ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION SCIENTIFIQUE

Samedi 18 mai 1996

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2 et par f une application de classe C^{2n} du segment $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$

Dans la partie I, on étudie le polynôme $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$, ses dérivées successives $P_n^{(j)}$ et notamment sa dérivée n^{eme} : $P_n^{(n)}$.
La partie II propose l'étude de deux procédés d'interpolation polynomiale de la fonction f. Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul d'une valeur approchée de $\mathcal{I}(f)$, le second de majorer l'erreur commise.

PARTIE I.

1. ***Étude des racines de P_n et de ses dérivées.***

a. Établir l'existence, pour tout entier naturel j inférieur ou égal à n, d'un polynôme Q_j tel que, pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} P_n^{(j)}(x) = (x^2 - 1)^{n-j} Q_j(x) \\ Q_j(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$$

On pourra raisonner par récurrence sur l'entier j et on précisera l'expression de Q_{j+1} en fonction de Q_j pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.
En déduire les valeurs en -1 et en 1 de P_n et de ses dérivées d'ordre j strictement inférieur à n.

b. Énoncer avec précision le théorème de Rolle. Établir que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans l'intervalle $]-1, 1[$ puis que le polynôme P_n'' admet au moins deux racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.
Démontrer que, pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, le polynôme $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

c. En déduire que le polynôme $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines réelles distinctes et que celles-ci appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.

Dans toute la suite du problème, ces racines sont notées $r_1, r_2, \ldots, r_n$ avec $-1 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < 1$.

2. ***Calcul d'une intégrale auxiliaire.***

On pose, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels :

$$W(p, q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q \,\mathrm{d}t$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $W(p+1, q-1)$ et $W(p, q)$ lorsque $q \geqslant 1$.

b. En déduire que $W(n, n) = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. ***Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées.***

Dans cette question, on désigne par Q un polynôme à coefficients réels.

a. Établir rigoureusement l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t$$

b. Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque Q est de degré strictement inférieur à n ?

c. Expliciter $P_n^{(2n)}$ puis exprimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2\mathrm{d}t$ en fonction de $W(n,n)$ et obtenir ainsi sa valeur.

PARTIE II.

1. ***Polynôme d'interpolation de Lagrange de f.***

On pose désormais pour tout entier j compris entre 1 et n et pour tout nombre réel x :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-r_i}{r_j-r_i} \qquad\qquad \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Calculer $L_j(r_k)$ en distinguant suivant que k est, ou non, égal à j.
En déduire que $\left(L_1, L_2, \ldots, L_n\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à n.

b. Expliciter, dans la base précédente, un polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que $A_n(r_j) = f(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n et prouver qu'un tel polynôme est unique.

c. Établir l'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

On se propose désormais de prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\mathfrak{I}(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ l'intégrale $\mathfrak{I}(A_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)\mathrm{d}t$ que l'on notera $\mathfrak{I}_n(f)$ dans toute la suite du problème.

En d'autres termes, on prend pour valeur approchée de l'intégrale $\mathfrak{I}(f)$ le nombre réel $\mathfrak{I}_n(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

2. ***Comparaison de $\mathfrak{I}(P)$ et de $\mathfrak{I}_n(P)$ lorsque P est un polynôme.***

Dans cette question, on suppose que P est un polynôme dont le degré est noté $deg(P)$.
Par convention le degré du polynôme nul sera posé égal à $-\infty$.

a. On suppose que $deg(P) < n$. Comparer $\mathfrak{I}(P)$ et $\mathfrak{I}_n(P)$.

b. On suppose que $deg(P) < 2n$.
- Justifier l'existence d'un couple (Q, R) de polynômes tel que l'on ait :

$$P = Q\,P_n^{(n)} + R \quad \text{et} \quad deg(R) < n$$

- Montrer que $deg(Q) < n$.
- Déduire des résultats de la partie I que $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(R)$.
- Comparer $\mathfrak{I}(P)$ et $\mathfrak{I}_n(P)$.

3. *Polynôme d'interpolation de Hermite de f.*

a. À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à $2n$, on associe l'élément $\varphi(H) = \Big(H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \ldots, H(r_n), H'(r_n)\Big)$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Établir que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer son noyau.

On rappelle qu'un polynôme non nul de degré d admet au plus d racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

b. En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul tel que $B_n(r_j) = f(r_j)$ et $B'_n(r_j) = f'(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

c. Déduire des résultats précédents que $\mathfrak{I}(B_n) = \mathfrak{I}_n(f)$.

4. *Majoration de* $\big|\mathfrak{I}(f) - \mathfrak{I}_n(f)\big|$.

Soit $M_{2n}(f)$ le maximum de $|f^{(2n)}(t)|$ lorsque t décrit le segment $[-1,1]$.

Dans cette question, on désigne par x un nombre réel donné appartenant au segment $[-1,1]$ et distinct des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

On considère alors l'application g_x définie sur $[-1,1]$ par

$$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$$

où α est le nombre réel (dont on justifiera l'existence) tel que $g_x(x) = 0$.

a. En appliquant le théorème de Rolle à l'application g_x sur des intervalles à préciser, prouver que g'_x s'annule en au moins n points de $]-1,1[$ distincts de $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

b. Calculer $g'_x(r_1), g'_x(r_2), \ldots, g'_x(r_n)$.

