CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 12 mai 1992, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-. Règles graduées.
-. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Dans tout le problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul donné.

On se propose d'étudier un algorithme de calcul d'une valeur approchée de $\tan\theta$ à 10^{-N} près, où θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, n'utilisant que des additions, des multiplications par des puissances de 10, une seule division et des tests de comparaison entre nombres réels (les soustractions éventuelles étant comptabilisées comme des additions).

On rappelle que si a et b sont des nombres réels appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

PARTIE I

L'objet de cette partie est d'étudier une suite $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq N+1}$ d'éléments de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

1. *Étude de la fonction tangente*

a) Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur l'intervelle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'allure de sa représentation graphique C sur cet intervalle. On précisera les tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{4}$.

b) Montrer qu'un algorithme de calcul approché de $\tan\theta$ lorsque θ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ permet le calcul approché de $\tan\theta$ pour tout nombre réel θ tel que $\tan\theta$ soit défini.

2. *Étude de la fonction réciproque de la fonction tangente*

a) Montrer que la fonction tangente définit une bijection strictement croissante f de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Dans toute la suite, on note g la fonction réciproque de f (appelée fonction arc tangente). Donner l'allure de sa représentation graphique.

b) Prouver que g est de classe C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et que, pour tout nombre réel t :

$$g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

c) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel p :

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^p t^{2p} + (-1)^{p+1}\frac{t^{2p+2}}{1+t^2}$$

d) En déduire que, pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$x - \frac{x^3}{3} \leq g(x) \leq x \tag{1}$$

e) En déduire aussi que, pour tout nombre entier naturel p et pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + R_p(x) \qquad \text{où} \quad |R_p(x)| \leq \frac{x^{2p+3}}{2p+3} \tag{2}$$

3. *Construction de la suite $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$*

a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à N, il existe un élément α_n et un seul de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\tan\alpha_n = 10^{-n}$. Préciser la valeur de α_0.

b) On convient de poser $\alpha_{N+1} = 0$. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$ est strictement décroissante.

c) Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, il existe un nombre entier naturel n et un seul compris entre 1 et $N+1$ tel que $\alpha_n \leq x < \alpha_{n-1}$.

4. *Étude de la suite $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$*

a) Prouver que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$g(10\,x) < 10\,g(x)$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à $N-1$:

$$\alpha_n < 10\,\alpha_{n+1} \tag{3}$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à N :

$$\frac{1}{10^n}\left(1 - \frac{1}{3\times 10^{2n}}\right) \leq \alpha_n \leq \frac{1}{10^n}$$

c) En déduire que, dans l'inégalité (3), on ne peut pas remplacer 10 par un nombre strictement plus petit (indépendant de n et de N).

d) En déduire aussi que, pour tout nombre entier naturel n compris entre 1 et $N-1$:

$$9\,\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \tag{4}$$

e) Prouver enfin que :

$$7\,\alpha_1 \leq \alpha_0 < 8\,\alpha_1 \tag{5}$$

5. *Algorithme de calcul de valeurs approchées des nombres* α_n

Soit K un nombre entier naturel non nul. À partir de la relation (2), indiquer un algorithme de calcul d'une valeur approchée de α_n, où $1 \leq n \leq N$, à la précision 10^{-K}.

Montrer qu'on peut prendre pour p le plus petit des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à $\dfrac{K-3}{2\,n}$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ sont connus avec une précision suffisante pour qu'on puisse négliger dans les calculs l'influence des erreurs commises sur leurs valeurs.

PARTIE II

On suppose désormais donné un élément θ de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et on construit une suite $(\theta_n)_{n\geq 0}$ de valeurs approchées de θ de la forme $\theta_0 = 0$ et :

$$\theta_n = \alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 1$$

où, pour tout nombre entier naturel non nul k, $h(k)$ est un entier compris entre 1 et $N+1$. On approche alors $\tan\theta$ à l'aide de la suite $(\tan\theta_n)$ et on indique un algorithme de calcul des nombres $\tan\theta_n$.

1. *Construction de la suite* (θ_n)

a) Montrer qu'on peut construire une application h et une seule de $\mathbb{N}$ dans $[0, \ldots, N+1]$ telle que :

$$\begin{aligned}
&h(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad h(k) \geq 1 \quad \text{pour } k \geq 1 \\
&\alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1} \\
&\alpha_{h(n)} \leq \theta - \left[\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}\right] < \alpha_{h(n)-1} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 2
\end{aligned}$$

b) Établir que l'application h est croissante et que $h(n)$ est égal à $N+1$ dès que n est assez grand.

Dans toute la suite, on note m le nombre entier naturel tel que $h(m) < N+1$ et $h(n) = N+1$ pour $n \geq m+1$.

c) Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$\theta_n = \alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)}$$

On convient de poser $\theta_0 = 0$.

Montrer que l'obtention de $h(1), h(2), \ldots, h(m)$ et de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ ne nécessite que des additions et des tests de comparaison.

