CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

lundi 5 mai 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

On désigne par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est concave si, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Dans la partie **I** on établit quelques propriétés très classiques des fonctions concaves utilisées dans la suite du problème. Les parties **II** et **III** sont consacrées à un modèle traitant de problèmes financiers.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et f une fonction de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$. On dit que f présente un maximum en un point x_0 de $\mathbf{R}^n$ si, pour tout x de $\mathbf{R}^n$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.

I

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction concave. En s'appuyant sur un dessin, donner une interprétation graphique de la concavité de f. Que peut-on dire de la fonction $-f : x \to -f(x)$?

2. On considère dans cette question une fonction $f \in \mathcal{E}$. Le but de cette question est de prouver que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) \leq 0$.

a. On suppose que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) \leq 0$. Etablir que f est concave.

b. Réciproquement, on suppose que f est concave. Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer la valeur de la limite suivante:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

En déduire que $f''(x) \leq 0$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction concave et x_0 un réel tel que $f'(x_0) = 0$. Montrer que f présente un maximum en x_0.

4. Soit $g \in \mathcal{E}$. On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout réel x, on a: $g''(x) \leq -\alpha$. Prouver que g présente un maximum sur $\mathbf{R}$. Est-il unique en général ?

5. Exemple.

a. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{E}$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = -x^2 e^{-x}$. (On pourra intégrer par parties).

b. Parmi les fonctions du **a**, déterminer toutes celles présentant un maximum sur $\mathbf{R}$.

6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction concave, et p un entier naturel supérieur ou égal à 1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i = 1$, et $x_1, \ldots, x_p$ des nombres réels. Etablir que:

$$f\Big(\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i x_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i f(x_i)$$

II

Etude d'un modèle financier simplifié.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble fini des résultats possibles susceptibles de se produire à la Bourse. On considère un investisseur $\mathcal{S}$ se donnant, d'une part un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω, et d'autre part une fonction **concave** $u \in \mathcal{E}$, dite "fonction d'utilité". On suppose qu'entre deux variables (ou revenus) aléatoires définies sur Ω et à valeurs réelles, W_1 et $W_2 : \Omega \to \mathbf{R}$, $\mathcal{S}$ préfère W_1 à W_2 si $E(u(W_1)) \geq E(u(W_2))$, où $E(u(W_1))$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $u(W_1)$.

1. Soit $W : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Etablir une inégalité entre $E(u(W))$ et $u(E(W))$. En déduire le choix de l'investisseur $\mathcal{S}$ entre W et la variable aléatoire égale à la constante $E(W)$.

On considère maintenant un réel positif R_0 et une variable aléatoire $R_1 : \Omega \to \mathbf{R}$. A chaque réel x on associe la variable aléatoire $W(x) : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par

$$W(x) = (1-x)R_0 + xR_1$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de deux natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision x de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1-x$ des titres à revenu fixe R_0 et pour x des titres à revenu aléatoire R_1 (x étant quelconque, les sommes x ou $1-x$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives). La variable aléatoire $W(x)$ représente donc le revenu associé à la décision x.

L'investisseur suppose, *dans cette partie* **II** *seulement*, que la variable aléatoire R_1 ne prend que deux valeurs: R_0+a avec probabilité $\frac{1}{2}$ et R_0-b avec probabilité $\frac{1}{2}$, où a et b sont deux réels strictement positifs fixés.

2. Donner, pour chaque réel x, une expression simple de $f(x)=E\big(u(W(x))\big)$. La fonction f ainsi définie est-elle concave?

3. On suppose que la fonction dérivée u' possède en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une limite finie strictement positive notée k_1 (resp. k_2). Vérifier que $k_1 \leq k_2$.

a. On suppose que:

$$\frac{k_1}{k_2} < \frac{a}{b} < \frac{k_2}{k_1}$$

Montrer que f présente un maximum sur $\mathbf{R}$.

b. On suppose que f présente un maximum sur $\mathbf{R}$. Montrer que:

$$\frac{k_1}{k_2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{k_2}{k_1}$$

III

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel défini par: $<x,y>=\sum_{i=1}^{i=3} x_i y_i$ pour tous vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ de $\mathbf{R}^3$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}$. Enfin, on dit qu'une fonction $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est concave si, pour tout x,y de $\mathbf{R}^3$ et tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

1. Prouver qu'une fonction $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est concave si et seulement si, pour tous vecteurs x et h de $\mathbf{R}^3$, la fonction $\phi_{x,h}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, définie par $\phi_{x,h}(t)=f(x+th)$, est concave.