Établir que $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c appartenant au segment $[-1,1]$.

c. Expliciter $g_x^{(2n)}(t)$ et en déduire une expression de α en fonction de $f^{(2n)}(c)$ et de n.

d. À l'aide de l'égalité $g_x(x) = 0$, établir que $f(x) - B_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3} f^{(2n)}(c) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$.

e. Prouver que, pour tout réel x de $[-1,1]$:

$$\big|f(x) - B_n(x)\big| \leqslant \frac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3} M_{2n}(f) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

On distinguera deux cas suivant que x est, ou non, égal à l'un des nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Déduire alors des résultats des parties I et II que :

$$\big|\mathfrak{I}(f) - \mathfrak{I}_n(f)\big| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{\left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

f. On considère dans cette question une application g à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de classe C^{2n} sur un segment $[a,b]$. On désigne par $M_{2n}(g)$ le maximum de $|g^{(2n)}(u)|$ lorsque u décrit le segment $[a,b]$.

En envisageant l'application f définie sur $[-1,1]$ par $f(t) = g\Big(\dfrac{a+b}{2} + t\,\dfrac{b-a}{2}\Big)$, donner en fonction de a, b, n et $M_{2n}(g)$ un majorant de l'expression suivante :

$$\Big|\int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, g\Big(\frac{a+b}{2} + r_j\frac{b-a}{2}\Big)\Big|$$

5. ***Étude d'un cas particulier.***
Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a. Déterminer le polynôme P_2'', ses racines r_1 et r_2, les polynômes L_1, L_2 ainsi que les intégrales $\lambda_1 = \mathfrak{I}(L_1)$ et $\lambda_2 = \mathfrak{I}(L_2)$.

b. En appliquant la majoration obtenue au II.4.c., montrer que :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right) \right| \leqslant \frac{M_4(g)\,(b-a)^5}{4320}$$

c. On considère un entier $p \geqslant 1$ et on subdivise le segment $[a, b]$ en p sous-segments de même longueur, dont on note les milieux $c_1, c_2, \ldots, c_p$.
En appliquant l'inégalité précédente à chacun de ces p sous-segments, majorer en fonction de p et $M_4(g)$ l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p} \sum_{k=1}^{p} \left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right) \right|$$

d. Écrire en PASCAL un algorithme de calcul de la somme précédente, les réels a et b, la fonction g ainsi que l'entier p étant supposés donnés.

FIN

HEC M.I 96

PARTIE I

Q1 Etudes des racines de P_n et de ses dérivées.

a] $P_n = (X^2-1)^n$. 1 et -1 sont des racines d'ordre n de P_n

V1 Soit $j \in [\![0,n]\!]$. 1 et -1 sont alors des racines d'ordre $n-j$ de $P_n^{(j)}$; par conséquent il existe un polynôme Q_j et un seul tel que :
$$\begin{cases} P_n^{(j)} = (X^2-1)^{n-j}\, Q_j \\ Q_j(-1) \neq 0 \text{ et } Q_j(1) \neq 0. \end{cases}$$

V2 Retrouvons (au moins l'existence) par récurrence.

- La propriété est vraie pour $j=0$ ($Q_0 = 1$ ...)
- Supposons la propriété vraie pour $j \in [\![0,n-1]\!]$ et montrons qu'elle est vraie pour $j+1$.

$P_n^{(j)} = (X^2-1)^{n-j} Q_j$. En dérivant il vient : $P_n^{(j+1)} = (n-j)2X(X^2-1)^{n-j-1} Q_j + (X^2-1)^{n-j} Q_j'$

Donc $P_n^{(j+1)} = (X^2-1)^{n-j-1}\left[2(n-j)X\ Q_j + (X^2-1)\,Q_j'\right]$

Posons $Q_{j+1} = 2(n-j)X\,Q_j + (X^2-1)Q_j'$.

$Q_{j+1} \in \mathbb{R}[X]$ et $P_n^{(j+1)} = (X^2-1)^{n-(j+1)} Q_{j+1}$. Reste à prouver que $Q_{j+1}(-1) \neq 0$ et $Q_{j+1}(1) \neq 0$.

$$Q_{j+1}(-1) = 2(n-j)(-1)\,Q_j(-1) \neq 0 \quad\text{et}\quad Q_{j+1}(1) = 2(n-j)(1)\,Q_j(1) \neq 0$$
$$\begin{cases} n-j \neq 0 \\ Q_j(-1) \neq 0 \\ Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$$

ceci achève la récurrence.

L'unicité est claire ($P_n^{(j)} = (X^2-1)^{n-j} Q_j = (X^2-1)^{n-j}\hat{Q}_j$ entraîne $Q_j = \hat{Q}_j$ par division par $(X^2-1)^{n-j}$!).

Notons que : $\underline{\forall j \in [\![0,n-1]\!],\quad Q_{j+1} = 2(n-j)X\,Q_j + (X^2-1)\,Q_j'}$.