2. *Propriétés de la suite* (θ_n)

a) Établir que $\theta_n < \theta_m$ pour $n < m$ et $\theta_n = \theta_m$ pour $n \geq m$.

b) Montrer que $\theta_m \leq \theta < \theta_m + \alpha_N$.

c) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire que :

$$\tan\,\theta_m \leq \tan\,\theta < \tan\,\theta_m + 2\cdot 10^{-N}$$

Ainsi, le nombre réel $\tan\,\theta_m + 10^{-N}$ est une valeur approchée de $\tan\,\theta$ à 10^{-N} près.

3. On étudie dans cette question un algorithme permettant d'obtenir $\tan\,\theta_m$.

a) Pour tout nombre entier naturel n, on pose $k_n = 10^{-h(n)}$. Montrer que, pour $1 \leq n \leq m$:

$$\tan\,\theta_n = \frac{\tan\,\theta_{n-1} + k_n}{1 - k_n\,\tan\,\theta_{n-1}}$$

b) On considère les $m+1$ couples de nombres réels définis par $(a_0,\ b_0)\ = (1,\ 0)$ et, pour $1 \leq n \leq m$:

$$(a_n,\ b_n)\ = (a_{n-1} - k_n\ b_{n-1},\ k_n\ a_{n-1} + b_{n-1})$$

Montrer que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à m :

$$\tan\,\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$$

c) Montrer que l'algorithme ainsi décrit permet de déterminer $\tan\,\theta_m$ en n'effectuant que des additions, des multiplications par des puissances de 10 et une seule division.

On précisera en fonction de m le nombre d'additions et le nombre de multiplications par des puissances de 10 ainsi effectuées.

PARTIE III

Dans cette partie, à l'aide des résultats obtenus dans la partie I, on étudie la complexité de l'algorithme décrit dans la partie II.

Pour tout nombre réel x positif ou nul, on note $\mathrm{Int}(x)$ la partie entière de x.

1. Pour tout nombre entier k tel que $1 \leq k \leq N$, on désigne par X_k le nombre des entiers naturels non nuls p tels que $h(p) = k$.

a) Établir que $m = X_1 + X_2 + \ \cdots\ + X_N$.

b) Prouver que $X_1 = \mathrm{Int}\left(\dfrac{\theta}{\alpha_1}\right)$. Montrer que $X_1 \leq 7$.

c) Établir que $X_k = \mathrm{Int}\left(\dfrac{\theta - X_1\ \alpha_1 - \ \cdots\ - X_{k-1}\ \alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)$ pour $2 \leq k \leq N$. Montrer que $X_k \leq 9$.

d) Montrer enfin que $m \leq 9\ N - 2$.

2. On étudie dans cette question la complexité de l'algorithme donnant $h(1)$, $h(2)$,..., $h(m)$.

a) Soit T_N le nombre de tests de comparaison à effectuer. Exprimer T_N en fonction de X_1, X_2,..., X_N. Donner un majorant de T_N indépendant de θ.

b) Soit A_N le nombre d'additions à effectuer. Exprimer A_N en fonction de X_1, X_2,..., X_N. Donner un majorant de A_N.

3. On détermine à l'aide des algorithmes précédents une valeur approchée de $\tan\,\theta$ à 10^{-N} près. Donner des majorants indépendants de θ des nombres suivants :

a) nombre total de tests de comparaison effectués ;

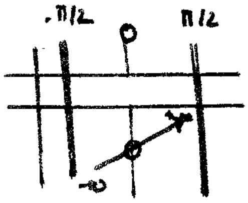
b) nombre total d'additions effectuées ;

c) nombre total de multiplications par des puissances de 10 effectuées ;

d) nombre total de divisions effectuées.

PARTIE I

1.. Etude de la fonction tangente..

a.. 

Notons que $\tan'0 = 1$ et $\tan'\frac{\pi}{4} = 2$.

b.. Il suffit de remarquer que :

- tan est périodique de période π (on se ramène à $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$)
- tan est impaire pour (on se ramène à $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$)
- $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{1}{\tan x}$ (on se ramène à $\theta \in [0,\frac{\pi}{4}[$)

2.. Etude de la fonction réciproque de la fonction tangente.

a.. Notons f la restriction de tan à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. f est continue et strictement croissante sur cet intervalle. de plus $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$. f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

b.. f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1+\tan^2 x \neq 0$, par conséquent $g = f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{(f'\circ f^{-1})(t)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} = \frac{1}{1+\tan^2(f^{-1}(t))} = \frac{1}{1+t^2}$$

Notons que g' est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

c.. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{p} (-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{p+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1-(-1)^{p+1}t^{2p+2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^{p+1}t^{2p+2}}{1+t^2}$$

Donc $$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{p+1}\frac{t^{2p+2}}{1+t^2}$$

d.. Ce qui précède donne pour $p=0$: $\frac{1}{1+t^2} = 1 - \frac{t^2}{1+t^2}$

pour $p=1$: $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+t^2} - 1 = -\frac{t^2}{1+t^2} \leq 0$ et $\frac{1}{1+t^2} - (1-t^2) = \frac{t^4}{1+t^2} \geq 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $1-t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Intégrons ce qui précède entre 0 et x.

$$\int_0^x (1-t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x g'(t)\,dt = g(x)-g(0) = g(x) \leq \int_0^x dt$$

Donc $\underline{\underline{x-\frac{x^3}{3} \leq g(x) \leq x}}$ et ceci pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

e.. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Soit $p\in\mathbb{N}$.

