CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES II

OPTION GENERALE

vendredi 19 mai 1995, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Sont autorisées: – Règles graduées.
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Ce problème est consacré à l'étude de la loi de Pareto (*Vilfredo Pareto 1848-1923*).

La première partie étudie les propriétés de cette loi. On montre ensuite, sur un exemple, comment elle permet de modéliser de façon très satisfaisante des phénomènes rencontrés en économie.
La seconde partie est l'étude de l'indice d'inégalité de Gini, d'abord dans un cadre général, puis dans le cas particulier d'une loi de Pareto.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont à valeurs réelles.

PARTIE I. La loi de Pareto.

Dans tout le problème x_0, C et α désignent trois nombres réels vérifiant $\alpha > 0$ et $x_0 + C > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Pareto de paramètres α, x_0 et C si X, à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, admet pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \forall x < x_0 \\ f(x) = \alpha \dfrac{(x_0 + C)^\alpha}{(x + C)^{\alpha+1}} & \forall x \geqslant x_0 \end{cases}$$

On dit alors que X suit $\mathcal{VP}(\alpha, x_0, C)$ (loi de Pareto à trois paramètres).

Lorsque $C = 0$, on dit que X suit $\mathcal{VP}(\alpha, x_0)$ (loi de Pareto à deux paramètres) au lieu de $\mathcal{VP}(\alpha, x_0, 0)$. Dans ce cas x_0 est strictement positif et X admet pour densité la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \forall x < x_0 \\ f(x) = \alpha \dfrac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \forall x \geqslant x_0 \end{cases}$$

A. Quelques résultats probabilistes.

1. Soit X une variable aléatoire suivant $VP(\alpha, x_0, C)$.
a) Vérifier que f est bien une fonction de densité.
b) Déterminer la fonction de répartition de X

2. Soit X une variable aléatoire suivant $VP(\alpha, x_0)$.
a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une espérance et la calculer dans ce cas.
b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une variance et la calculer dans ce cas.

3. Soient une variable aléatoire X suivant $VP(\alpha, x_0)$ et un réel strictement positif λ. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \lambda X$. Quelle loi reconnaît-on ?

4. **a)** Soient une variable aléatoire X suivant $VP(\alpha, x_0)$ et un réel μ. Montrer que la variable aléatoire $U = X + \mu$ suit une loi de Pareto à trois paramètres que l'on déterminera.

b) Réciproquement, soit une variable aléatoire Z suivant $VP(\alpha, x_0, C)$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = Z + C$?

c) Soit une variable aléatoire Z suivant $VP(\alpha, x_0, C)$.
Déduire des questions 2 et 4.b les valeurs de α pour lesquelles Z admet une espérance et la déterminer dans ce cas.
Déterminer les valeurs de α pour lesquelles Z admet une variance et la calculer dans ce cas.

5. Soit une variable aléatoire W qui suit une loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$ c'est à dire que W admet une densité de probabilité g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \forall x < 0 \\ g(x) = \beta e^{-\beta x} & \forall x \geqslant 0 \end{cases}$$

Soient k un réel strictement supérieur à 1 et x_0 un réel strictement positif.
Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T = x_0 k^W$? Quelle loi reconnaît-on ?

6. Soit une variable aléatoire X suivant $VP(\alpha, x_0)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sqrt{X}$.

B. Propriété caractéristique de la loi de Pareto.

Soient une variable aléatoire X de densité f, admettant une espérance, et un nombre réel x tel que $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \neq 0$.

On appelle moyenne de X sur $[x, +\infty[$ le nombre réel $M_X(x)$ égal à $\dfrac{\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}$.

1. Montrer que $M_X(x) \geqslant x$.

2. Dans cette question on suppose que la variable X suit $VP(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$. Calculer $M_X(x)$ pour $x \geqslant x_0$.

3. Réciproquement soient un réel x_0 strictement positif et une variable aléatoire X à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, de densité f continue et à valeurs strictement positives sur $[x_0, +\infty[$, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ tel que :
$\forall x \geqslant x_0 \quad M_X(x) = kx$.
On se propose d'établir que X suit une loi de Pareto à deux paramètres.

On pose, pour $x \geqslant x_0$, $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que G et H sont dérivables sur $[x_0, +\infty[$ et calculer leur dérivée.

b) Prouver que $G(x) = \dfrac{1-k}{k} xG'(x)$ pour $x \geqslant x_0$.

c) Pour $x \geqslant x_0$, on pose $I(x) = x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$. Calculer $I'(x)$ et en déduire la valeur de $G(x)$.

d) En déduire que X suit $VP(\dfrac{k}{k-1}, x_0)$.