$\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, $P_n^{(j)}(-1) = ((-1)^2-1)^{n-j} Q_j(-1) = 0$; de même $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, $P_n^{(j)}(1) = 0$.

$\underline{\forall j \in [\![0,n-1]\!],\ P_n^{(j)}(-1) = P_n^{(j)}(1)}$ ... ce qui était clair dès le départ avec les ordres de multiplicité.

b] Rappel.. f est une fonction numérique continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un élément c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le tout en un ! Montrons par récurrence que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

- P_n est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. De plus $P_n(-1) = P_n(1)$ $(=0)$.
  Rolle montre alors qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $P_n'(c) = 0$.
  Ceci montre donc la propriété pour $j=1$.
- Supposons la propriété vraie pour $j \in [\![1, n-1]\!]$ et montrons la pour $j+1$.
  Soient $a_1, a_2, \dots, a_j$ $(a_1 < a_2 < \dots < a_j)$ j racines distinctes de $P_n^{(j)}$ dans $]-1,1[$.
  Posons $a_0 = -1$ et $a_{j+1} = 1$. $-1 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_j < a_{j+1} = 1$.
  $\forall k \in [\![0, j+1]\!]$, $P_n^{(j)}(a_k) = 0$. $(j < n\,!)$.
  Fixons k dans $[\![0, j]\!]$. $P_n^{(j)}$ est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$.
  De plus $P_n^{(j)}(a_k) = P_n^{(j)}(a_{k+1})$ $(=0)$; donc $\exists\, c_k \in]a_k, a_{k+1}[$, $(P_n^{(j)})'(c_k) = 0$.
  Par conséquent $c_0, c_1, \dots, c_j$ sont $j+1$ racines distinctes de $(P_n^{(j)})' = P_n^{(j+1)}$ appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ $(-1 = a_0 < c_0 < a_1 < c_1 < a_2 < \dots < a_j < c_j < a_{j+1} = 1)$.
  Ceci achève la récurrence.

  Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

c) $P_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n qui admet au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$.
Or un polynôme de degré n admet au plus n racines. Par conséquent :
1°. P_n admet exactement n racines réelles distinctes
2°. ces racines sont dans $]-1,1[$.

Q2 Calcul d'une intégrale auxiliaire.

a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Supposons $q \geq 1$.

$$W(p,q) = \int_{-1}^{1} \underbrace{(t-1)^p}_{u'} \underbrace{(t+1)^q}_{v} dt = \underbrace{\left[\frac{1}{p+1}(t-1)^{p+1}(t+1)^q\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{p+1}(t-1)^{p+1} q\,(t+1)^{q-1} dt$$

$$W(p,q) = -\frac{q}{p+1} W(p+1, q-1).$$

b) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. $W(p,q) = -\frac{q}{p+1} W(p+1, q-1) = \left(-\frac{q}{p+1}\right)\left(-\frac{q-1}{p+2}\right) W(p+2, q-2)$ ... pour $q \geq 2$

Recherche de la valeur de $W(p,q)$

$$W(p,q) = \left(-\frac{q}{p+1}\right)\left(-\frac{q-1}{p+2}\right)\cdots\left(-\frac{q-k+1}{p+k}\right) W(p+k, q-k) \quad \text{pour } q \geq k$$

$$W(p,q) = \left(-\frac{q}{p+1}\right)\left(-\frac{q-1}{p+2}\right)\cdots\left(-\frac{q-k+1}{p+k}\right)\cdots\left(-\frac{q-q+1}{p+q}\right) W(p+q, 0)$$

$$W(p,q) = (-1)^q \frac{p!\,q!}{(p+q)!} W(p+q, 0). \quad W(p+q,0) = \int_{-1}^{1} (t-1)^{p+q} dt = \left[\frac{(t-1)^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_{-1}^{1}$$

$W(p+q,0) = -\dfrac{(-2)^{p+q+1}}{p+q+1}$; donc $W(q,q) = -\dfrac{(-1)^q p!\,q!}{(p+q)!}\;\dfrac{1}{p+q+1}(-1)^{p+q+1}2^{p+q+1}$

$W(p,q) = (-1)^p \dfrac{2^{p+q+1}\,p!\,q!}{(p+q+1)!}$. Montrons cette formule par récurrence sur p :

Montrons alors que pour tout $p\in\mathbb{N}$: $\forall q\in\mathbb{N},\ W(p,q) = (-1)^p \dfrac{2^{p+q+1}\,p!\,q!}{(p+q+1)!}$

→ $\forall q\in\mathbb{N},\ W(0,q) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(t+1)^q\,dt = \left[\frac{1}{q+1}(t+1)^{q+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{2^{q+1}}{q+1} = (-1)^0\frac{2^{0+q+1}\,0!\,q!}{(0+q+1)!}$

La propriété est vraie pour $p=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $p\in\mathbb{N}$ et montrons-la pour $p+1$.