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{p+1}\frac{t^{2p+2}}{1+t^2}.$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt + (-1)^{p+1}\int_0^x \frac{t^{2p+2}}{1+t^2}\,dt$$

Donc $g(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_p(x)$ où $R_p(x) = (-1)^{p+1}\int_0^x \frac{t^{2p+2}}{1+t^2}\,dt$.

Notons que $|R_p(x)| = \int_0^x \frac{t^{2p+2}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^x t^{2p+2}\,dt = \frac{x^{2p+3}}{2p+3}$.

Donc $\underline{\underline{g(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_p(x) \text{ où } R_p(x) = (-1)^{p+1}\int_0^x \frac{t^{2p+2}}{1+t^2}\,dt \text{ avec } |R_p(x)| \leq \frac{x^{2p+3}}{2p+3}}}$.

3.. Construction de la suite $(\alpha_n)_{0\leq \alpha_n \leq N+1}$.

a.. g est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$

fixons n dans $[\![0,N]\!]$

$\exists!\, \alpha_n \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\quad g(\alpha_n) = 10^{-n}$.

Donc $\exists!\,\alpha_n\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan\alpha_n = 10^{-n}$

$\tan$ est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\tan 0 = 0$ et $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

Comme $10^{-n}\in]0,1]$: $\alpha_n\in]0,\frac{\pi}{4}]$.

Par conséquent : $\exists!\,\alpha_n\in]0,\frac{\pi}{4}]$, $\tan\alpha_n = 10^{-n}$.

Notons que : $\alpha_n = g(10^{-n})$.

$\alpha_0 = g(1) = \frac{\pi}{4}$.

b.. $\forall n\in[\![0,N]\!]$, $\alpha_n > 0 = \alpha_{N+1}$; pour montrer que $(\alpha_n)_{n\in[\![0,N+1]\!]}$ est strictement décroissante il suffit de montrer que $(\alpha_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ est strictement décroissante.

$\forall n\in[\![0,N-1]\!]$, $\alpha_{n+1}-\alpha_n = g(10^{-n-1}) - g(10^{-n}) \underset{\uparrow}{<} 0$

$\forall n\in[\![0,N-1]\!]$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$; c'est ce qu'il fallait montrer. $\uparrow$ g est strictement croissante et $10^{-n-1} < 10^{-n}$.

c.. $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_{N+1} = 0$ et $\forall n\in[\![1,N+1]\!]$, $\alpha_n < \alpha_{n-1}$, par conséquent $\left([\alpha_n,\alpha_{n-1}[\right)_{n\in[\![1,N+1]\!]}$ est une partition de $[0,\frac{\pi}{4}[$. Donc $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}[$, $\exists!\,n\in[\![1,N+1]\!]$, $x\in[\alpha_n,\alpha_{n-1}[$

Par conséquent : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[, \exists ! n \in [\![1, N+1]\!], \alpha_n \leq x < \alpha_{n-1}$.

4. Etude de la suite $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq N+1}$

a.. Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = g(10x) - 10g(x)$ et montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) < 0$

Comme $\varphi(0) = 0$ il suffit de montrer que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (1)

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = 10g'(10x) - 10g'(x) = 10\left[\frac{1}{1+(10x)^2} - \frac{1}{1+x^2}\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) < 0$ (2)

(1) et (2) montrent que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(10x) - 10g(x) < 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(10x) < 10g(x)$.

Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. $g(10 \times 10^{-n-1}) < 10g(10^{-n-1})$ donc $\alpha_n = g(10^{-n}) = g(10 \times 10^{-n-1}) < 10g(10^{-n-1}) = 10\alpha_{n+1}$

$\forall n \in [\![0, N-1]\!]$, $\alpha_n < 10\alpha_{n+1}$. (3)

b.. Soit $n \in [\![0, N]\!]$.

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^3}{3} \leq g(x) \leq x$ donc :

$$10^{-n} - \frac{(10^{-n})^3}{3} \leq g(10^{-n}) = \alpha_n \leq 10^{-n}$$

donc $\frac{1}{10^n} - \frac{1}{3 \times 10^{3n}} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{10^n}$

ou $\frac{1}{10^n}\left[1 - \frac{1}{3 \times 10^{2n}}\right] \leq \alpha_n \leq \frac{1}{10^n}$

c.. Supposons que l'on ait $\alpha_n < a\,\alpha_{n+1}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0, N-1]\!]$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ (si $a \leq 0$ ...!!)

