

PARTIE I

Q1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) \sim -x$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1 - \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1-1/n)} = e^{\frac{\ln(1-1/n)}{1/n}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-1/n)}{1/n} = -1$ d'après a) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$.

Q2. a) $f: x \mapsto e^{-x}$ et de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f sur $[0, 1]$ à l'ordre n .

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du.$$

Une récurrence simple montre que: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$.

ce qui précède donne donc: $e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^k e^{-0} + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} (-1)^{n+1} e^{-u} du$

Par conséquent: $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} \leq \frac{1}{n!}$ (fin, non?)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 du = \frac{1}{n!}$

Par conséquent: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}| = |(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du| = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$ (c'est ce premier résultat du programme!).

PARTIE II

coïncidences avec remise

 $N \in \mathbb{N}^*$

Q1. Soit $i \in \{1, N\}$. $p(X_i = 1) = \frac{N^{i-1}}{N^N}$ ← choix des boules des tirages $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$

$\forall i \in \{1, N\}$, $E(X_i) = p(X_i = 1) = \frac{1}{N}$.

donc $\forall i \in \{1, N\}$, $E(X_i) = \frac{1}{N}$. $E(S_N) = \sum_{i=1}^N E(X_i) = N \times \frac{1}{N}$. $E(S_N) = 1$

Q 2 a) clairement si $k \in \mathbb{N}$ et si $k > N : p(N, k) = 0$.

Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Notons A_k l'événement $\{S_N = k\}$.

$$p(N, k) = p(A_k) = \frac{\text{card } A_k}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{card } A_k}{N^N}$$

Appeler coïncidence le fait que le numéro de la boule sortie à un tirage soit égal au rang du tirage.

A_k se réalise si et seulement si au cours des N tirages on a eu k coïncidences et $N-k$ non-coïncidences. Notons qu'à partir des $N-k$ tirages n'ayant pas donné une coïncidence on a tiré une des $N-1$ boules dont le numéro est différent du rang du tirage.

Pour caractériser $\text{card } A_k = \binom{N}{k} (N-1)^{N-k}$ ← doit d'une boule pour les $N-k$ tirages ne donnant pas une coïncidence
↑ doit des k tirages ayant une coïncidence

Finalement $p(N, k) = \frac{\binom{N}{k} (N-1)^{N-k}}{N^N}$; d'acc

$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, p(N, k) = \binom{N}{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} \quad \forall 0 \leq k \leq N.$

Remarque.. On pourrait aussi à l'aide de \mathbb{P}_i l'événement le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une coïncidence écrire :

$$p(N, k) = p(A_k) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \llbracket 1, N \rrbracket} p(\mathbb{P}_{i_1} \cap \mathbb{P}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbb{P}_{i_k} \cap (\bigcap \bar{\mathbb{P}}_i)) \quad \text{d'acc}$$

$$p(N, k) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \llbracket 1, N \rrbracket} p(\mathbb{P}_{i_1}) p(\mathbb{P}_{i_2}) \dots p(\mathbb{P}_{i_k}) \prod p(\bar{\mathbb{P}}_i) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \llbracket 1, N \rrbracket} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(\frac{N-1}{N}\right)^{N-k} \text{ et}$$

pour finir $p(N, k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k}$ $p(\mathbb{P}_i) = p(\mathbb{K}_i = 1) = \frac{1}{N}$

On pourrait aussi dire que : $S_N \sim \mathcal{B}(N, 1/N)$. Comme somme de N var de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/N$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \llbracket k, +\infty \rrbracket$.

$$\binom{N}{k} = \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k!} \sim \frac{N^k}{k!} ; \quad p(N, k) \sim \frac{N^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{-k}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = e^{-1} \text{ et } \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{-k} = 1$$

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} p(N, k) = \frac{1}{k!} e^{-1}$

(S_N) converge en loi vers une var qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

PARTIE III

Q1 a) $F(N, N) = 1$. Il y a une seule bijection de E_N sur lui-même ayant N points fixes : Id_{E_N}
 $F(N, N-1) = 0$. Il n'y a pas de E_N ayant fixé le $N^{\text{ème}}$ aussi !

b) Notons S_N l'ensemble des permutations de E_N et, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, S_N^k les éléments de S_N ayant k points fixes.