Soit $q\in\mathbb{N}$. $W(p,q+1) = -\dfrac{q+1}{p+1}W(p+1,q)$ d'après a)

donc $W(p+1,q) = -\dfrac{p+1}{q+1}W(p,q+1) \underset{H.R.}{=} -\dfrac{p+1}{q+1}(-1)^p\dfrac{2^{p+q+1+1}\,p!\,(q+1)!}{(p+q+1+1)!}$

$W(p+1,q) = (-1)^{p+1}\dfrac{2^{p+1+q+1}\,(p+1)!\,q!}{(p+1+q+1)!}$ ... ce qui achève la récurrence.

donc $\forall n\in\mathbb{N},\ W(n,n) = (-1)^n\dfrac{2^{2n+1}\,n!\,n!}{(2n+1)!}$. $\forall n\in\mathbb{N},\ W(n,n) = (-1)^n\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Remarque – Wallis n'est pas loin ($t=\cos\theta$ ... $W(n,n) = (-1)^n\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta = 2(-1)^n\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta$ ...)

Q3 Calcul d'intégrales associées au polynômes P_n et à ses dérivées.

a) Montrons par récurrence que si $Q\in\mathbb{R}[X]$:

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \displaystyle\int_{-1}^{1}Q(t)\,P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^k\int_{-1}^{1}Q^{(k)}(t)\,P_n^{(n-k)}(t)\,dt$

→ c'est clair pour $k=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ et montrons-la pour $k+1$.

$\displaystyle\int_{-1}^{1}Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^k\int_{-1}^{1}\underset{u}{Q^{(k)}(t)}\,\underset{v'}{P_n^{(n-k)}(t)}\,dt = (-1)^k\left(\left[Q^{(k)}(t)\,P_n^{(n-k-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}Q^{(k+1)}(t)\,P_n^{(n-k-1)}(t)\,dt\right)$

or $P_n^{(n-k-1)}(-1) = P_n^{(n-k-1)}(1) = 0$ car $0\leq n-k-1<n$ donc

$\displaystyle\int_{-1}^{1}Q(t)\,P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1}Q^{(k+1)}(t)\,P_n^{(n-(k+1))}(t)\,dt$ ce qui achève la récurrence.

La propriété étant vraie pour n : $\displaystyle\int_{-1}^{1}Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n\int_{-1}^{1}Q^{(n)}(t)\,P_n(t)\,dt$ et ceci pour tout $Q\in\mathbb{R}[X]$.

b] Soit $\varphi \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg \varphi < n$. $\varphi^{(n)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} \varphi^{(n)}(t) P_n(t)\,dt = 0.$$

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \varphi(t) P_n^{(n)}(t)\,dt = 0.$$

c] $P_n = (X^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ dont le coefficient de X^{2n} est 1.
Donc $P_n^{(2n)}$ est un polynôme constant et égal à $(2n)!$ $\quad P_n^{(2n)} = (2n)!$

$$\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2 dt = \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(t) P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n^{(2n)}(t) P_n(t)\,dt = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = (-1)^n (2n)!\, W(n,n).$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2 dt = (-1)^n (2n)!\, W(n,n) = (-1)^{2n} (2n)!\, \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2 dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

Ceci achève l'étude des polynômes de LEGENDRE

PARTIE II — Après LEGENDRE, LAGRANGE et HERMITE

(Q1) Polynôme d'interpolation de LAGRANGE de f.

Nous posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - r_k}{r_j - r_k}$ $\qquad$ OK ? Bravo gégé pour ton super GAG !

a] $\forall i \in [\![1,n]\!] - \{j\}$, $L_j(r_i) = 0$ car $r_1, r_2, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_n$ sont des zéros de L_j

$L_j(r_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{r_j - r_k}{r_j - r_k} = 1$. Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_j(r_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$.

$\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ et la famille $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ a n éléments ; pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ il suffit donc de prouver que c'est une famille libre.
Soit $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^{n} \lambda'_j L_j = 0$.
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j L_j(r_i) = \lambda'_i$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda'_i = 0$. Ceci achève de prouver que la famille est libre, et donc que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les coordonnées de P dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$. $P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$

$\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(r_j) = f(r_j)$

$\Updownarrow$

$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(r_j) = f(r_j)$

$\Updownarrow$ $\leftarrow$ $L_i(r_j) = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

$\alpha_j = f(r_j)$

Donc $\underline{A_n = \sum_{j=1}^{n} f(r_j) L_j}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui coïncide avec f en $r_1, r_2, \dots, r_n$.

c) $\int_{-1}^{1} A_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{n} f(r_j) L_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} f(r_j) \int_{-1}^{1} L_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} f(r_j)\lambda_j$. $\underline{\int_{-1}^{1} A_n(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)}$.

Q2 Comparaison de $J(P)$ et de $J_n(P)$ lorsque P est un polynôme.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P < n$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de P dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$. $P = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_j$; $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(r_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_j(r_i) = \alpha_i$

Finalement : $P = \sum_{j=1}^{n} P(r_j) L_j$. (les coordonnées de P dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ sont $P(r_1), P(r_2), \dots, P(r_n)$).

$J(P) = \int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{n} P(r_j) L_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} P(r_j) \int_{-1}^{1} L_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} P(r_j)\lambda_j = J_n(P)$.