4. Soient un nombre réel x_0 et une variable aléatoire X à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, de densité f continue et à valeurs strictement positives sur $[x_0, +\infty[$, admettant une espérance.

a) Soient un réel λ et la variable aléatoire $Y = X + \lambda$.
Prouver que : $M_Y(y) = M_X(y - \lambda) + \lambda \quad \forall y \geqslant x_0 + \lambda$.

b) On suppose dans cette question que X suit $VP(\alpha, x_0, C)$ avec $\alpha > 1$.
Exprimer $M_X(x)$ en fonction de x pour $x \geqslant x_0$.

c) Réciproquement on suppose qu'il existe deux réels h et k vérifiant $k > 1$ et $x_0 + \dfrac{h}{k-1} > 0$ tels que :
$M_X(x) = kx + h$ pour tout réel $x \geqslant x_0$.
Soit la variable aléatoire $Y = X + \dfrac{h}{k-1}$. Calculer $M_Y(y)$ pour $y \geqslant x_0 + \dfrac{h}{k-1}$.
En déduire la loi de Y.
Montrer enfin que la variable X suit $VP(\dfrac{k}{k-1}, x_0, \dfrac{h}{k-1})$.

C. Un exemple statistique : la répartition des revenus.

Des statistiques provenant de la Direction Générale des Impôts indiquent, pour l'année 1988, la répartition des revenus d'environ 25 000 000 de contribuables. On note :

x : Niveau de revenu en KF (milliers de francs),
$1 - F(x)$: Proportion de contribuables ayant un revenu strictement supérieur à x,
$M(x)$: Revenu moyen des contribuables ayant un revenu strictement supérieur à x,

et on dispose du tableau suivant :

x	$1 - F(x)$	$M(x)$
500	0.006	860
250	0.027	434
200	0.046	345
150	0.095	256
125	0.145	215
100	0.226	177
80	0.323	151
60	0.458	127
40	0.658	104

Ces données sont représentées dans les graphiques 1 et 2 figurant sur la page 6 de l'énoncé. Ces graphiques ne sont pas à reproduire sur la copie.

1. Le graphique 1 représente les points d'abscisse x et d'ordonnée $M(x)$ pour les valeurs x du tableau.
Une étude statistique permet d'estimer que ce nuage de points peut être modélisé par une droite D (figurant sur le graphique).

a) Lire, sur le graphique, le coefficient directeur de D.

b) Expliquer pourquoi on peut modéliser la distribution des revenus par une loi de Pareto à trois paramètres $VP(\alpha, x_0, C)$.

c) Donner, d'après le graphique, une valeur approchée de α et de C.

d) Sachant que le revenu moyen de tous les contribuables est $\overline{M} = 75$KF, donner, à l'aide du graphique, une valeur approchée de x_0.

2. Le graphique 2 représente les points d'abscisse $\ln(x + C)$ et d'ordonnée $\ln\left(1000\left(1 - F(x)\right)\right)$ pour les valeurs x du tableau.
(On rappelle que ln désigne la fonction logarithme népérien).
Une étude statistique permet d'estimer que ce nuage de points peut être modélisé par une droite Δ (figurant sur le graphique).

a) Lire, sur le graphique, le coefficient directeur de Δ.

b) Expliquer pourquoi cela confirme la modélisation de la distribution des revenus par une loi de Pareto à trois paramètres $VP(\alpha, x_0, C)$.

c) Retrouver ainsi une valeur approchée de α et de x_0.

PARTIE II. **Courbe de concentration et inégalité des revenus.**

La courbe de concentration est une courbe statistique introduite par Lorentz et développée par Gini pour rendre compte de l'inégalité de la distribution des revenus.

On désigne par F_x la proportion des individus d'une population donnée ayant un revenu inférieur ou égal à x et par Q_x le quotient de la masse des revenus de ces mêmes individus par la masse totale des revenus de la population.
On appelle courbe de concentration la représentation graphique de la fonction donnant Q_x en fonction de F_x.

Dans toute la suite du problème, X est une variable aléatoire qui représente le revenu d'un individu de cette population.

Dans la partie A, on montre, dans le cas général, l'existence de la courbe de concentration et on étudie ses propriétés.
Dans la partie B, on étudie le cas particulier où la variable aléatoire X suit une loi de Pareto.