2. On reprend les notations de la question précédente et on suppose que $f \in \mathcal{F}$. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_3}$. De même, les dérivées partielles du second ordre de f sont notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, où $i,j \in \{1,2,3\}$.

a. Soit $(x,h)\in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Exprimer pour chaque réel t, les dérivées première et seconde $\phi'_{x,h}(t)$ et $\phi''_{x,h}(t)$, de l'application $\phi_{x,h}$, en fonction des dérivées partielles de f.

b. Soit x un vecteur de $\mathbf{R}^3$, on note A_x la matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels:

$$A_x = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\Big)_{1\leq i,j\leq 3}$$

Par abus d'écriture A_x désignera également l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A_x dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrer que si les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles alors, pour tout h de $\mathbf{R}^3$, $< A_x(h), h > \leq 0$. La réciproque est-elle vraie ou fausse?

c. Montrer que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles.

d. Déterminer les réels λ tels que la fonction f de $\mathcal{F}$ définie par la relation:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2\lambda x_1 x_3 - x_2^2 + 2\lambda x_2 x_3 - x_3^2$$

soit concave.

3. Soit f une fonction concave de $\mathcal{F}$ et $y_0 \in \mathbf{R}^3$, tels que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(y_0) = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. Prouver que f présente un maximum en y_0.

4. On considère dans cette question une fonction concave f de $\mathcal{F}$ et c un nombre réel.

a. Montrer que si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) \leq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) = 0$$

alors $(0,1,c)$ maximise f sur l'ensemble $\mathbf{\Lambda} = [0, +\infty[\times]-\infty, 1] \times \mathbf{R}$, c'est-à-dire que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{\Lambda}$, $f(x_1, x_2, x_3) \leq f(0,1,c)$. (Pour chaque $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{\Lambda}$, on pourra considérer la fonction de la variable réelle $t, t \mapsto f(\, tx_1, 1 + t(x_2 - 1), c + t(x_3 - c)\,)$).

b. On suppose au contraire que l'une des trois conditions du **a** n'est pas vérifiée. Etablir que $(0,1,c)$ ne maximise pas f sur $\mathbf{\Lambda}$.

5. Etude d'un autre modèle financier simplifié.

On considère un investisseur $\mathcal{S}$, travaillant dans un univers boursier comme dans la partie **II**. Il se donne une fonction d'utilité concave $u \in \mathcal{E}$ et un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. On considère maintenant un réel positif R_0 et trois variables aléatoires définies sur Ω, à valeurs réelles, R_1, R_2, R_3.

Pour chaque $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ on définit une nouvelle variable aléatoire sur Ω en posant

$$W(y) = R_0 + \sum_{k=1}^{3} (R_k - R_0) y_k$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de quatre natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision $y = (y_1, y_2, y_3)$ de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1 - y_1 - y_2 - y_3$ des titres à revenu fixe R_0 et pour y_k (k variant de 1 à 3) des titres à revenu aléatoire R_k. La variable aléatoire $W(y)$ représente donc le revenu associé à la décision y. Les sommes y_1, y_2, y_3 et $1 - y_1 - y_2 - y_3$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives.

a. Exprimer $f(y) = E(\, u(W(y))\,)$ en fonction des valeurs de R_1, R_2 et de R_3 sur Ω. Etablir que f est concave. Est-ce que $f \in \mathcal{F}$?

b. On suppose que $\mathcal{S}$ adopte les contraintes: $y_1 \geq 0$, $y_2 \leq 1$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel c, pour que $(0,1,c)$ maximise f sur l'ensemble $\mathbf{\Lambda}$ défini à la question **4.a**.

FIN