Alors $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![0, N-1]\!]$, $\frac{1}{10^n}\left[1 - \frac{1}{3 \times 10^{2n}}\right] \leq \alpha_n < a\,\alpha_{n+1} \leq \frac{a}{10^{n+1}}$

donc $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![0, N-1]\!]$, $10\left[1 - \frac{1}{3 \times 10^{2n}}\right] < a$ $\left(\frac{1}{10^n}\left[1 - \frac{1}{3 \times 10^{2n}}\right] < \frac{a}{10^{n+1}}\right)$

Par conséquent : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $10\left[1 - \frac{1}{3 \times 10^{2(N-1)}}\right] < a$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $10 \leq a$!

Dans l'égalité (3), on ne peut pas remplacer 10 par un nombre strictement plus petit (indépendant de n et N).

d.. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$.

Pour avoir $9\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ il suffit d'avoir $9\alpha_{n+1} \leq \frac{1}{10^n}\left(1 - \frac{1}{3\times 10^{2n}}\right)$

Or $\alpha_{n+1} \leq \frac{1}{10^{n+1}}$

Donc pour avoir $9\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ il suffit d'avoir $\frac{9}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^n}\left(1 - \frac{1}{3\times 10^{2n}}\right)$, soit :

$0{,}9 \leq 1 - \frac{1}{3\times 10^{2n}}$, ou encore : $10 = \frac{1}{0{,}1} < 3\times 10^{2n}$.

Pour $n \geq 1$ cette dernière égalité est claire donc $9\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$

Finalement : $\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ 9\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.

e.. $7\alpha_1 \leq \alpha_0 < 8\alpha_1$ $\underset{\alpha_0 = \frac{\pi}{4}\,!}{\text{dès que}\longrightarrow}$: $\frac{\pi}{32} < \alpha_1 \leq \frac{\pi}{28}$ ou $\tan\frac{\pi}{32} < \tan\alpha_1 = \frac{1}{10} < \tan\frac{\pi}{28}$.

$\tan\frac{\pi}{32} \simeq 0{,}117$ et $\tan\frac{\pi}{32} \simeq 0{,}098$

Par conséquent on a bien : $7\alpha_1 \leq \alpha_0 < 8\alpha_1$.

V2 $\frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{3\times 10^{2\times 1}}\right) \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{10}$; $\frac{299}{3000} \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{10}$

→ $7\alpha_1 \leq \frac{7}{10} = 0{,}7 = \frac{2{,}8}{4} \leq \frac{\pi}{4} = \alpha_0$

→ $8\alpha_1 \geq \frac{8\times 299}{3000} \geq \frac{8\times 297}{3\times 1000} = 8\times 0{,}099 = 0{,}792 = \frac{3{,}168}{4} > \frac{\pi}{4} = \alpha_0$!

5.. Algorithme de valeurs approchées des nombres α_n.

Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Soit $p \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = g(10^{-n}) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(10^{-n})^{2k+1}}{2k+1} + R_p(10^{-n}) \text{ avec } |R_p(10^{-n})| \leq \frac{(10^{-n})^{2p+3}}{2p+3}.$$

Par conséquent $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{(10^{-n})^{2k+1}}{2k+1}$ est une valeur approchée à 10^{-K} près dès que

p satisfait à $\frac{(10^{-n})^{2p+3}}{2p+3} \leq 10^{-K}$.

Notons que cette dernière condition est vérifiée pour le plus petit élément de IN supérieur ou égal à $\frac{K-3}{2n}$

Soit p le plus petit élément de N supérieur ou égal à $\frac{K-3}{2n}$.

$p \geq \frac{K-3}{2n}$; $2p+3 \geq \frac{K-3}{n} + 3 = \frac{K+3(n-1)}{n}$; $-(n)(2p+3) \leq -K - 3(n-1)$

$\frac{(10^{-n})^{2p+3}}{2p+3} \leq \frac{10^{-K}10^{-3(n-1)}}{2p+3} \leq \frac{10^{-K}\times 1}{2p+3} \leq 10^{-K}$. Donc pour avoir une valeur approchée

de α_n à 10^{-K} il suffit de prendre $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{(10^{-n})^{2k+1}}{2k+1}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq \frac{K-3}{2n}$.

1°. Construction de la suite (θ_n).

o.. Rappel.. Si $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, $\exists !\, i \in [\![1, N+1]\!]$ tel que $\alpha_i \leq x < \alpha_{i-1}$

<u>Unicité</u>.. Supposons que h et l soient deux applications solutions du problème. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(n) = l(n)$.

Notons que : $h(0) = 0 = l(0)$.

Montrons maintenant à l'aide d'une récurrence faible que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h(n) = l(n)$.

→ $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$. $\exists !\, i \in [\![1, N+1]\!]$, tel que $\alpha_i \leq \theta < \alpha_{i-1}$

Or : $h(1) \in [\![0, N+1]\!]$; mieux $h(1) \in [\![1, N+1]\!]$

$\alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1}$ avec $h(1) \in [\![1, N+1]\!]$. Ceci prouve que $h(1) = i$.

