(Q1) a)

b) $u_{100} \simeq 0,98$

```
program hecMII_96;

var i,n:integer;u:real;

begin

write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);

u:=0.5;
writeln('u(1)=0.5');
for i:=2 to n do
    begin
    u:=(1+u*u)/2;
    writeln('u(',i,')=',u);
    end;
end.
```

(Q2) a) h est strictement croissante et continue sur $[0,1]$. $h(0)=\frac{1}{2}$ et $h(1)=1$.

b) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$.

• $u_1=\frac{1}{2}$ et $u_2=\frac{1+1/4}{2}=\frac{5}{8}$ donc la propriété est vraie pour $n=1$.

• Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$. $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$.

Comme h est croissante sur $[0,1]$: $h(0)\leq h(u_n)\leq h(u_{n+1})\leq h(1)$.

Donc : $\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 1$; en particulier : $0\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 1$. Ceci achève la récurrence.

Nous avons donc bien montré que $\underline{\underline{(u_n)_{n\geq 1}\text{ est croissante}}}$.

c) D'après ce qui précède $(u_n)_{n\geq1}$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Notons ℓ sa limite. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=\frac{1+u_n^2}{2}$; donc $\ell=\frac{1+\ell^2}{2}$ (par passage à la limite).

Ce qui donne : $0=-2\ell+1+\ell^2=(\ell-1)^2$; $\ell=1$.

Finalement $\underline{\underline{(u_n)_{n\geq1}\text{ converge vers }1}}$.

(Q3) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}=\frac{v_n-v_{n+1}}{v_{n+1}v_n}=\frac{1-u_n-1+\frac{1+u_n^2}{2}}{\left(1-\frac{1+u_n^2}{2}\right)(1-u_n)}=\frac{u_n^2-2u_n+1}{(1-u_n^2)(1-u_n)}$

$\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}=\frac{(1-u_n)^2}{(1+u_n)(1-u_n)^2}=\frac{1}{1+u_n}=\frac{1}{2-v_n}$.

En toute rigueur il fallait prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\neq 1$. Peut se faire sans problème par récurrence

$\hookrightarrow u_{n+1}-1=\frac{1}{2}(u_n^2-1)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}=\frac{1}{2-v_n}$.

!

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{v_{k+1}}-\frac{1}{v_k}=\frac{1}{2-v_k}\overset{v_k\geq 0}{\geq}\frac{1}{2}$. $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_1}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}}-\frac{1}{v_k}\right)\geq(n-1)\times\frac{1}{2}$

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \frac{1}{v_n}\geq\frac{1}{v_1}+\frac{n-1}{2}$; mieux $\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\ \frac{1}{v_n}\geq\frac{1}{v_1}+\frac{n-1}{2}=2+\frac{n-1}{2}=\frac{n+3}{2}$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{v_n}\geq\frac{n+3}{2}$. (on peut aussi faire une récurrence)

b) Soit $x\in[0,1]$. $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2-x}[(1+x)(2-x)-2]=\frac{x(1-x)}{2(2-x)}\geq 0$

Donc $\forall x\in[0,1]$, $\frac{1}{2-x}\leq\frac{1}{2}+\frac{x}{2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $v_n\in[0,1]$ donc : $\frac{1}{2-v_n}\leq\frac{1}{2}+\frac{v_n}{2}\overset{a)}{\leq}\frac{1}{2}+\frac{1}{n+3}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}=\frac{1}{2-v_n}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$.

Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. $\frac{1}{k}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}$ car $t\mapsto\frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k-1,k]$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}=\int_{1}^{n}\frac{dt}{t}=\ln n-\ln 1=\ln n$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq\ln n$. (on pouvait aussi utiliser $\ln x\leq x-1$)

Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_1}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}}-\frac{1}{v_k}\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k+3}\right)=\frac{n-1}{2}+\sum_{k=4}^{n+2}\frac{1}{k}$

$\frac{1}{v_n}\leq\frac{1}{v_1}+\frac{n-1}{2}+\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=2+\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{v_n}\leq\frac{1}{2}(4+n-1-1)+\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k}-\frac{1}{3}\leq\frac{1}{2}(n+2)+\ln(n+2)-\frac{1}{3}\leq\frac{n+2}{2}+\ln(n+2)$