S_N est l'union disjointe de $S_N^0, S_N^1, \dots, S_N^N$; par conséquent :

$$N! = \text{card } S_N = \sum_{k=0}^N \text{card } S_N^k = \sum_{k=0}^N F(N, k)$$

$$\underline{\underline{N! = \sum_{k=0}^N F(N, k)}}$$

Q2 -- a) Pour construire une permutation de E_N ayant k points fixes, on choisit k points fixes et construit une permutation des $N-k$ points restants n'ayant pas de point fixe. Il y a $\binom{N}{k}$ manières de choisir les k points fixes et w_{N-k} manières de faire une permutation sans point fixe des $N-k$ autres points.

Par conséquent : $\underline{\underline{F(N, k) = \binom{N}{k} w_{N-k}}}$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

$$\text{b) } N! = \sum_{k=0}^N F(N, k) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} w_{N-k} = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{k!(N-k)!} w_{N-k}$$

$$\text{d'où } \underline{\underline{1 = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{w_{N-k}}{(N-k)!}}}$$

c) La SEULE question n'a trait que du problème. Néanmoins l'exercice est devenu connu "l'inversion de Pascal". Utilisons donc une démarche analogue à celle de la démonstration de la formule d'inversion.

partons à l'aide d'une récurrence facile que : $\forall N \in \mathbb{N}, \frac{w_N}{N!} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$

- La formule est vraie pour $N=0$ ($w_0=1, \frac{w_0}{0!}=1 = \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{k!}$)

- Supposons la propriété vraie jusqu'à N et montrons-la pour $N+1$.

$$1 = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \frac{w_{n+1-k}}{(n+1-k)!} = \frac{w_{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \frac{w_{n+1-k}}{(n+1-k)!} = \frac{w_{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n+1-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$k \in \{2, \dots, n+1\} \Rightarrow n+1-k \in \{0, \dots, n\} \oplus \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } \frac{w_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=0}^{n+1-k} \frac{(-1)^i}{(k+i)!} \binom{k}{k+i} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=k}^{n+1} \frac{1}{j!} \binom{k}{j} (-1)^{j-k} = 1 - \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^j \frac{(-1)^{j-k}}{j!} \binom{k}{j}$$

inverser des 2 Σ

$$\frac{w_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{k=1}^j (-1)^k \binom{k}{j} = 1 - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^j}{j!} \left[\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{k}{j} - 1 \right]$$

$$\binom{k}{j} = (-1)^k \binom{-j}{k} \quad \text{Binôme} \quad = 1 - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^j}{j!} \left[(1-1)^j - 1 \right] = 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Finalement $\frac{w_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{j!}$ ce qui achève la récurrence.

Par conséquent: $\frac{w_N}{N!} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

$$d) \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{w_N}{N!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \right) = e^{-1}; \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{w_N}{N!} = e^{-1}$$

Nous retiendrons que: $w_N \sim e^{-1} N!$

PARTIE IV

Dénominateur: $N \geq 2$.

Q3 a) soit $i \in \{3, \dots, N\}$. $E(Y_i) = P(Y_i=1) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$; $E(Y_i) = \frac{1}{N}$

Soit $(i, j) \in \{3, \dots, N\}^2$ tel que $i < j$.

$$E(Y_i Y_j) = P(Y_i Y_j = 1) = P(Y_i = 1 \text{ et } Y_j = 1) = \frac{(N-2)!}{N!} \leftarrow \text{Nb de tirages au hasard } B_i \text{ et } B_j \text{ distincts}$$

$$E(Y_i Y_j) = \frac{1}{N(N-1)} \leftarrow \text{Nb de tirages possibles}$$

b) $\text{cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j) = \frac{1}{N(N-1)} - \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N^2(N-1)}$

$$\text{cov}(Y_i, Y_j) = \frac{1}{N^2(N-1)}$$

c) Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes car $\text{cov}(Y_i, Y_j) \neq 0$

$$Q2 \quad E(T_N) = E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) = \sum_{i=1}^N E(Y_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} = 1. \quad \underline{\underline{E(T_N) = 1}}$$

$$V(T_N) = V(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) = \sum_{i=1}^N V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{COV}(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^N P(Y_i=1)P(Y_i=0) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{N^2(N-1)}$$

$$V(T_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) + 2 \times \binom{N}{2} \times \frac{1}{N^2(N-1)}$$