$\underline{\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ J(P) = J_n(P)}$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P < 2n$.

Soit Q le quotient de la division de P par $P_n^{(n)}$ et R par reste.

$P = Q P_n^{(n)} + R$ et $\deg R < \deg P_n^{(n)} = n$.

$\deg Q + n = \deg Q + \deg P_n^{(n)} = \deg(Q P_n^{(n)}) = \deg(P - R) < 2n$; $\underline{\deg Q < n}$.

$J(P) = J(Q P_n^{(n)}) + J(R) = \underbrace{\int_{-1}^{1} Q(t) P_n^{(n)}(t)\,dt}_{=0 \text{ car } \deg Q < n} + J(R) = J(R)$ d'après I Q3b

Donc $J(P) = J(R) \underset{\deg R < n}{=} J_n(R) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(r_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \big(P(r_j) - Q(r_j)\underbrace{P_n^{(n)}(r_j)}_{=0}\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(r_j) = J_n(P)$

$\leftarrow R = P - Q P_n^{(n)}$

Finalement : $\underline{J(P) = J(R) = J_n(R) = J_n(P)}$

$\underline{\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ J(P) = J_n(P)}$.

Q3) Polynôme d'interpolation de Hermite de f.

φ a) Soit $(H,U) \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda H+U) = ((\lambda H+U)(r_1),\dots,(\lambda H+U)(r_n), (\lambda H+U)'(r_1),\dots,(\lambda H+U)'(r_n))$

$= (\lambda H(r_1)+U(r_1),\dots, \lambda H(r_n)+U(r_n), \lambda H'(r_1)+U'(r_1),\dots, \lambda H'(r_n)+U'(r_n))$

$= \lambda(H(r_1),\dots, H(r_n), H'(r_1),\dots, H'(r_n)) + (U(r_1),\dots, U(r_n), U'(r_1),\dots, U'(r_n))$

$\varphi(\lambda H+U) = \lambda\varphi(H)+\varphi(U)$.

φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Soit $H \in \operatorname{Ker}\varphi$. $H(r_1)=H'(r_1)=0$, $H(r_2)=H'(r_2)=0,\dots, H(r_n)=H'(r_n)=0$.

$r_1,r_2,\dots,r_n$ sont donc des racines de H d'ordre au moins 2 ; H a au moins 2n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité. H étant de degré au plus 2n-1, H est le polynôme nul.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$; φ est injective.

b) φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$ ($<+\infty$!)

Par conséquent φ est bijective. Tout élément de $\mathbb{R}^{2n}$ possède un antécédent par φ dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et un seul.

Soit $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $H(r_j)=f(r_j)$ et $H'(r_j)=f'(r_j)$

$\Leftrightarrow$ $\varphi(H) = (f(r_1),\dots,f(r_n),f'(r_1),\dots,f'(r_n))$

$\Leftrightarrow$ $H = \varphi^{-1}((f(r_1),\dots,f(r_n),f'(r_1),\dots,f'(r_n)))$

donc il existe un unique élément B_n de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $H(r_j)=f(r_j)$ et $H'(r_j)=f'(r_j)$;

$B_n = \varphi^{-1}((f(r_1),\dots,f(r_n), f'(r_1),\dots,f'(r_n)))$.

c) $B_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ donc $\mathcal{I}(B_n) = \mathcal{I}_n(B_n) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j B_n(r_j) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(r_j) = \mathcal{I}_n(f)$.

$\mathcal{I}(B_n) = \mathcal{I}_n(B_n) = \mathcal{I}_n(f)$.

Exercice. Montrer que :

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} f(r_j) L_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\left[f'(r_j) - 2f(r_j)L_j'(r_j)\right](X-r_j)L_j^2$$

Q4) Majoration de $|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_n(f)|$.

a) • $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $g_x'(r_i) = \underbrace{f'(r_i) - B_n'(r_i)}_{=0} - \alpha\, 2\, P_n^{(n+1)}(r_i)\underbrace{P_n^{(n)}(r_i)}_{=0} = 0$

• $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $g_x(r_i) = f(r_i) - B_n(r_i) - \alpha\left(P_n^{(n)}(r_i)\right)^2 = f(r_i) - f(r_i) - \alpha\, 0^2 = 0$.

$r_1, r_2, \dots, r_n$ sont donc des zéros de g_x.

Montrons alors que l'on peut choisir α de telle manière que : $g_x(x) = 0$.

$$g_x(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - B_n(x) - \alpha\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \underset{\uparrow\ P_n^{(n)}(x) \neq 0 \text{ car } x \notin \{r_1, r_2, \dots, r_n\}}{\alpha = \frac{f(x) - B_n(x)}{\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2}}$$

donc $\underline{\underline{\alpha = \dfrac{f(x) - B_n(x)}{\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2}}}$. donne à g_x la valeur 0 en x.

Finalement g_x admet au moins $n+1$ zéros dans $[-1,1]$: $r_1, r_2, \dots, r_n, x$.

Ordonnons ces zéros, nous obtenons alors la suite strictement croissante $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$.