Donc : $\frac{1}{v_n}\leq\frac{n+2}{2}+\ln(n+2)$ ce qui vaut encore pour $n=1$ car $\frac{1}{v_1}=2$ et $\frac{1+2}{2}+\ln 3\geq 2$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{v_n}\leq\frac{n+2}{2}+\ln(n+2)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{n+3}{2}\leq\frac{1}{v_n}\leq\frac{n+2}{2}+\ln(n+2)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{n+3}{2n}\leq\frac{1}{nv_n}\leq\frac{n+2}{2n}+\frac{\ln(n+2)}{n}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{2n}=\frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{2n}+\frac{\ln(n+2)}{n}\right)=\frac{1}{2}$.

Par encadrement on obtient donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nv_n}=\frac{1}{2}$. Donc $\lim_{n\to+\infty}(nv_n)=2$.

Finalement : $v_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{n}$. $1-u_n\sim\frac{2}{n}$.

I EXEMPLES D'EXPÉRIENCES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Q1 $g_n = E(G_n) = E(X_1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r}\, p\left(X_1 = \frac{k}{r}\right) = \frac{1}{r} \times \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} k = \frac{1}{r(r+1)} \times \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2}.$

$$\underline{\underline{g_n = \frac{1}{2}.}}$$

Q2 a) Notons que $\forall k \in [\![0, r]\!]$, $\frac{k}{r} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow k < \frac{r}{2} \overset{r \text{ est impair}}{\Longleftrightarrow} k \leq \frac{r-1}{2}$

$$p(X_1 < 0{,}5) = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} p\left(X_1 = \frac{k}{r}\right) = \left(\frac{r-1}{2} + 1\right) \times \frac{1}{r+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{\underline{p(X_1 < 0{,}5) = \frac{1}{2}.}}$$

b) Soit $j \in [\![0, \frac{r-1}{2}]\!]$. $\frac{j}{r} < 0{,}5$.

$$p\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = p\left(\{X_1 < 0{,}5\} \cap \{X_2 < 0{,}5\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} < 0{,}5\} \cap \{X_n = \frac{j}{r}\}\right)$$

$$p\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = p(X_1 < 0{,}5)\, p(X_2 < 0{,}5) \cdots p(X_{n-1} < 0{,}5)\, p\left(X_n = \frac{j}{r}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{r+1} = \frac{2}{r+1}\, \frac{1}{2^n}.$$

$$\underline{\underline{\forall j \in [\![0, \tfrac{r-1}{2}]\!],\ p\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{2}{r+1}\, \frac{1}{2^n}.}}$$

Soit $j \in [\![\frac{r+1}{2}, r]\!]$. $\frac{j}{r} > 0{,}5$.

$$p\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = p\left(X_1 = \frac{j}{r} \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n} \{X_1 < 0{,}5\} \cap \{X_2 < 0{,}5\} \cap \cdots \cap \{X_{k-1} < 0{,}5\} \cap \{X_k = \frac{j}{r}\}\right)\right)$$

$$p\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = p\left(X_1 = \frac{j}{r}\right) + \sum_{k=2}^{n} p(X_1 < 0{,}5)\, p(X_2 < 0{,}5) \cdots p(X_{k-1} < 0{,}5)\, p\left(X_k = \frac{j}{r}\right).$$

$$p\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{1}{r+1} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{r+1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{r+1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$\underline{\underline{\forall j \in [\![\tfrac{r+1}{2}, r]\!],\ p(G_n = j/r) = \frac{2}{r+1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).}}$$

c) $$g_n = \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{j}{r}\, \frac{2}{r+1} \times \frac{1}{2^n} + \sum_{j=\frac{r+1}{2}}^{r} \frac{j}{r} \times \frac{2}{r+1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$g_n = \frac{2}{r(r+1)}\, \frac{1}{2^n}\, \frac{\frac{r-1}{2} \times \left(\frac{r-1}{2} + 1\right)}{2} + \frac{2}{r(r+1)}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \sum_{j=\frac{r+1}{2}}^{r} j$$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\underbrace{\left(r - \frac{r+1}{2} + 1\right)}_{\text{nb de termes}} \times \frac{\overset{\text{Dernier terme}}{r} + \overset{\text{1er terme}}{\frac{r+1}{2}}}{2}$$