De même $l(1) = i$

Finalement $h(1) = l(1)$. Ceci prouve la propriété pour $n=1$

▸ Supposons la propriété vraie jusqu'à n et prouvons la pour $n+1$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $h(k) = l(k)$.

En particulier $\theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n)}] = \theta - [\alpha_{l(1)} + \cdots + \alpha_{l(n)}]$. Notons x ce réel.

$\exists !\, j \in [\![1, N+1]\!]$ tel que : $\alpha_j \leq x < \alpha_{j-1}$ car x est un élément de $[0, \frac{\pi}{4}[$

$\left(0 \leq \alpha_{h(n+1)} \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n)}] < \alpha_{h(n+1)-1} \leq \frac{\pi}{4} \right)$

Or $h(n+1) \in [\![1, N+1]\!]$, $l(n+1) \in [\![1, N+1]\!]$, $\alpha_{h(n+1)} \leq x < \alpha_{h(n+1)-1}$ et $\alpha_{l(n+1)} \leq x < \alpha_{l(n+1)-1}$

Donc $h(n+1) = j = l(n+1)$. Ce qui prouve que $h(n+1) = l(n+1)$ et achève la récurrence.

<u>Existence</u>.. Pour prouver l'existence de l'application h nous allons prouver par récurrence faible que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une suite $(h(0), h(1), h(2), \dots, h(n))$ d'éléments de $[\![0, N+1]\!]$ vérifiant :

- $h(0) = 0$
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $h(k) \geq 1$
- $\alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1}$
- $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\alpha_{h(k)} \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(k-1)}] < \alpha_{h(k)-1}$

. Pour $n=1$

Posons $h(0) = 0$ et soit $h(1)$ l'unique élément de $[\![1, N+1]\!]$ tel que : $\alpha_i \leq \theta < \alpha_{i-1}$ (.. $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$)

Alors $h(0) = 0$

$h(1) \geq 1$

$\alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1}$

Ceci suffit pour prouver la propriété pour $n=1$.

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Posons $x = \theta - [\alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)}]$

L'hypothèse de récurrence donne : $\alpha_{h(n)} \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}] < \alpha_{h(n)-1}$

Donc $0 \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n)}] = x < \alpha_{h(n)-1} - \alpha_{h(n)}$

ou $h(n) = 1$ et : $\alpha_{h(n)-1} - \alpha_{h(n)} < \alpha_{h(n)-1} = \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$; $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$

ou $h(n) > 1$ et : $\alpha_{h(n)-1} - \alpha_{h(n)} \leq \alpha_{h(n)-1} < \frac{\pi}{4}$; $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$

dans les deux cas : $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$.

$\exists! i \in [\![1, N+1]\!]$, $\alpha_i \leq x < \alpha_{i-1}$. Posons $h(n+1) = i$. $h(n+1) \in [\![1, N+1]\!]$ et

$\alpha_{h(n+1)} \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n)}] < \alpha_{h(n+1)-1}$.

La suite $(h(0), h(1), \ldots, h(n), h(n+1))$ vérifie la propriété à l'ordre $n+1$. Ceci achève la récurrence.

b) Montrons que h est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvons que $h(n+1) \geq h(n)$.

C'est sans problème pour $n=0$. Supposons que $n \geq 1$

Imaginons un instant que : $h(n+1) < h(n)$; $h(n+1) \leq h(n) - 1$. Donc $\alpha_{h(n+1)} \geq \alpha_{h(n)-1}$

$\theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}] < \alpha_{h(n)-1} \leq \alpha_{h(n+1)} \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)}]$

Donc $\theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}] < \theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n)}]$;

Par conséquent : $\alpha_{h(n)} < 0$!

Par conséquent <u>h est croissante</u>

Supposons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $h(k) \leq N$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{h(k)} \geq \alpha_N$ $\quad$ ($\alpha_{h(k)} \geq \alpha_N$) réécriture !

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $0 < \alpha_{h(n)} \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}] \leq \theta - (n-1)\alpha_N$

Or $\lim_{n \to +\infty} (\theta - (n-1)\alpha_N) = -\infty$. Donc pour n assez grand $\theta - [\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}]$ est strictement négatif !

Par conséquent : il existe au moins un entier n_0 tel que $h(n_0) = N+1$. Comme h est croissante et à valeurs dans $[\![0, N+1]\!]$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow h(n) = N+1$.

c) Montrons à l'aide d'une récurrence ~~faible~~ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'obtention de $h(1), h(2), \ldots, h(n)$ et $\theta_1, \theta_2, \ldots$ on ne nécessite que des additions et des tests de comparaison.

→ Pour $n=1$. $h(1)$ s'obtient en trouvant l'unique $i \in [\![1, N+1]\!]$ tel que : $\alpha_i \leq \theta < \alpha_{i-1}$

ceci se fait <u>en comparant</u> θ aux termes de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$.