Fixons k dans $[\![1,n]\!]$.

g_x est continue sur $[y_k, y_{k+1}]$ et au moins dérivable sur $]y_k, y_{k+1}[$; de plus $g_x(y_k) = g_x(y_{k+1})$. Par conséquent $\exists c_k \in]y_k, y_{k+1}[$, $g'_x(c_k)$.

Ceci donne à g'_x n zéros $c_1, c_2, \dots, c_n$ distincts et distincts de $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ donc de $r_1, r_2, \dots, r_n$ et de x.

Notons encore que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $c_k \in]y_k, y_{k+1}[$ donc $c_k \in]-1,1[$.

$\underline{\underline{g'_x \text{ s'annule en au moins } n \text{ points de }]-1,1[\text{ distincts de } r_1, r_2, \dots, r_n.}}$

• Démontrons par récurrence que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $g_x^{(i)}$ s'annule en au moins $n+1-i$ points de $]-1,1[$ (notons que g_x est ~~de~~ donc C^n sur $[-1,1]$ car f l'est !)

→ c'est vrai pour $i=1$ d'après ce qui précède

→ Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et montrons-la pour $i+1$.

Supposons donc que $g_x^{(i)}$ admette au moins $n+1-i$ zéros dans $]-1,1[$: $z_1, z_2, \dots, z_{n+1-i}$ avec $z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1-i}$.

$\forall k \in [\![1, n+1-i-1]\!]$, $g_x^{(i)}$ est continue sur $[z_k, z_{k+1}]$, dérivable sur $]z_k, z_{k+1}[$ et $g_x^{(i)}(z_k) = g_x^{(i)}(z_{k+1})$ $(=0)$. Rolle nous dit alors que : $\exists t_k \in]z_k, z_{k+1}[$, $\left(g_x^{(i)}\right)'(t_k) = 0$.

Donc $t_1, t_2, \dots, t_{n+1-(i+1)}$ sont $n+1-(i+1)$ zéros de $\left(g_x^{(i)}\right)' = g_x^{(i+1)}$ appartenant à $]-1,1[$.

Ceci achève la récurrence.

La propriété étant vraie pour n et $n+1-n = 1$; $g_x^{(n)}$ s'annule en au moins un point c de $]-1,1[$ donc de $[-1,1]$.

$\exists c \in]-1,1[,\ g_x^{(2n)}(c)=0.$

$\forall t \in [-1,1],\ g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha\left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$

Donc $\forall t \in [-1,1],\ g_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - B_n^{(2n)}(t) - \alpha\left[\left(P_n^{(n)}\right)^2\right]^{(2n)}(t)$

$\forall t \in \mathbb{R},\ B_n^{(2n)}(t) = 0$ car $B_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

$\left[\left(P_n^{(n)}\right)^2\right]^{(2n)}$ est une constante car $\left(P_n^{(n)}\right)^2$ est un polynome de degré $2n$. Précisons.

$P_n^{(n)}$ est de degré n et le coefficient de X^n dans $P_n^{(n)}$ est : $\dfrac{(2n)!}{n!}$

$\left(P_n^{(n)}\right)^2$ ——— de ——— X^{2n} dans $\left(P_n^{(n)}\right)^2$ est alors : $\left[\dfrac{(2n)!}{n!}\right]^2$

De plus $\left(X^{2n}\right)^{(2n)} = (2n)!$

Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R},\ \left[\left(P_n^{(n)}\right)^2\right]^{(2n)} = \dfrac{((2n)!)^3}{(n!)^2}.$

Donc $\forall t \in [-1,1],\ g_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - \alpha\dfrac{((2n)!)^3}{(n!)^2}$; en particulier $0 = f^{(2n)}(c) - \alpha\dfrac{((2n)!)^3}{(n!)^2}$

Donc $\alpha = f^{(2n)}(c)\dfrac{(n!)^2}{((2n)!)^3}$. Or $\alpha = \dfrac{f(x)-B_n(x)}{\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2}$

Finalement : $f(x) - B_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c)\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$

b) f est de classe C^{2n} sur $[-1,1]$ donc $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ par conséquent $|f^{(2n)}|$ possède un maximum sur $[-1,1]$ que nous notons $M_{2n}(f)$.

Soit $x \in [-1,1]$. 1er cas : $x \notin \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. D'après ce qui précède on peut trouver c dans $[-1,1]$ tel que : $f(x) - B_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c)\left(P^{(n)}(x)\right)^2$

Donc $|f(x) - B_n(x)| = \dfrac{(n!)^2}{((2n)!)^3}|f^{(2n)}(c)|\,|P^{(n)}(x)|^2 \leq \dfrac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f)\left(P^{(n)}(x)\right)^2$

2ème cas : $x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

$|f(x) - B_n(x)| = 0 \leq \dfrac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f)\left(P^{(n)}(x)\right)^2 = 0$!