$$g_n = \frac{2}{r(r+1)}\, \frac{1}{2^n}\, \frac{r^2 - 1}{8} + \frac{2}{r(r+1)}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{(r+1)(3r+1)}{8}$$

$$q_n = \frac{2}{r(r+1)}\frac{1}{2^n}\frac{(r-1)(r+1)}{8} + \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{3r+1}{4} = \frac{1}{r}\frac{1}{2^n}\frac{r-1}{4} + \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{3r+1}{4}.$$

$$q_n = \frac{1}{2^n}\frac{1}{4r}(r-1-3r-1) + \frac{3r+1}{4r} = \frac{3r+1}{4r} - \frac{1}{2^n}\frac{1}{2r}(r+1)$$

Donc $\underline{\underline{q_n = \frac{3r+1}{4r} - \frac{r+1}{r} \times \frac{1}{2^{n+1}}}}$.

$(2^{n+1})_{n\geq 2}$ est croissante ; $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante ; $\left(-\frac{r+1}{r}\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n\geq 1}$ est croissante donc

$\underline{\underline{(q_n)_{n\geq 2}}}$ **est croissante.**

$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{3r+1}{4r}}}$; $\underline{\underline{\lim_{r\to+\infty} q_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}}}$.

A défaut de "prévoir" $\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{3r+1}{4r}$ ... expliquons !

---

n tendant vers $+\infty$ il est quasi-certain d'obtenir pour la première fois au rang i_0 la réalisation de l'événement $\{X_{i_0} > \sigma_{i_0}\} = \{X_{i_0} > 0,5\}$, donc que G_n prenne une valeur au hasard dans l'ensemble $\left\{\frac{1}{r}\frac{r+1}{2}, \frac{1}{r}\left(\frac{r+1}{2}+1\right), \dots, \frac{1}{r}r\right\}$ puisque $G_n = X_{i_0}$

Calculons alors l'espérance e d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'ensemble précédent qui contient $\frac{r+1}{2}$ éléments.

$$e = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{1}{\frac{r+1}{2}} \times \frac{1}{r}\left(\frac{r+1}{2}+k\right) = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{2}{r(r+1)}\frac{r+1}{2} + \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{2}{r(r+1)}k$$

$$e = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} 1 + \frac{2}{r(r+1)}\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} k = \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{2}+1\right) + \frac{2}{r(r+1)}\frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{2}\right)\left(\frac{r-1}{2}+1\right)$$

$$e = \frac{1}{r}\frac{r+1}{2} + \frac{1}{r}\times\frac{r-1}{4} = \frac{1}{4r}(2r+2+r-1) = \frac{3r+1}{4r} = \lim_{n\to+\infty} q_n \ !!$$

(Q3) a) $\{G_n = \frac{j}{r}\} = \{X_1<1\}\cap\{X_2<1\}\cap\dots\cap\{X_{n-1}<1\}\cap\{X_n = \frac{j}{r}\}$ $(\forall i\in[\![1,n-1]\!], \sigma_i = 1\,!)$

$j\in[\![0,r-1]\!]$. $p(G_n=\frac{j}{r}) = \left[\prod_{k=1}^{n-1} p(X_k<1)\right]p(X_n=\frac{j}{r}) = \left[\prod_{k=1}^{n-1}(1-p(X_k=1))\right]p(X_n=\frac{j}{r})$

$$p(G_n=\frac{j}{r}) = \left(1-\frac{1}{r+1}\right)^{n-1}\frac{1}{r+1} = \left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}\frac{1}{r+1}$$

$$p(G_n=1) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} p\left(G_n=\frac{j}{r}\right) = 1 - r \times \left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}\frac{1}{r+1} = 1-\left(\frac{r}{r+1}\right)^n$$

Finalement : $\forall j \in [\![0, r-1]\!]$, $p\left(G_n=\frac{j}{r}\right) = \frac{1}{r+1}\left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1} = \frac{1}{r}\left(\frac{r}{r+1}\right)^n$.

