CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

lundi 5 mai 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

On désigne par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est concave si, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Dans la partie **I** on établit quelques propriétés très classiques des fonctions concaves utilisées dans la suite du problème. Les parties **II** et **III** sont consacrées à un modèle traitant de problèmes financiers.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et f une fonction de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$. On dit que f présente un maximum en un point x_0 de $\mathbf{R}^n$ si, pour tout x de $\mathbf{R}^n$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.

I

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction concave. En s'appuyant sur un dessin, donner une interprétation graphique de la concavité de f. Que peut-on dire de la fonction $-f : x \to -f(x)$?

2. On considère dans cette question une fonction $f \in \mathcal{E}$. Le but de cette question est de prouver que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) \leq 0$.

a. On suppose que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) \leq 0$. Etablir que f est concave.

b. Réciproquement, on suppose que f est concave. Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer la valeur de la limite suivante:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

En déduire que $f''(x) \leq 0$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction concave et x_0 un réel tel que $f'(x_0) = 0$. Montrer que f présente un maximum en x_0.

4. Soit $g \in \mathcal{E}$. On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout réel x, on a: $g''(x) \leq -\alpha$. Prouver que g présente un maximum sur $\mathbf{R}$. Est-il unique en général ?

5. Exemple.

a. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{E}$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = -x^2 \mathrm{e}^{-x}$. (On pourra intégrer par parties).

b. Parmi les fonctions du **a**, déterminer toutes celles présentant un maximum sur $\mathbf{R}$.

6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction concave, et p un entier naturel supérieur ou égal à 1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i = 1$, et $x_1, \ldots, x_p$ des nombres réels. Etablir que:

$$f(\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i f(x_i)$$

II

Etude d'un modèle financier simplifié.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble fini des résultats possibles susceptibles de se produire à la Bourse. On considère un investisseur $\mathcal{S}$ se donnant, d'une part un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω, et d'autre part une fonction **concave** $u \in \mathcal{E}$, dite "fonction d'utilité". On suppose qu'entre deux variables (ou revenus) aléatoires définies sur Ω et à valeurs réelles, W_1 et $W_2 : \Omega \to \mathbf{R}$, $\mathcal{S}$ préfère W_1 à W_2 si $E(u(W_1)) \geq E(u(W_2))$, où $E(u(W_1))$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $u(W_1)$.

1. Soit $W : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Etablir une inégalité entre $E(u(W))$ et $u(E(W))$. En déduire le choix de l'investisseur $\mathcal{S}$ entre W et la variable aléatoire égale à la constante $E(W)$.

On considère maintenant un réel positif R_0 et une variable aléatoire $R_1 : \Omega \to \mathbf{R}$. A chaque réel x on associe la variable aléatoire $W(x) : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par

$$W(x) = (1-x)R_0 + xR_1$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de deux natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision x de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1-x$ des titres à revenu fixe R_0 et pour x des titres à revenu aléatoire R_1 (x étant quelconque, les sommes x ou $1-x$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives). La variable aléatoire $W(x)$ représente donc le revenu associé à la décision x.

L'investisseur suppose, *dans cette partie* **II** *seulement*, que la variable aléatoire R_1 ne prend que deux valeurs: R_0+a avec probabilité $\frac{1}{2}$ et R_0-b avec probabilité $\frac{1}{2}$, où a et b sont deux réels strictement positifs fixés.

2. Donner, pour chaque réel x, une expression simple de $f(x)=E\big(u(W(x))\big)$. La fonction f ainsi définie est-elle concave?

3. On suppose que la fonction dérivée u' possède en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une limite finie strictement positive notée k_1 (resp. k_2). Vérifier que $k_1 \leq k_2$.

a. On suppose que:

$$\frac{k_1}{k_2} < \frac{a}{b} < \frac{k_2}{k_1}$$

Montrer que f présente un maximum sur $\mathbf{R}$.

b. On suppose que f présente un maximum sur $\mathbf{R}$. Montrer que:

$$\frac{k_1}{k_2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{k_2}{k_1}$$

III

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel défini par: $<x,y>=\sum_{i=1}^{i=3} x_i y_i$ pour tous vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ de $\mathbf{R}^3$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}$. Enfin, on dit qu'une fonction $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est concave si, pour tout x,y de $\mathbf{R}^3$ et tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

1. Prouver qu'une fonction $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est concave si et seulement si, pour tous vecteurs x et h de $\mathbf{R}^3$, la fonction $\phi_{x,h}:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, définie par $\phi_{x,h}(t)=f(x+th)$, est concave.

2. On reprend les notations de la question précédente et on suppose que $f \in \mathcal{F}$. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_3}$. De même, les dérivées partielles du second ordre de f sont notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, où $i,j \in \{1,2,3\}$.

a. Soit $(x,h) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Exprimer pour chaque réel t, les dérivées première et seconde $\phi'_{x,h}(t)$ et $\phi''_{x,h}(t)$, de l'application $\phi_{x,h}$, en fonction des dérivées partielles de f.

b. Soit x un vecteur de $\mathbf{R}^3$, on note A_x la matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels:

$$A_x=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq 3}$$

Par abus d'écriture A_x désignera également l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A_x dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrer que si les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles alors, pour tout h de $\mathbf{R}^3$, $< A_x(h), h > \leq 0$. La réciproque est-elle vraie ou fausse?

c. Montrer que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles.

d. Déterminer les réels λ tels que la fonction f de $\mathcal{F}$ définie par la relation:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2\lambda x_1 x_3 - x_2^2 + 2\lambda x_2 x_3 - x_3^2$$

soit concave.