Pour θ_1 pas de problème car $\theta_1 = \alpha_{h(1)}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.
Pour obtenir $h(n+1)$ il suffit de trouver l'unique élément $i \in [\![1, N+1]\!]$ tel que $\alpha_i \leq \theta - \theta_n < \alpha_{i-1}$.
Cela se fait en comparant $\theta - \theta_n$ aux termes de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ (ou $\alpha_{h(n)}, \dots, \alpha_N$)
on obtient alors θ_{n+1} en ajoutant à θ_n, $\alpha_{h(n+1)}$. Ceci achève la récurrence.

2.. Propriétés de la suite (θ_n).

a) Clairement $\forall n \in [\![m, +\infty[\![$, $\theta_n - \theta_m \overset{\text{à un ahum près}}{=} \alpha_{h(m+1)} + \alpha_{h(m+2)} + \dots + \alpha_{h(n)} = \alpha_{N+1} + \alpha_{N+1} + \dots + \alpha_{N+1} = 0$.

$\forall n \in [\![0, m-1]\!]$, $\theta_m - \theta_n = \alpha_{h(n+1)} + \alpha_{h(n+2)} + \dots + \alpha_{h(m)} \geq \alpha_{h(m)} > \alpha_{N+1} = 0$

Donc $\underline{\forall n \in [\![0, m-1]\!],\ \theta_n < \theta_m \text{ et } \forall n \in [\![m, +\infty[\![,\ \theta_n = \theta_m}$.

b) $0 = \alpha_{h(m+1)} \leq \theta - [\alpha_{h(1)} + \dots + \alpha_{h(m)}] = \theta - \theta_m < \alpha_{h(m+1)-1} = \alpha_{N+1-1} = \alpha_N$

Donc $0 \leq \theta - \theta_m < \alpha_N$, soit: $\underline{\theta_m \leq \theta < \theta_m + \alpha_N}$.

c) $\forall x \in [\theta_m, \theta]$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x$

$\forall x \in [\theta_m, \theta]$, $0 \leq \tan' x \leq 1 + \tan^2 \theta$

Donc $0 \leq \tan\theta - \tan\theta_m \leq (1 + \tan^2\theta)(\theta - \theta_m) \underset{1+\tan^2\theta \leq 2}{\leq} 2(\theta - \theta_m) < 2\alpha_N \underset{Q4\,b)}{\leq} 2 \times 10^{-N}$

Par conséquent: $\underline{\tan\theta_m \leq \tan\theta < \tan\theta_m + 2.10^{-N}}$

Ceci donne encore $-10^{-N} \leq \tan\theta - (\tan\theta_m + 10^{-N}) < 10^{-N}$; $\underline{|\tan\theta - (\tan\theta_m + 10^{-N})| \leq 10^{-N}}$.
$\tan\theta_m + 10^{-N}$ est donc une valeur approchée de $\tan\theta$ à 10^{-N} près.

3.- a.. Soit $n \in [\![1, m]\!]$. $\theta_n = \theta_{n-1} + \alpha_{h(n)}$. Posons $k_n = 10^{-h(n)}$.

$$\tan\theta_n = \frac{\tan\theta_{n-1} + \tan\alpha_{h(n)}}{1 - \tan\theta_{n-1}\tan\alpha_{h(n)}} = \frac{\tan\theta_{n-1} + 10^{-h(n)}}{1 - \tan\theta_{n-1}\,10^{-h(n)}} = \frac{\tan\theta_{n-1} + k_n}{1 - k_n\tan\theta_{n-1}}$$

$$\underline{\forall n \in [\![1, m]\!],\ \tan\theta_n = \frac{\tan\theta_{n-1} + k_n}{1 - k_n\tan\theta_{n-1}} \quad \text{avec } k_n = 10^{-h(n)}}$$

b.. Montrons par récurrence que: $\forall n \in [\![0, m]\!]$, $\tan\theta_n = \dfrac{b_n}{a_n}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $\tan\theta_0 = 0 = \dfrac{0}{1} = \dfrac{b_0}{a_0}$
- Supposons, pour changer, la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in [\![1, m]\!]$) et montrons la pour n.

$$\tan\theta_n = \frac{\tan\theta_{n-1}+k_n}{1-k_n\tan\theta_{n-1}} = \frac{\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}+k_n}{1-k_n\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}} = \frac{b_{n-1}+a_{n-1}k_n}{a_{n-1}-k_n b_{n-1}} = \frac{b_n}{a_n}$$
. Ceci achève la récurrence.

c.. Pour obtenir $\tan\theta_m$ il faut (et il suffit)

→ Déterminer $h(1), h(2), \dots, h(m)$. Pour ce faire il faudra successivement calculer $\theta-\alpha_{h(1)}$, $\theta-\alpha_{h(1)}-\alpha_{h(2)}, \dots, \theta-\alpha_{h(1)}-\alpha_{h(2)}-\dots-\alpha_{h(m)}$; cela nécessite m "additions".

En nécessaire pour s'apercevoir que $h(m+1)=N+1$.