A. Courbe de concentration et indice de Gini.

On désigne par x_0 un nombre réel strictement positif et on suppose que la variable aléatoire X, à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, admet une densité f, continue et à valeurs strictement positives sur $[x_0, +\infty[$, et possède une espérance $E(X)$.

On pose, pour $x \geqslant x_0$, $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ et $Q(x) = \displaystyle\frac{1}{E(X)}\int_{x_0}^{x} tf(t)\mathrm{d}t$.

1. **a)** Montrer que la restriction de F à $[x_0, +\infty[$ admet une application réciproque notée F^{-1}.
Quel est le domaine de définition de F^{-1} ?

b) On pose $C = QoF^{-1}$.
Montrer que C se prolonge en une fonction continue strictement croissante de $[0, 1]$ dans lui-même.
Déterminer $C(0)$ et $C(1)$.

Ainsi la courbe de concentration de X existe bien. C'est la courbe représentative de C dans un repère orthonormé du plan.

2. **a)** Prouver que C est dérivable sur $[0, 1[$ et que $C'(t) = \dfrac{F^{-1}(t)}{E(X)}$ pour $t \in [0, 1[$.

b) En déduire sans calcul que C est convexe et que la courbe de concentration de X est située en dessous de la première bissectrice.

c) Déterminer $C'(0)$ et $\lim\limits_{t\to 1} C'(t)$.

d) Tracer l'allure de la courbe de concentration en précisant les tangentes aux deux extrémités.

On appelle indice d'inégalité de Gini de la variable X le réel $I(X)$ qui est égal à deux fois l'aire située entre la courbe de concentration de X et la première bissectrice.
C'est à dire : $I(X) = 2\displaystyle\int_0^1 \big(t - C(t)\big)\mathrm{d}t$.

On estime que plus $I(X)$ est grand, plus l'inégalité des revenus est grande.

B. Application : comparaison de quelques procédures d'imposition des revenus.

On suppose, dans toute cette partie, que la variable aléatoire X suit $\mathcal{VP}(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$.

1. **a)** Calculer $Q(x)$ pour $x \geqslant x_0$.

b) Prouver que $C(t) = 1 - (1-t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ $\quad \forall t \in [0, 1[$.

c) Déterminer α si on sait que 30% des individus ayant les plus hauts revenus se partagent 60% de la masse des revenus.
Dans la suite α n'est plus supposé égal à cette valeur.

d) Déterminer l'indice d'inégalité de Gini $I(X)$.

2. On prélève sur tous les revenus un impôt proportionnel au revenu c'est à dire que, si Y désigne le revenu disponible après imposition, $Y = (1 - \lambda)X$ avec $\lambda \in]0, 1[$.

a) Calculer $I(Y)$. On pourra utiliser les résultats de I.A.3.

b) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?

3. On prélève sur tous les revenus un impôt progressif tel que, si T désigne le revenu disponible après imposition, on ait $T = h\sqrt{X}$ (h désignant un réel positif).

a) À l'aide de la partie I, déterminer la loi de T et calculer $I(T)$.

b) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?

4. On prélève sur tous les revenus un impôt constant a, c'est à dire que, si Z désigne le revenu disponible après imposition, $Z = X - a$ avec $a \in]0, x_0[$.

a) Déterminer la loi de Z.