Finalement : $\forall x \in [-1,1],\quad |f(x) - B_n(x)| \leq \dfrac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f)\left(P^{(n)}(x)\right)^2.$

$$|\mathcal{I}(f)-I_n(f)| = |\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}(B_n)| = \left|\int_{-1}^{1}(f(t)-B_n(t))\,dt\right| \leq \int_{-1}^{1}|f(t)-B_n(t)|\,dt$$

$$|\mathcal{I}(f)-I_n(f)| \leq \int_{-1}^{1}\frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\,\Pi_n(f)\,(P_n^{(n)}(t))^2\,dt = \frac{\Pi_n(f)\,(n!)^2}{((2n)!)^3} \times \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

$$|\mathcal{I}(f)-I_n(f)| \leq \frac{\Pi_n(f)}{\frac{((2n)!)^2}{(n!\,n!)^2}} \times 2^{2n+1} \times \frac{1}{(2n)!\,(2n+1)} = \frac{\Pi_n(f)}{(C_{2n}^n)^2}\;\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$|\mathcal{I}(f)-I_n(f)| \leq \frac{\Pi_n(f)}{(C_{2n}^n)^2}\;\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

c) $\displaystyle\int_a^b g(u)\,du \underset{\uparrow}{=} \int_{-1}^{1} g\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)\frac{b-a}{2}\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$

$$\begin{cases} u = \frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2} \\ t = \frac{2}{b-a}\left(u-\frac{a+b}{2}\right)\end{cases}$$

Montrons que f est de classe C^{2n} sur $[-1,1]$. Plus précisément montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$ 1°.. f est de classe C^k sur $[-1,1]$

2°.. $\forall t \in [-1,1]$, $f^{(k)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k g^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)$

Posons $\forall t \in [-1,1]$, $u(t) = \frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}$.

$f = g \circ u$

- u est continue sur $[-1,1]$ et $u([-1,1]) = [a,b]$; comme g est continue sur $[a,b]$: f est par composition continue sur $[-1,1]$. Ceci montre la propriété pour $k=0$.

- Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0,2n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

f est de classe C^k sur $[-1,1]$ et $\forall t \in [-1,1]$, $f^{(k)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k g^{(k)}\circ u(t)$.

u est dérivable sur $[-1,1]$ et $u([-1,1]) = [a,b]$; $g^{(k)}$ étant dérivable sur $[a,b]$: $g^{(k)}\circ u$ est dérivable sur $[-1,1]$ donc $f^{(k)}$ est dérivable sur $[-1,1]$; f est $k+1$-fois dérivable sur $[-1,1]$ et $\forall t \in [-1,1]$, $f^{(k+1)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k u'(t)\,(g^{(k)})'(u(t))$

$\forall t \in [-1,1]$, $f^{(k+1)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k \frac{b-a}{2}\,(g^{(k+1)}\circ u)(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}(g^{k+1}\circ u)(t)$

u est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[a,b]$ et g^{k+1} est continue sur $[a,b]$ donc $g^{k+1}\circ u$ est continue sur $[-1,1]$; $f^{(k+1)}$ est alors continue sur $[-1,1]$. Finalement f est de classe C^{k+1} sur $[-1,1]$ et $\forall t \in [-1,1]$, $f^{(k+1)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} g^{(k+1)}\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)$

Ceci achève la récurrence.

f étant de classe C^{2n} sur $[-1,1]$: $|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_n(f)| \leq \dfrac{M_{2n}(f)}{(C_{2n}^n)^2} \times \dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$M_{2n}(f) = \underset{t\in[-1,1]}{\max} |f^{(2n)}(t)| = \underset{t\in[-1,1]}{\max}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} \left|g^{(2n)}\left(\frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}\right)\right|\right] = \underset{u\in[a,b]}{\max}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}|g^{(2n)}(u)|\right]$

$u = \frac{a+b}{2}+t\,\frac{b-a}{2}$

$M_{2n}(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} \underset{u\in[a,b]}{\max}|g^{(2n)}(u)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} M_{2n}(g)$

Donc $|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_n(f)| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} M_{2n}(g)\,\dfrac{2^{2n+1}}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!} = (b-a)^{2n} M_{2n}(g)\,\dfrac{2}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!}$

$\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_n(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(r_j) = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(u)\,du - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\,\frac{b-a}{2}\right)$

Par conséquent :

$\left|\frac{2}{b-a}\left[\int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\,\frac{b-a}{2}\right)\right]\right| = |\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_n(f)| \leq (b-a)^{2n} M_{2n}(g)\,\dfrac{2}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!}$

En multipliant par $\frac{b-a}{2}$ il vient :

$$\left|\int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\,\frac{b-a}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^{2n+1} M_{2n}(g)}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)!}.$$

Q5 Etude d'un cas particulier.

a) $P_2 = (X^2-1)^2$; $P_2' = 2\times 2X(X^2-1) = 4X^3-4X$; $P_2'' = 12X^2-4 = 12(X^2-\frac{1}{3}) = 12(X-\frac{1}{\sqrt3})(X+\frac{1}{\sqrt3})$.