→ Calculer $a_1, a_2, \dots, a_m$, $b_1, b_2, \dots, b_m$.
Le passage de (a_{n-1}, b_{n-1}) à (a_n, b_n) nécessite deux "additions" et deux multiplications par des puissances de 10 ceci pour tout $n \in [\![1,m]\!]$.
Il faut donc pour calculer $a_1, a_2, \dots, a_m$ et $b_1, b_2, \dots, b_m$ $2m$ additions et $2m$ multiplications par des puissances de 10.

→ Calculer $\tan\theta_m$ en divisant b_m par a_m. Ceci nécessite 1 division.

Récapitulons. Pour calculer $\tan\theta_m$ on fait : $m+2m=$ <u>3m additions</u>, <u>2m multiplications par des puissances de 10 et une division</u>. Notons que l'on a encore peu d'information sur m ... mais il y a une 3ème partie !

PARTIE III

Q1 .. a) Notons que pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, $\{p \in \mathbb{N}^* \mid h(p)=k\} \subset [\![1,m]\!]$.
Mieux si l'on pose, pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, $A_k = \{p \in \mathbb{N}^* \mid h(p)=k\}$, $A_1, A_2, \dots, A_N$ sont N ensembles deux à deux disjoints de réunion $[\![1,m]\!]$ ($h([\![1,m]\!]) \subset [\![1,N]\!]$).
Par conséquent : $m = \mathrm{card}([\![1,m]\!]) = \mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = \mathrm{card}\,A_1 + \mathrm{card}\,A_2 + \dots + \mathrm{card}\,A_N$.
Ce qui suffit pour dire que : $\underline{m = X_1+X_2+\dots+X_N}$.

b) Supposons que X_1 prenne la valeur 0. (Rappelons que l'application h est croissante)
On a dans ce cas $h(1)\geq 2$. $h(1)-1 \geq 1$; $\alpha_{h(1)-1} < \alpha_1$

$0 \leq \alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1} < \alpha_1$

$0 \leq \frac{\theta}{\alpha_1} < 1$. $E\left(\frac{\theta}{\alpha_1}\right)=0$.

Réciproquement si $\mathrm{Int}\left(\frac{\theta}{\alpha_1}\right)=0$; $0 \leq \frac{\theta}{\alpha_1} < 1$; $0 \leq \theta < \alpha_1$.
Comme $\alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1}$ on a : $\alpha_{h(1)-1} \leq \alpha_1$; soit $h(1)-1 \geq 1$; $h(1) \geq 2$
Donc $\{p \in \mathbb{N}^* \mid h(p)=1\} = \varnothing$. X_1 prend la valeur 0.

En conclusion X_1 prend la valeur 0 ssi $\mathrm{Int}\left(\frac{\theta}{\alpha_1}\right)=0$. $\mathrm{Int}\left(\frac{\theta}{\alpha_1}\right)=X_1$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Dire que X_1 prend la valeur q c'est dire que :
$1 = h(1) = h(2) = \cdots = h(q) < h(q+1)$ soit encore :

$$\begin{cases} \alpha_1 \leq \theta < \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \\ \alpha_1 \leq \theta - \alpha_1 < \alpha_0 \\ \cdots\cdots \\ \alpha_1 \leq \theta - (q-1)\alpha_1 < \alpha_0 \\ \theta - q\alpha_1 < \alpha_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \{ \alpha_1 + (q-1)\alpha_1 \leq \theta < \alpha_1 + q\alpha_1$$

soit : $q \leq \frac{\theta}{\alpha_1} < q+1$

c'est à dire : $\mathrm{Int}\left(\frac{\theta}{\alpha_1}\right) = q = X_1$!

Donc $\underline{X_1 = \mathrm{Int}\left(\frac{\theta}{\alpha_1}\right)}$.

Rappelons que : $7\alpha_1 \leq \alpha_0 < 8\alpha_1$; $\mathrm{Int}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) = 7$

Or $\theta < \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$; donc $\mathrm{Int}\left(\frac{\theta}{\alpha_1}\right) \leqq \mathrm{Int}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) = 7$

Finalement : $\underline{X_1 \leq 7}$.

c) Il suffit de reprendre le raisonnement précédent. Soit $k \in [\![2, N]\!]$.
Epargnons nous le cas particulier initial, certain à quelques abus près dans le cas général.
Posons $\hat{\theta} = \theta - X_1\alpha_1 - \cdots - X_{k-1}\alpha_{k-1}$ (toujours les abus ! Je vous renvoie aux conceptions ; encore que ...)
Si $r = X_1 + X_2 + \cdots + X_{k-1}$ alors $\hat{\theta} = \theta - (\alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(r)})$

Dire que X_k prend la valeur q signifie alors que :

