ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION SCIENTIFIQUE

Samedi 18 mai 1996

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2 et par f une application de classe C^{2n} du segment $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$

Dans la partie I, on étudie le polynôme $P_n(x) = (x^2-1)^n$, ses dérivées successives $P_n^{(j)}$ et notamment sa dérivée n^{eme} : $P_n^{(n)}$.
La partie II propose l'étude de deux procédés d'interpolation polynomiale de la fonction f. Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul d'une valeur approchée de $\mathcal{I}(f)$, le second de majorer l'erreur commise.

PARTIE I.

1. ***Étude des racines de P_n et de ses dérivées.***

a. Établir l'existence, pour tout entier naturel j inférieur ou égal à n, d'un polynôme Q_j tel que, pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j}Q_j(x) \\ Q_j(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$$

On pourra raisonner par récurrence sur l'entier j et on précisera l'expression de Q_{j+1} en fonction de Q_j pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.
En déduire les valeurs en -1 et en 1 de P_n et de ses dérivées d'ordre j strictement inférieur à n.

b. Énoncer avec précision le théorème de Rolle. Établir que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans l'intervalle $]-1,1[$ puis que le polynôme P_n'' admet au moins deux racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.
Démontrer que, pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, le polynôme $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

c. En déduire que le polynôme $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines réelles distinctes et que celles-ci appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

Dans toute la suite du problème, ces racines sont notées $r_1, r_2, \ldots, r_n$ avec $-1 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < 1$.

2. ***Calcul d'une intégrale auxiliaire.***

On pose, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels :

$$W(p,q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p(t+1)^q \,\mathrm{d}t$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $W(p+1,q-1)$ et $W(p,q)$ lorsque $q \geqslant 1$.

b. En déduire que $W(n,n) = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. ***Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées.***

Dans cette question, on désigne par Q un polynôme à coefficients réels.

a. Établir rigoureusement l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t)P_n(t)\,dt$$

b. Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt$ lorsque Q est de degré strictement inférieur à n ?

c. Expliciter $P_n^{(2n)}$ puis exprimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2 dt$ en fonction de $W(n,n)$ et obtenir ainsi sa valeur.

PARTIE II.

1. ***Polynôme d'interpolation de Lagrange de f.***

On pose désormais pour tout entier j compris entre 1 et n et pour tout nombre réel x :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - r_i}{r_j - r_i} \qquad\qquad \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)\,dt$$

a. Calculer $L_j(r_k)$ en distinguant suivant que k est, ou non, égal à j.
En déduire que $\left(L_1, L_2, \ldots, L_n\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à n.

b. Expliciter, dans la base précédente, un polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que $A_n(r_j) = f(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n et prouver qu'un tel polynôme est unique.

c. Établir l'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

On se propose désormais de prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$ l'intégrale $\mathcal{I}(A_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)dt$ que l'on notera $\mathcal{I}_n(f)$ dans toute la suite du problème.

En d'autres termes, on prend pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(f)$ le nombre réel $\mathcal{I}_n(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

2. ***Comparaison de $\mathcal{I}(P)$ et de $\mathcal{I}_n(P)$ lorsque P est un polynôme.***

Dans cette question, on suppose que P est un polynôme dont le degré est noté $deg(P)$.
Par convention le degré du polynôme nul sera posé égal à $-\infty$.

a. On suppose que $deg(P) < n$. Comparer $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

b. On suppose que $deg(P) < 2n$.
- Justifier l'existence d'un couple (Q, R) de polynômes tel que l'on ait :

$$P = Q\,P_n^{(n)} + R \quad \text{et} \quad deg(R) < n$$

- Montrer que $deg(Q) < n$.
- Déduire des résultats de la partie I que $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(R)$.
- Comparer $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

3. *Polynôme d'interpolation de Hermite de f.*

a. À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à $2n$, on associe l'élément $\varphi(H) = \Big(H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \dots, H(r_n), H'(r_n)\Big)$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Établir que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer son noyau.