$p(G_n=1) = 1-\left(\frac{r}{r+1}\right)^n$.

b) $q_n = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{j}{r}\,\frac{1}{r}\left(\frac{r}{r+1}\right)^n + 1-\left(\frac{r}{r+1}\right)^n = \frac{1}{r^2}\left(\frac{r}{r+1}\right)^n \frac{(r-1)r}{2} + 1-\left(\frac{r}{r+1}\right)^n$.

$q_n = \left(\frac{r-1}{2r}-1\right)\left(\frac{r}{r+1}\right)^n + 1 = 1 - \frac{r+1}{2r}\left(\frac{r}{r+1}\right)^n = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}$

$q_n = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}$

(q_n) est croissante car la suite $\left(\left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}\right)$ est décroissante $\left(\frac{r}{r+1} \in [0,1[\right)$

$\lim_{n\to+\infty} q_n = 1$ $\quad\left(\frac{r}{r+1} \in [0,1[\right)$.

On pouvait effectivement prévoir ce résultat car $p(X_i<1)<1$ et il est donc "quasi-certain" lorsque n tend vers $+\infty$" que G_n prenne la valeur 1.

Q4 Dans la première stratégie $q_n = \frac{1}{2}$; dans la seconde $q_n = \frac{3r+1}{4r} - \frac{r+1}{r}\,\frac{1}{2^{n+1}}$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{3r+1}{4r}$; dans la troisième $q_n = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n = 1$.

clairement la troisième stratégie est la meilleure au moins pour n assez grand. Il faut cependant préciser ; la vitesse de convergence de (q_n) vers $\frac{3r+1}{4r}$ dans la deuxième stratégie est plus rapide que la vitesse de convergence de (q_n) vers 1 dans la troisième stratégie.

Remarque. On pourra regarder la version éco. pour avoir une idée sur le temps d'attente de la réalisation du gain. ceci est aussi un élément important pour comparer les deux stratégies.

II. Exemples d'expériences aléatoires continues

Q1 $\forall x \in \mathbb{R}, F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$. Donc $\forall x \in]-\infty,0[, F(x)=0$; $\forall x \in [0,1[, F(x)=\int_0^x \varphi(t)dt = x$ et $\forall x \in [1,+\infty[, F(x)=\int_0^1 \varphi(t)dt = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,0[\\ x \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$.

Q2 Première stratégie.-

Comme X_1 ne prend que des valeurs positives, l'événement $\{X_1 \geq 0\}$ est réalisé et par conséquent : $G_n = X_1$.

Donc $E(G_n)=E(X_1)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

$g_n = 1/2$.

Q3 Deuxième stratégie.-

a) Soit $t \in [0,\alpha[$.

$\{G_n \leq t\}$ signifie que l'on a obtenu un gain inférieur à α donc que ce gain a été obtenu au rang n et ce qui suppose donc la réalisation des événements $\{X_1<\alpha\}, \{X_2<\alpha\},\dots, \{X_{n-1}<\alpha\}$ et $\{X_n \leq t\}$. Par conséquent :

$p(G_n \leq t) = p(\{X_1<\alpha\} \cap \{X_2<\alpha\} \cap \dots \cap \{X_{n-1}<\alpha\} \cap \{X_n \leq t\})$. Puis par indépendance :

$p(G_n \leq t) = p(X_1<\alpha)\,p(X_2<\alpha)\dots p(X_{n-1}<\alpha)\,p(X_n \leq t) = \alpha^{n-1}t$.

$\forall t \in [0,\alpha[, \ p(G_n \leq t) = \alpha^{n-1}t$.