$\alpha_k \leq \hat{\theta} < \alpha_{k-1}$
$\alpha_k \leq \hat{\theta} - \alpha_k < \alpha_{k-1}$ soit : $\alpha_k \leq \hat{\theta} - (q-1)\alpha_k$ et $\hat{\theta} - q\alpha_k < \alpha_k$
$\alpha_k \leq \hat{\theta} - 2\alpha_k < \alpha_{k-1}$ ou : $q\alpha_k \leq \hat{\theta} < (q+1)\alpha_k$
$\cdots\cdots$
$\alpha_k \leq \hat{\theta} - (q-1)\alpha_k < \alpha_{k-1}$ c'est à dire : $q \leq \frac{\hat{\theta}}{\alpha_k} < q+1$; ie $q = \mathrm{Int}\left(\frac{\hat{\theta}}{\alpha_k}\right)$.
et $\hat{\theta} - q\alpha_k < \alpha_k$

Donc dire que X_k prend la valeur q signifie que : $q = \mathrm{Int}\left(\frac{\theta - X_1\alpha_1 - \cdots - X_{k-1}\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)$

Finalement : $\underline{X_k = \mathrm{Int}\left(\frac{\theta - X_1\alpha_1 - \cdots - X_{k-1}\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)}$.

Notons aussi que : $\alpha_k < \theta - x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 - \cdots - x_{k-1}\alpha_{k-1} < \alpha_{k-1}$

Donc $1 < \dfrac{\theta - (x_1\alpha_1 - \cdots - x_{k-1}\alpha_{k-1})}{\alpha_k} < \dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}$

Donc $x_k = \mathrm{Int}\left(\dfrac{\theta - (x_1\alpha_1 - \cdots - x_{k-1}\alpha_{k-1})}{\alpha_k}\right) \le \mathrm{Int}\left(\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)$; or : $\alpha_{k-1} < 10\,\alpha_k$ (Q4a)

donc $\mathrm{Int}\left(\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right) < 10$; $\mathrm{Int}\left(\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right) \le 9$ (on a des entiers)

↑ en fait on a égalité avec Q4 d)

Finalement : $\underline{\underline{x_k \le 9}}$.

d) $m = x_1 + x_2 + \cdots + x_N \le 7 + (N-1)\times 9 = 9N-2$. $\underline{\underline{m \le 9N-2}}$.

↑ $x_1 \le 7$ et $x_k \le 9$ pour $k \in [\![2,N]\!]$.

Q6.. a) Supposons que $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, …, $x_N = t_N$. $t_1 + t_2 + \cdots + t_N = m$.

Testons ! le test $\alpha_1 \le \theta$ est positif et détermine $h(1)$

le test $\alpha_1 \le \theta - \alpha_1$ — — $h(2)$

.....

le test $\alpha_1 \le \theta - (t_1 - 1)\alpha_1$: positif et détermine $h(t_1)$

le test $\alpha_1 \le \theta - t_1\alpha_1$: négatif

Nous avons fait $t_1 + 1$ tests. Nous avons $h(1) = h(2) = \cdots = h(t_1) = 1$ et nous savons que :

$\theta - t_1\alpha_1 < \alpha_1$. Posons $x_1 = \theta - t_1\alpha_1$

Continuons à tester

le test $\alpha_2 \le x_1$ est positif et détermine $h(t_1+1)$

le test $\alpha_2 \le x_1 - \alpha_2$ " " $h(t_1+2)$

le test $\alpha_2 \le x_1 - (t_2 - 1)\alpha_2$ est positif et détermine $h(t_1+t_2)$

le test $\alpha_2 \le x_1 - t_2\alpha_2$ est négatif

Nous avons fait $t_2 + 1$ tests. Nous avons $h(t_1+1) = h(t_1+2) = \cdots = h(t_1+t_2) = 2$ et nous savons que $x_1 - t_2\alpha_2 = \theta - t_1\alpha_1 - t_2\alpha_2 < \alpha_2$

On pose $x_2 = \theta - t_1\alpha_1 - t_2\alpha_2$ et continue en comparant à α_3.

En poursuivant ainsi nous aurons fait $(t_1+1) + (t_2+1) + \cdots + (t_N+1) = m + N$ tests

Donc $\underline{\underline{T_N = x_1 + x_2 + \cdots + x_N + N}}$. Ceci donne $T_N \le m + N \le 9N - 2 + N = 10N - 2$.

b) le nombre d'additions est $m \cdot A_N = m = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ (on calcule successivement $\theta - \alpha_{k(1)}$, $\theta - \alpha_{k(1)} - \alpha_{k(2)}$, ..., $\theta - \alpha_{k(1)} - \alpha_{k(2)} - \dots - \alpha_{k(m)}$.

$A_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. $A_N = m \leq 9N - 2$.

3.– a) le Nb total de tests est majoré par $10N - 2$.

b) le nombre total d'additions $3m + 1$ est majoré par $27N - 5$ *

c) le nombre total de multiplications par des puissances de 10 (m) est majoré par $18N - 4$

d) le nombre total de division est 1.

Ne reste plus qu'à programmer !... et à étudier $E(X_i)$! * Ne pas oublier d'ajouter à $\tan \theta_n : 10^{-N}$!
(voir II Q 2c)