3. Soit f une fonction concave de $\mathcal{F}$ et $y_0 \in \mathbf{R}^3$, tels que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(y_0) = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. Prouver que f présente un maximum en y_0.

4. On considère dans cette question une fonction concave f de $\mathcal{F}$ et c un nombre réel.

a. Montrer que si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 1, c) \leq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 1, c) \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 1, c) = 0$$

alors $(0, 1, c)$ maximise f sur l'ensemble $\mathbf{\Lambda} = [0, +\infty[\times] - \infty, 1] \times \mathbf{R}$, c'est-à-dire que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{\Lambda}$, $f(x_1, x_2, x_3) \leq f(0, 1, c)$. (Pour chaque $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{\Lambda}$, on pourra considérer la fonction de la variable réelle $t, t \mapsto f(\,tx_1, 1 + t(x_2 - 1), c + t(x_3 - c)\,)$).

b. On suppose au contraire que l'une des trois conditions du **a** n'est pas vérifiée. Etablir que $(0, 1, c)$ ne maximise pas f sur $\mathbf{\Lambda}$.

5. Etude d'un autre modèle financier simplifié.

On considère un investisseur $\mathcal{S}$, travaillant dans un univers boursier comme dans la partie **II**. Il se donne une fonction d'utilité concave $u \in \mathcal{E}$ et un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. On considère maintenant un réel positif R_0 et trois variables aléatoires définies sur Ω, à valeurs réelles, R_1, R_2, R_3.

Pour chaque $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ on définit une nouvelle variable aléatoire sur Ω en posant

$$W(y) = R_0 + \sum_{k=1}^{3} (R_k - R_0) y_k$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de quatre natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision $y = (y_1, y_2, y_3)$ de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1 - y_1 - y_2 - y_3$ des titres à revenu fixe R_0 et pour y_k (k variant de 1 à 3) des titres à revenu aléatoire R_k. La variable aléatoire $W(y)$ représente donc le revenu associé à la décision y. Les sommes y_1, y_2, y_3 et $1 - y_1 - y_2 - y_3$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives.

a. Exprimer $f(y) = E(\,u(W(y))\,)$ en fonction des valeurs de R_1, R_2 et de R_3 sur Ω. Etablir que f est concave. Est-ce que $f \in \mathcal{F}$?

b. On suppose que $\mathcal{S}$ adopte les contraintes: $y_1 \geq 0$, $y_2 \leq 1$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel c, pour que $(0, 1, c)$ maximise f sur l'ensemble $\mathbf{\Lambda}$ défini à la question **4.a**.

FIN

PARTIE I

Le tout est presque du cours... Notons que f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ suffit largement pour toute cette partie.

(Q1) Remarquons d'abord que si x, y, z sont trois réels :

z appartient au segment déterminé par x et y si et seulement si : $\exists \lambda \in [0,1],\ z = \lambda x + (1-\lambda) y$ (ou $\exists \lambda' \in [0,1],\ z = (1-\lambda')x + \lambda' y$).

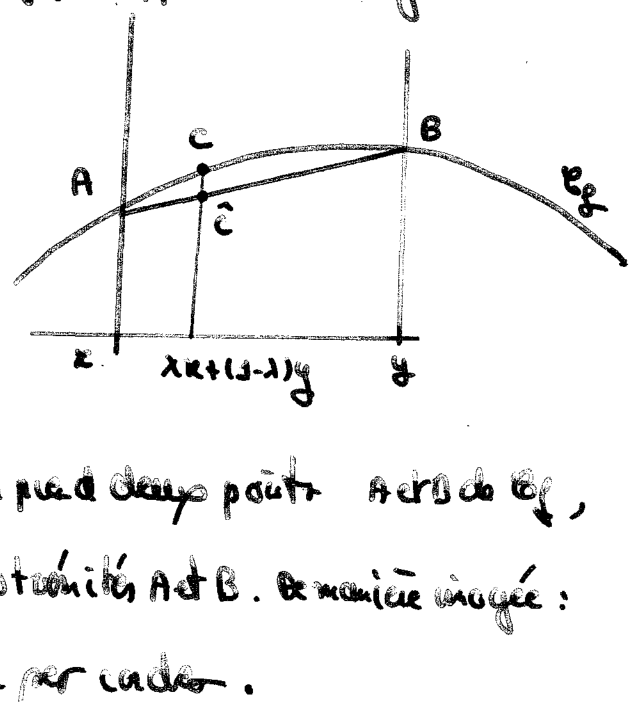
Considérons un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans $\mathcal{P}$ rapporté à R.