Soit $t \in [\alpha, 1[$

$\{G_n > t\}$ est réalisé signifie que l'on a obtenu un gain supérieur au seuil. Le gain a été obtenu au rang 1 ou au rang 2 ou ... ou au rang n. Par conséquent :

$\{G_n > t\} = \{X_1 > t\} \cup (\{X_1<\alpha\} \cap \{X_2>t\}) \cup (\{X_1<\alpha\} \cap \{X_2<\alpha\} \cap \{X_3>t\}) \cup \dots \cup$
$(\{X_1<\alpha\} \cap \{X_2<\alpha\} \cap \dots \cap \{X_{n-1}<\alpha\} \cap \{X_n>t\})$

donc $\{G_n>t\} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\{X_1<\alpha\}\cap\{X_2<\alpha\}\cap\dots\cap\{X_{i-1}<\alpha\}\cap\{X_i>t\}\right)$... à un abus près $(\dots i=1)$

par disjonction et indépendance il vient : $p(G_n>t)=\sum_{i=1}^{n} p(X_1<\alpha)\,p(X_2<\alpha)\cdots p(X_{i-1}<\alpha)\,p(X_i>t)$

$$p(G_n>t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i-1}(1-t) = (1-t)\,\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}.$$

$$F_n(t)=1-p(G_n>t) = 1-(1-t)\,\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Finalement : $\forall t\in\mathbb{R},\ F_n(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\in\,]-\infty,0[\ \underline{\text{ou}}\ ]-\infty,0] \\ \alpha^{n-1}t & \text{si } t\in[0,\alpha[\ \underline{\text{ou}}\ [0,\alpha] \\ 1-(1-t)\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} & \text{si } t\in[\alpha,1[\ \underline{\text{ou}}\ [\alpha,1] \\ 1 & \text{si } t\in[1,+\infty[\end{cases}$

les trois "<u>ou</u>" sont à vérifier

F_n est continue et dérivable sur $]-\infty,0]$, $[0,\alpha]$, $[\alpha,1]$ et $[1,+\infty[$ donc F_n est continue en tout point de $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{0,\alpha,1\}$.

$\forall t\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[,\ F_n'(t)=0$

$\forall t\in\,]0,\alpha[,\ F_n'(t)=\alpha^{n-1}$

$\forall t\in\,]\alpha,1[,\ F_n'(t)=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

F_n' est donc continue sur $\mathbb{R}-\{0,\alpha,1\}$. Ceci achève de prouver que G_n est une variable aléatoire à densité et que l'on peut prendre comme densité pour G_n la fonction f_n définie par :

$\forall t\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[,\ f_n(t)=0$, $\forall t\in[0,\alpha[,\ f_n(t)=\alpha^{n-1}$ et $\forall t\in[\alpha,1[,\ f_n(t)=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$.

<u>b)</u> $\int_{-\infty}^{0} t f_n(t)\,dt$ existe et vaut 0 ; $\int_{0}^{\alpha} t f_n(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\alpha^2}{2}\times\alpha^{n-1}=\frac{\alpha^{n+1}}{2}$;

$\int_{\alpha}^{1} t f_n(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1-\alpha^2}{2}\times\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1+\alpha}{2}(1-\alpha^n)$ et $\int_{1}^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ existe et vaut 0.

donc g_n existe et vaut $\frac{\alpha^{n+1}}{2}+\frac{1-\alpha^2}{2}\,\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{\alpha^{n+1}+(1+\alpha)(1-\alpha^n)}{2}=\frac{1+\alpha-\alpha^n}{2}$

$$g_n=\frac{1+\alpha-\alpha^n}{2}.$$

$(\alpha^n)_{n\geq 1}$ est décroissante $(\alpha\in\,]0,1[)$, $(-\alpha^n)_{n\geq 1}$ est croissante donc <u>$(g_n)_{n\geq 1}$ est croissante</u>.

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \frac{1+\alpha}{2}$ car $\alpha \in [0,1[$.

