CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

lundi 22 mai 1995, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Sont autorisées: –
Règles graduées.
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ (où le nombre entier m est supérieur ou égal à 2) vérifiant certaines relations.

Dans toute la suite, si f désigne un tel endomorphisme et k un entier strictement positif, on note f^k la composée $\underbrace{fof\ldots of}_{k\text{ fois}}$. Enfin on désigne par I l'application identité de $\mathbb{R}^m$ et par I_m la matrice identité d'ordre m.

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si tout vecteur x de $\mathbb{R}^m$ peut se décomposer de manière unique sous forme $x = y + z$, avec y et z appartenant respectivement à F et G. L'application qui à x associe cet unique vecteur y est le projecteur de $\mathbb{R}^m$ sur F dans la direction G.

PARTIE I.

On considère dans cette partie un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I) \qquad (1)$$

1. Recherche de solutions particulières de (1).

Déterminer les réels α tels que $f = \alpha I$ vérifie (1).

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

a. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de I et de f.
Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$.

Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n d'une part et entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n d'autre part.
En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f + b_n I$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$.

Calculer p^2 et en déduire que p est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de I.

3. Étude des éléments propres de f et des solutions de (1).

a. Soit λ une valeur propre de f. En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul x de f associé à λ, établir que λ vérifie l'équation $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. En déduire les valeurs propres éventuelles de f.

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker}(f - I)$ et $z \in \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

Exprimer $f(x)$ à l'aide de y et z puis y et z en fonction de x et $f(x)$.

En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\operatorname{Ker}(f - I)$ et de $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, que p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ dans la direction $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et que f est diagonalisable.

c. On pose $r = \dim \operatorname{Ker}(f - I) \qquad (0 \leqslant r \leqslant m)$.

Déterminer f lorsque $r = 0$ ou $r = m$.

On suppose désormais $0 < r < m$.
Écrire la matrice M de f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $\operatorname{Ker}(f - I)$ et d'une base $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_m)$ de $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

d. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_m)$.

e. Calculer $(f + \frac{1}{2}I)o(f - I)$.

En déduire que $\operatorname{Im}(f - I)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, p est aussi le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ dans la direction $\operatorname{Im}(f - I)$.

PARTIE II.

1. Étude d'une suite récurrente.

On étudie dans cette question la convergence des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3} \qquad (2)$$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r^3 = \dfrac{r^2 + r + 1}{3}$. On précisera ses racines et l'on notera α et $\overline{\alpha}$ ses racines complexes conjuguées.

b. Déterminer les suites géométriques $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2).

c. On associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2) le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 \\ x + \alpha y + \overline{\alpha} z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \overline{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

- En formant la combinaison linéaire $3u_2 + 2u_1 + u_0$ exprimer x en fonction de u_0, u_1, u_2 et montrer que le système précédent admet une solution (x, y, z) et une seule. (On ne demande pas le calcul des inconnues y et z.)

- Établir par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n : $u_n = x + y\,\alpha^n + z\,\overline{\alpha}^n$.

- Déterminer le module de α et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0, u_1 et u_2.

On considère désormais un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I) \qquad (3)$$

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes I, f et f^2 sont linéairement indépendants.

a. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $0 \leqslant n \leqslant 2$ et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation (2).
En déduire les limites $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $c = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ de ces trois suites.

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = af^2 + bf + cI$.
Établir que q est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f^2, f et I.

3. Étude du projecteur q.

a. Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de f.
Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable vérifiant (3) ?

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - I)$ et $z \in \mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
Exprimer y et z en fonction de x, $f(x)$ et $f^2(x)$.
En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\mathrm{Ker}(f - I)$ et de $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

c. Calculer $(3f^2 + 2f + I)o(f - I)$.
En déduire que $\mathrm{Im}(f - I)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, q est aussi le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f - I)$.

4 Étude des solutions de (3)

a. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) > 0$.
Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$. Montrer que $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) \geqslant 2$.

b. On suppose dans cette question que $m=2$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les dimensions possibles de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et de $\operatorname{Ker}(f-I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

c. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) > 2$.
Soit e_2 un vecteur de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que la famille $\big(e_1, f(e_1), e_2\big)$ soit libre. Montrer que $\big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ est encore une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$.En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) \geqslant 4$.

d. On suppose dans cette question que $m=3$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les dimensions possibles de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et de $\operatorname{Ker}(f-I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

e. Étudier de la même manière le cas $m=4$ en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme f dans des bases convenables de $\mathbb{R}^4$.

f. On suppose désormais $\dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) > 2q$ avec q entier naturel non nul.
Soit $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q)\big)$ une famille libre de vecteurs de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$. On peut donc trouver un vecteur e_{q+1} appartenant à $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}\big)$ soit encore une famille libre.
Montrer que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1})\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et en déduire que la dimension de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ est paire.

g. On pose $2r = \dim \operatorname{Ker}(3f^2+2f+I) \qquad (0 \leqslant 2r \leqslant m)$.
Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base convenable de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(f-I)$.

h. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^3 = \dfrac{1}{3}(M^2+M+I_m)$.

FIN