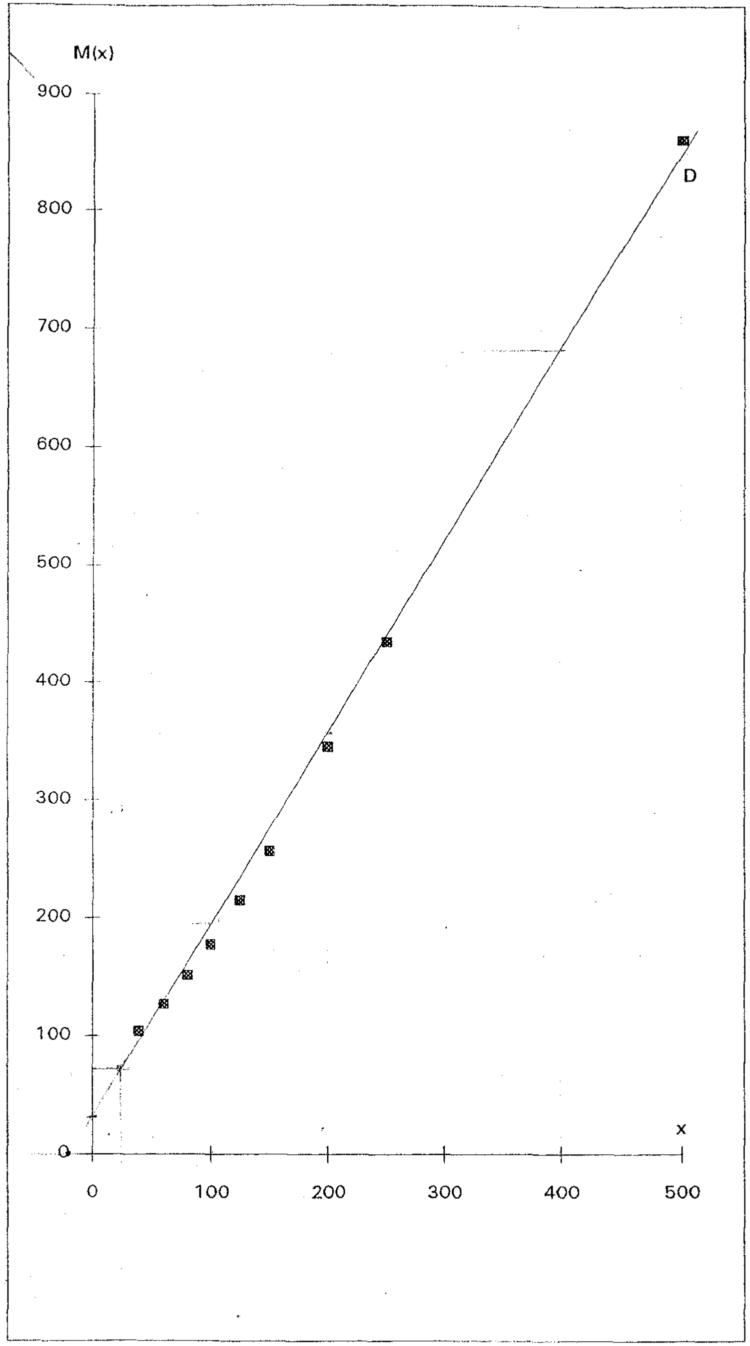
b) On note C_Z la fonction dont le graphe est la courbe de concentration de Z. Montrer que :

$$t - C_Z(t) = \frac{E(X)}{E(X) - a}\big(t - C(t)\big) \quad \forall t \in [0, 1]$$

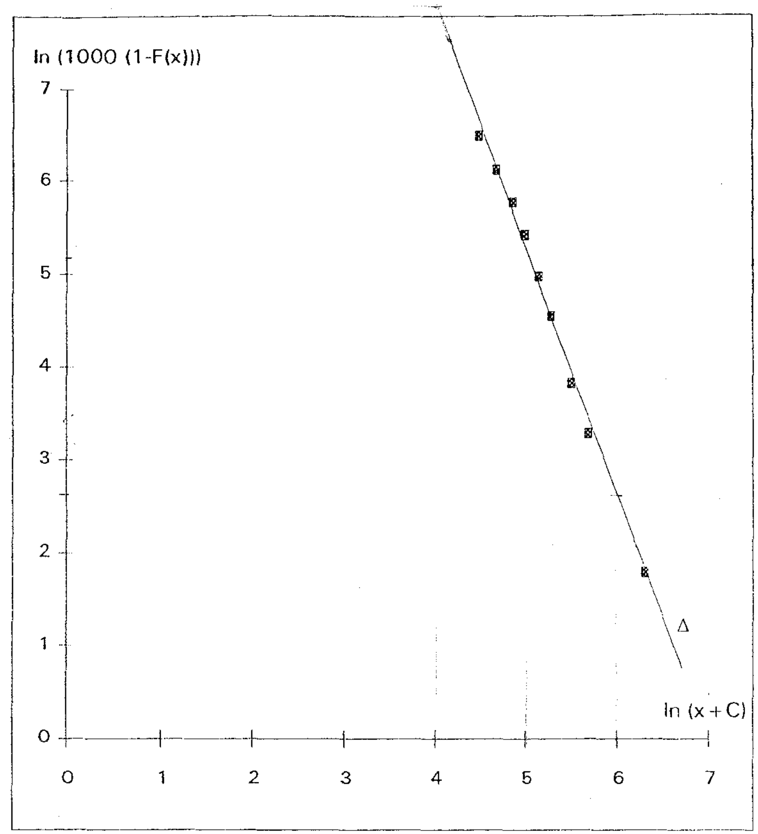
c) En déduire $I(Z)$.

d) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?

Tourner la page S.V.P. --->



Revenus 1988 - Graphique n°1



Revenus 1988 - Graphique n°2