Ce résultat s'explique ainsi. Si le temps ne nous est pas compté nous vendons au moment où le seuil α sera dépassé. Le gain sera un nombre aléatoire de l'intervalle $[\alpha,1]$; la moyenne du gain sera $\frac{1+\alpha}{2}$ (loi uniforme sur $[\alpha,1]$).

c] $g_2 = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}\left[1-(\alpha-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right] = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})^2$

g_2 est donc maximum pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

d] Lorsque α vaut $\frac{1}{2}$: $g_n = \frac{1+1/2-(1/2)^n}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}$

Ainsi retrouve-t-on la limite du g_n de la seconde stratégie de I lorsque r tend vers $+\infty$. Normal 1.. Le seuil est le même

2.. Lorsque r tend vers $+\infty$ choisir un élément au hasard de l'ensemble $\{\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r}{r}\}$ ... c'est choisir un nombre au hasard entre $[0,1]$.

Plus précisément notons X_1^r ← indice pas exposant !! le X_1 de la stratégie I - N°2, $(X_1^r)_{r\geq 1}$ converge en loi vers une var suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ qui n'est autre que la loi de X_1 dans II N°2...

reste plus qu'à le montrer.

Q4 Troisième stratégie.

a] $G_1 = X_1$ donc G_1 est une variable aléatoire à densité d'espérance $g_1 = \frac{1}{2}$.

b] $\sigma_1 = a_1$. Q3 nous enseigne alors que G_2 est une var à densité d'espérance

$g_2 = \frac{1+a_1-a_1^2}{2} = \frac{1+a_1-a_1^2}{2}$; g_2 est maximale pour $a_1 = \frac{1}{2}$.

c] Expliquons quelque peu cette stratégie.

1) On détermine l'espérance du gain lorsque n=1. C'est $g_1 = \frac{1}{2}$

2) Si n=2 ou la valeur du premier jour est inférieure à $g_1 < \frac{1}{2}$; il reste un jour donc on peut espérer mieux et on vend le second jour

ou la valeur du premier jour est supérieure ou égale à $g_1 = \frac{1}{2}$ et on vend.

Ceci donne une espérance de gain g_2

3) Si $n=3$ ou la valeur du premier jour est inférieure à g_2 ; il reste deux jours en partant avec espérer mieux on ne vend pas ; on adopte pour les deux derniers jours la stratégie de rang 2

ou la valeur du premier jour est supérieure à g_2 ; on ne peut espérer mieux dans les deux jours qui suivent ; on vend le premier jour !

et ainsi de suite ... Retrouver ce schéma.

$\boxed{\text{Soit } t \in [0, a_n[.}$

$F_{n+1}(t) = p(G_{n+1} \leq t) = p(G_{n+1} \leq t \cap X_1 < a_n) = p(G_{n+1} \leq t / X_1 < a_n)\, p(X_1 < a_n)$.

$F_{n+1}(t) \overset{*}{=} p(G_n \leq t)\, p(X_1 < a_n) = F_n(t)\, a_n = a_n F_n(t)$

* La probabilité pour que $\{G_{n+1} \leq t\}$ sachant que $\{X_1 < a_n\}$ n'est autre que la probabilité de $\{G_n \leq t\}$; en effet si $\{X_1 < a_n\}$ on a pas vendu le premier jour et les n jours suivants ont donné un gain inférieur ou égal à t.

$\forall t \in [0, a_n[, \quad F_{n+1}(t) = a_n F_n(t).$

$\boxed{\text{Soit } t \in [a_n, 1[.}$

$$\begin{aligned} F_{n+1}(t) &= p(G_{n+1} \leq t) = p(a_n \leq X_1 \leq t) + p(G_{n+1} \leq t \cap X_1 < a_n) \\ &= (t - a_n) + p(G_{n+1} \leq t / X_1 < a_n)\, p(X_1 < a_n) \\ &= t - a_n + p(G_n \leq t)\, a_n = t - a_n + a_n F_n(t) \end{aligned}$$

$\forall t \in [a_n, 1[, \quad F_{n+1}(t) = t - a_n + a_n F_n(t).$

Notons que $\forall t \in]-\infty, 0[,\ F_{n+1}(t) = 0$ et $\forall t \in [1, +\infty[,\ F_{n+1}(t) = 1$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_{n+1}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty, 0[\ \underline{\text{et même}}\ ]-\infty, 0] \\ a_n F_n(t) \text{ si } t \in [0, a_n[\ \underline{\text{et même}}\ [0, a_n] \\ t - a_n + a_n F_n(t) \text{ si } t \in [a_n, 1[\ \underline{\text{et même}}\ [a_n, 1] \\ 1 \text{ si } t \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - D_n$ où D_n est fini et contenu dans $\mathbb{R}$.