On rappelle qu'un polynôme non nul de degré d admet au plus d racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

b. En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul tel que $B_n(r_j) = f(r_j)$ et $B_n'(r_j) = f'(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

c. Déduire des résultats précédents que $\mathfrak{I}(B_n) = \mathfrak{I}_n(f)$.

4. *Majoration de $\big|\mathfrak{I}(f) - \mathfrak{I}_n(f)\big|$.*

Soit $M_{2n}(f)$ le maximum de $|f^{(2n)}(t)|$ lorsque t décrit le segment $[-1,1]$.

Dans cette question, on désigne par x un nombre réel donné appartenant au segment $[-1,1]$ et distinct des nombres $r_1, r_2, \dots, r_n$.

On considère alors l'application g_x définie sur $[-1,1]$ par

$$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha\left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$$

où α est le nombre réel (dont on justifiera l'existence) tel que $g_x(x) = 0$.

a. En appliquant le théorème de Rolle à l'application g_x sur des intervalles à préciser, prouver que g_x' s'annule en au moins n points de $]-1,1[$ distincts de $r_1, r_2, \dots, r_n$.

b. Calculer $g_x'(r_1), g_x'(r_2), \dots, g_x'(r_n)$.

Établir que $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c appartenant au segment $[-1,1]$.

c. Expliciter $g_x^{(2n)}(t)$ et en déduire une expression de α en fonction de $f^{(2n)}(c)$ et de n.

d. À l'aide de l'égalité $g_x(x) = 0$, établir que $f(x) - B_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3} f^{(2n)}(c)\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$.

e. Prouver que, pour tout réel x de $[-1,1]$:

$$\big|f(x) - B_n(x)\big| \leqslant \frac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3} M_{2n}(f)\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

On distinguera deux cas suivant que x est, ou non, égal à l'un des nombres réels $r_1, r_2, \dots, r_n$.

Déduire alors des résultats des parties I et II que :

$$\big|\mathfrak{I}(f) - \mathfrak{I}_n(f)\big| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{\left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

f. On considère dans cette question une application g à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de classe C^{2n} sur un segment $[a,b]$.

On désigne par $M_{2n}(g)$ le maximum de $|g^{(2n)}(u)|$ lorsque u décrit le segment $[a,b]$.

En envisageant l'application f définie sur $[-1,1]$ par $f(t) = g\Big(\dfrac{a+b}{2} + t\,\dfrac{b-a}{2}\Big)$, donner en fonction de a, b, n et $M_{2n}(g)$ un majorant de l'expression suivante :

$$\left|\int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, g\Big(\frac{a+b}{2} + r_j\frac{b-a}{2}\Big)\right|$$

5. ***Étude d'un cas particulier.***
Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a. Déterminer le polynôme P_2'', ses racines r_1 et r_2, les polynômes L_1, L_2 ainsi que les intégrales $\lambda_1 = \mathfrak{I}(L_1)$ et $\lambda_2 = \mathfrak{I}(L_2)$.

b. En appliquant la majoration obtenue au II.4.c., montrer que :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\Big(g\big(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\big) + g\big(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\big)\Big) \right| \leqslant \frac{M_4(g)\,(b-a)^5}{4320}$$

c. On considère un entier $p \geqslant 1$ et on subdivise le segment $[a, b]$ en p sous-segments de même longueur, dont on note les milieux $c_1, c_2, \ldots, c_p$.
En appliquant l'inégalité précédente à chacun de ces p sous-segments, majorer en fonction de p et $M_4(g)$ l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\Big(g\big(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\big) + g\big(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\big)\Big) \right|$$

d. Écrire en PASCAL un algorithme de calcul de la somme précédente, les réels a et b, la fonction g ainsi que l'entier p étant supposés donnés.

——— *FIN* ———