nombre de termes dans le \sum

$$V(T_N) = N \times \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) + 2 \times \frac{N(N-1)}{2} \times \frac{1}{N^2(N-1)}$$

$$V(T_N) = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} = 1. \quad \underline{\underline{V(T_N) = 1}} \dots \text{ce qui ne surprendra personne.}$$

$$Q3 \quad a) \quad q(N, k) = 0 \text{ si } k > N.$$

Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

$$q(N, k) = P(T_N = k) = \frac{\text{card}(\{T_N = k\})}{N!} = \frac{F(N, k)}{N!} \stackrel{\text{III 2 a)}}{=} \frac{\binom{N}{k} \omega_{N-k}}{N!} = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \underline{\underline{q(N, k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!}}}$$

$$b) \quad \text{Soit } k \in \mathbb{N}. \quad q(N, k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!} \vee \frac{e^{-(N-k)!}}{k!(N-k)!} = \frac{c^{-1}}{k!}$$

III 2 d

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} q(N, k) = \frac{e^{-1}}{k!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} p(N, k)$. ce qui n'est pas une queue surprenante !

PARTIE V

Q1.. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

$$\omega_{n-1} + \omega_{n-2} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$(n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}) = (n-1)(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$(n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}) = n(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$(n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}) = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(n-1)! (-1)^{n-1}}{(n-1)!} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - \underbrace{n! \frac{(-1)^n}{n!}}_{=0} - (-1)^{n-1} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} = \omega_n$$

Pour conclure : $\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = (n-1)(\omega_n + \omega_{n-1})$

Exercice .. Retrouver ce résultat directement (... commence par donner une image a distincte de $\pm a \pm$ et envisage deux cas 1°. a a pour image \pm
2°. a a pour image $b \notin \{\pm, a\}$)

Q2. a) $\bar{q}(N, 0) = q(N, N) = \frac{F(N, N)}{N!} = \frac{1}{N!}$

$\bar{q}(N, 1) = q(N, N-1) = \frac{F(N, N-1)}{N!} = 0$

b) soit $k \in \mathbb{N}$

$\bar{q}(N, k) = q(N, N-k) = \frac{\omega_k}{k!(N-k)!}$; $\omega_k = k!(N-k)! \bar{q}(N, k)$; $\omega_{k-1} = (k-1)!(N+1-k)! \bar{q}(N, k-1)$ et

$\omega_{k-2} = (k-2)!(N+2-k)! \bar{q}(N, k-2)$

$k!(N-k)! \bar{q}(N, k) = \omega_k = (k-1)(\omega_{k-1} + \omega_{k-2}) = (k-1)(k-1)!(N+1-k)! \bar{q}(N, k-1) + (k-1)!(N+2-k)! \bar{q}(N, k-2)$

Divisons par $(k-1)!(N-k)!$. Résultat :

$k \bar{q}(N, k) = (k-1)(N+1-k) \bar{q}(N, k-1) + (N+2-k)(N+1-k) \bar{q}(N, k-2)$

Soit : $\bar{q}(N, k) = \frac{N+1-k}{k} [(k-1) \bar{q}(N, k-1) + (N+2-k) \bar{q}(N, k-2)]$

Q3) ! $\rightarrow N : 1 \div N! \rightarrow A : 0 \rightarrow B : 1 \rightarrow K : L \neq 0 : K+1 \rightarrow K : (N-K+1) \div K \times$

$(N-K+1) \div K \times (K-1)B + (N+2-K)A \rightarrow C \ A$

$B \rightarrow A : C \rightarrow B : K < N \text{ Goto } 0 : \text{"FIN"}$

- $\omega_0 = 1$
- $\omega_1 = 0$
- $\omega_2 = 1$
- $\omega_3 = 2$
- $\omega_4 = 9$
- $\omega_5 = 44$
- $\omega_6 = 265$
- $\omega_7 = 1854$
- $\omega_8 = 187833$
- $\omega_9 = 133486$
- $\omega_{10} = 1334961$

- $k=0$ 0,000 000
- $k=1$ 0
- $k=2$ 0,000 012
- $k=3$ 0,000 066
- $k=4$ 0,000 521
- $k=5$ 0,003 056
- $k=6$ 0,015 236
- $k=7$ 0,061 210
- $k=8$ 0,383 941
- $k=9$ 0,367 879
- $k=10$ 0,367 879