Par conséquent

1.. F_{n+1} est continue sur $]-\infty, 0]$, $[0, a_n]$, $[a_n, 1]$ et $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$

2.. F_{n+1} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R} - (D_n \cup \{0, a_n, 1\})$.

Posons $S = \mathbb{R} - (D \cup \{0, a_n, 1\})$.

$\forall t \in]-\infty, 0[\cap S$, $F'_{n+1}(t) = 0$

$\forall t \in]0, a_n[\cap S$, $F'_{n+1}(t) = a_n F'_n(t) = a_n f_n(t)$.

$\forall t \in]a_n, 1[\cap S$, $F'_{n+1}(t) = 1 + a_n F'_n(t) = 1 + a_n f_n(t)$.

$\forall t \in]1, +\infty[\cap S$, $F'_{n+1}(t) = 0$

Par conséquent G_{n+1} est une variable aléatoire à densité et admet pour densité f_{n+1} définie par

$$\begin{cases} \forall t \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[, & f_{n+1}(t) = 0 \\ \forall t \in [0, a_n[, & f_{n+1}(t) = a_n f_n(t) \\ \forall t \in [a_n, 1[, & f_{n+1}(t) = 1 + a_n f_n(t) \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{0} t f_{n+1}(t)\,dt$ (resp. $\int_{1}^{+\infty} t f_{n+1}(t)\,dt$) existe et vaut 0.

G_n admet une espérance donc $\int_{0}^{a_n} t f_n(t)\,dt$ et $\int_{a_n}^{1} t f_n(t)\,dt$ existent donc $\int_{0}^{a_n} t f_{n+1}(t)\,dt$ et $\int_{a_n}^{1} t f_{n+1}(t)\,dt$ aussi.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{n+1}(t)\,dt$ converge ; G_{n+1} possède une espérance g_{n+1}.

$$g_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{n+1}(t)\,dt = \int_{0}^{a_n} t\, a_n f_n(t)\,dt + \int_{a_n}^{1} (t + a_n t f_n(t))\,dt$$

$$g_{n+1} = a_n \int_{0}^{1} t f_n(t)\,dt + \frac{1}{2}[t^2]_{a_n}^{1} = a_n g_n + \frac{1}{2}(1 - a_n^2).$$

$$\underline{\underline{g_{n+1} = a_n g_n + \frac{1}{2}(1 - a_n^2).}}$$

$$g_{n+1} = \frac{1}{2}[-a_n^2 + 2a_n g_n + 1] = \frac{1}{2}[-(a_n - g_n)^2 + g_n^2 + 1]$$

La valeur de a_n qui maximise g_{n+1} est g_n. $\underline{\underline{g_{n+1} \text{ vaut alors } \frac{1}{2}(g_n^2 + 1).}}$

Comme $g_n \in [0, 1[$: $\underline{\underline{g_{n+1} \in [0, 1[.}}$

d) D'après le préliminaire $(g_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1. De plus $1 - g_n \sim \frac{2}{n}$

Pas terrible la convergence !

Q5 Stratégie 1.. $q_n = \frac{1}{2}$

Stratégie 2.. $q_n = \frac{1+\alpha-\alpha^n}{2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \frac{1+\alpha}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[$

Stratégie 3.. $\begin{cases} q_1 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = \frac{1+q_n^2}{2} \end{cases}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 1$ et $1-q_n \sim \frac{2}{n}$

Ici encore la stratégie 3 est pour n assez grand la meilleure mais notons que dans ce cas la convergence vers 1 est assez lente.
Notons encore que cela ne préjuge pas du <u>temps d'attente</u> du gain qui est un élément important.

Je voulais corriger les questions de la version ECO ; pas eu le temps !

Voir donc la prochaine édition.