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{a^k = a^{k-1} \times a}}$!

3.. On continue à calculer $q_n(a)$ tant que : $\frac{1}{(a-1)a^{n-1}} > \varepsilon$ et non pas le contraire, cette condition étant aussi $a^{n-1} < \frac{1}{\varepsilon(a-1)}$.

Je mettrai donc $\frac{1}{\varepsilon(a-1)}$ dans TEST

```
PROGRAM   GÉGÉ;
VAR  A,COMPT : INTEGER ; EPSILON,TEST,B, Q : REAL;
BEGIN
 A:=0; EPSILON:=0;
 REPEAT
    WRITE ('DONNEZ LA VALEUR DE A (A ENTIER ≥ 2); A= ');
    READLN (A);
 UNTIL  (A>1) ;
 REPEAT
    WRITE ('DONNEZ LA PRECISION ε (ε>0) ; ε = ');
    READLN(EPSILON);
 UNTIL  (EPSILON>0);
 TEST:= 1/EPSILON/(A-1); B:= 1; Q:= 1/2 ; COMPT:= 1;
 WHILE ( B < TEST) DO
    BEGIN
    B:=B*A; Q:=Q*B/(1+B) ; COMPT:=COMPT+1;
    END;
 WRITELN( Q,' EST UNE VALEUR APPROCHEE DE L(',A,') A ',EPSILON,' PRES');
 WRITELN ('C''EST LE TERME D''INDICE ',COMPT,' DE LA SUITE');
 END.
```

```
?→A: 1→X: 0.0001→E: 0.5→Q:
1→N
Lbl 0: ISZ N: XA→X: QX÷(1+X)→Q:
(1÷X÷(A-1))→W: W>E⇒GOTO0:
Q◢ N◢

CASIO 7000G ↑
```

$\boxed{a=2}$

$\varepsilon=10^{-4}$	$n=15$	0,109 724 04
$\varepsilon=10^{-7}$	$n=25$	0,109 711 233
$\varepsilon=10^{-9}$	$n=31$	0,109 711 221

			n
$\underline{\underline{\varepsilon=10^{-9}}}$	$a=10$	0,449545459	10
	$a=50$	0,489 996 078	6
	$a=100$	0,494 999 505	5
	$a=500$	0,498 999 996	4
	$a=1000$	0,499 500 000	4

```
Press any key to return to Turbo Pascal
Program HEC92;
uses crt;
var a,compt:integer;epsilon,b,q,test:real;

begin
clrscr;a:=0;epsilon:=0;
repeat
      write('Donnez la valeur de a (a entier supérieur ou égal à 2); a=');
      readln(a)
until a>1;

repeat
      write('Donnez la précision epsilon (epsilon>0); epsilon=');
      readln(epsilon);writeln;
until epsilon >0;

test:=1/epsilon/(a-1);b:=1;q:=1/2;compt:=1;
while b< test do
      begin
      b:=b*a;q:=q*b/(1+b);compt:=compt+1;
      end;
writeln(q,' est une valeur approchée de L(',a,') à ',epsilon:0:9,' près');
writeln;writeln('C''est le terme d''indice ',compt,' de la suite');
end.
```