$r_1 = -\frac{1}{\sqrt3}$ et $r_2 = \frac{1}{\sqrt3}$

$L_1 = \dfrac{1}{-\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}}\left(X-\frac{1}{\sqrt3}\right) = -\frac{\sqrt3}{2}\left(X-\frac{1}{\sqrt3}\right)$; $L_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}}\left(X+\frac{1}{\sqrt3}\right) = \frac{\sqrt3}{2}\left(X+\frac{1}{\sqrt3}\right)$

$L_1 = -\frac{\sqrt3}{2}(X-\frac{1}{\sqrt3})$ et $L_2 = \frac{\sqrt3}{2}(X+\frac{1}{\sqrt3})$.

$\lambda_1 = \int_{-1}^{1} -\frac{\sqrt3}{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt3}\right)dt = \left[-\frac{\sqrt3}{2}\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt3}\right)^2\right]_{-1}^{1} = -\frac{\sqrt3}{4}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt3}\right)^2-\left(-1-\frac{1}{\sqrt3}\right)^2\right] = -\frac{\sqrt3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt3}-1-\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt3}+1+\frac{1}{\sqrt3}\right)$

$\lambda_1 = -\frac{\sqrt3}{4}\left(-\frac{4}{\sqrt3}\right) = 1$

$\lambda_2 = \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt3}{2}\left(t+\frac{1}{\sqrt3}\right)dt = \frac{\sqrt3}{4}\left[\left(t+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt3}{4}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2-\left(-1+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2\right) = \frac{\sqrt3}{4}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt3}-1+\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt3}+1-\frac{1}{\sqrt3}\right)\right] = 1$

b) II.4.c donne pour $n=2$:

$$\left|\int_a^b g(u)du - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j\, g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\frac{b-a}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{\left(\binom{2}{4}\right)^2(5!)} = \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{6^2\times 120}.$$

Donc $\left|\int_a^b g(u)du - \frac{b-a}{2}\left(g\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\frac{b-a}{2}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}+\frac{1}{\sqrt3}\frac{b-a}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{4320}$.

c) Posons $\forall k\in [\![0,p]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{p}$

Pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, c_k est le milieu de $[x_{k-1},x_k]$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(u)du - \frac{x_k-x_{k-1}}{2}\left(g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}-\frac{x_k-x_{k-1}}{2\sqrt3}\right)+g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}+\frac{x_k-x_{k-1}}{2\sqrt3}\right)\right)\right| \leq \frac{(x_k-x_{k-1})^5}{4320}\max_{t\in[x_{k-1},x_k]}|g^{(4)}(t)|$$

or $\frac{x_k-x_{k-1}}{2}=\frac{b-a}{2p}$ et $\max_{t\in[x_{k-1},x_k]}|g^{(4)}(t)|\leq M_4(g)$; de plus $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}=c_k$

Donc $\underbrace{\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(u)du - \frac{b-a}{2p}\left(g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)+g\left(c_k+\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)\right)\right|}_{A_k} \leq \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^5}$

$$\left|\sum_{k=1}^{p}A_k\right| \leq \sum_{k=1}^{p}|A_k| \leq \sum_{k=1}^{p}\frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^5} = \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^4}$$

de plus $\sum_{k=1}^{p}A_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(u)du}_{\int_a^b g(u)du} - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left[g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)+g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)\right]$

Donc

$$\left|\int_a^b g(u)du - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left[g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)+g\left(c_k-\frac{b-a}{2\sqrt3}\right)\right]\right| \leq \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^4}$$

d) Posons $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\alpha_k = c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt3}$ et $\beta_k = c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt3}$.

Notons que $\forall k\in[\![2,p-1]\!]$, $\alpha_k-\alpha_{k-1} = c_k-c_{k-1} = \frac{b-a}{p} = c_k-c_{k-1} = \beta_k-\beta_{k-1}$!

Notons encore que $\alpha_1 = c_1 - \frac{b-a}{2p\sqrt3} = a+\frac{b-a}{2p}-\frac{b-a}{2p\sqrt3} = a+\frac{b-a}{2p}\left(1-\frac{1}{\sqrt3}\right)$

De même $\beta_1 = a+\frac{b-a}{2p}\left(1+\frac{1}{\sqrt3}\right)$. Ceci conduit au programme suivant :

```
Program HEC96MI;

uses crt;

var p:integer;a,b:real;

function eff(x:real):real;

begin
eff:=4/(1+x*x);
end;

function ValAppInte(a,b:real;p:integer):real;

var k:integer;s,alpha,beta,pas:real;

begin

pas:=(b-a)/p;
alpha:=a+pas/2*(1-1/sqrt(3));beta:=a+pas/2*(1+1/sqrt(3));
s:=eff(alpha)+eff(beta);

for k:=2 to p do
    begin
    alpha:=alpha+pas;beta:=beta+pas;
    s:=s+eff(alpha)+eff(beta);
    end;

ValAppInte:=s*pas/2;
end;

begin
clrscr;

write('Donnez a. a=');readln(a);
write('Donnez b. b=');readln(b);
write('Donnez p. p=');readln(p);

writeln;
writeln('Une valeur approchée de l''intégrale est : ',ValAppInte(a,b,p));

end.
```

```
Donnez a. a=0
Donnez b. b=1
Donnez p. p=10

Une valeur approchée de l'intégrale est :  3.1415926540E+00
```