Remarquons que si A, B, C sont trois points de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x, x'), (y, y'), (z, z')$ dans R, C appartient au segment d'extrémités A et B si et seulement si :

$\exists \lambda \in [0,1],\ \vec{BC} = \lambda \vec{BA}$ ou si et seulement si $\exists \lambda \in [0,1],\ \vec{OC} = \lambda \vec{OA} + (1-\lambda)\vec{OB}$, ou encore ssi $\exists \lambda \in [0,1],\ \begin{cases} c = \lambda a + (1-\lambda) b \\ \text{et} \\ c' = \lambda a' + (1-\lambda) b' \end{cases}$

Prenons deux points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses x et y (donc d'ordonnées $f(x)$ et $f(y)$).
Soit $\lambda \in [0,1]$. $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ appartient au segment de $\mathbb{R}$ d'extrémités x et y.
Le point C de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda) y,\ f(\lambda x + (1-\lambda) y))$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et le point $\hat{C}$ de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda) y,\ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$ appartient au segment d'extrémités A et B (C et $\hat{C}$ ont même abscisse).

Dire que : $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ signifie que C est "au-dessus" de $\hat{C}$.
Dire que : $\forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ signifie qu'entre A et B, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus du segment d'extrémités A et B.



Donc dire que f est concave signifie que si l'on prend deux points A et B de $\mathcal{C}_f$, entre A et B, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus du segment d'extrémités A et B. De manière imagée :
f est donc concave ssi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses cordes.

Si l'on pose $g = -f$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
$\Updownarrow$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$.

f est concave ssi $g = -f$ est convexe !

Q2 <u>Remarque</u>.. Si l'on utilise notre cours sur la convexité il n'y a rien à faire

f concave $\Leftrightarrow -f$ convexe $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ (-f)''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)\leq 0$ ...

<u>a)</u> Supposons f'' négative sur $\mathbb{R}$. En particulier f' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in[0,1]$. Montrons que $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

Si $x=y$: $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$! Supposons $x\neq y$.

Si $\lambda=0$: $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(y)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ et si $\lambda=1$: $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

Supposons donc $x\neq y$ & $\lambda\in]0,1[$.

<u>1er cas</u>.. $x<y$. Alors $x<\lambda x+(1-\lambda)y<y$.

Le théorème des accroissements finis montre que:

$$\exists\alpha\in]x,\lambda x+(1-\lambda)y[,\quad \frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{(\lambda x+(1-\lambda)y)-x}=f'(\alpha)\ ;\quad \lambda x+(1-\lambda)y-x=(1-\lambda)(y-x)$$

$$\exists\beta\in]\lambda x+(1-\lambda)y,y[,\quad \frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{\lambda x+(1-\lambda)y-y}=f'(\beta)\ ;\quad \lambda x+(1-\lambda)y-y=\lambda(x-y)=-\lambda(y-x)$$

$$\alpha<\beta \text{ donc } f'(\alpha)\geq f'(\beta)\ ;\quad \frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)}\geq\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{-\lambda(y-x)}=\frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)}$$

Multiplions par $(y-x)\lambda(1-\lambda)$.

Alors : $\lambda f(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda f(x)\geq(1-\lambda)f(y)-(1-\lambda)f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ car $\lambda>0$, $1-\lambda>0$, $y-x>0$.

Soit : $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

<u>2ème cas</u>.. $x>y$. $\lambda x+(1-\lambda)y=\lambda' y+(1-\lambda')x$ si l'on pose $\lambda'=1-\lambda$.

Mais alors $y<x$ et $\lambda'\in]0,1[$. En appliquant ce qui précède on obtient :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(\lambda' y+(1-\lambda')x)\geq\lambda' f(y)+(1-\lambda')f(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Finalement si f'' est négative sur $\mathbb{R}$: f est concave sur $\mathbb{R}$.

<u>Remarque</u>.. En fait nous avons prouvé que <u>si f' est décroissante sur $\mathbb{R}$</u>, <u>f est concave sur $\mathbb{R}$</u>.

<u>b)</u> Taylor Young donne : $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$ car f est bien deux fois dérivable en x.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $h\in\mathbb{R}^*$ et $f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$

Donc $$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\frac{h^2f''(x)+o(h^2)}{h^2}=f''(x)+o(1)=f''(x)+\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$$

Donc $$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x) = f\left(\tfrac{1}{2}(x+h) + \tfrac{1}{2}(x-h)\right) \geq \tfrac{1}{2} f(x+h) + \tfrac{1}{2} f(x-h)$$

Donc $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \leq 0$; $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \leq 0$

Il vient en passant à la limite $f''(x) \leq 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \leq 0$.

Retrouvons ce résultat en montrant la décroissance de f' sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x<y$. Montrons que $f'(x) \geq f'(y)$.

$\forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ et $\forall \lambda \in]0,1[,\ \lambda x + (1-\lambda)y - x = (1-\lambda)(y-x) > 0$

Donc : $\forall \lambda \in]0,1[,\ \dfrac{f(\lambda x+(1-\lambda)y) - f(x)}{(\lambda x+(1-\lambda)y)-x} \geq \dfrac{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$\lim\limits_{\lambda \to 1^-} (\lambda x+(1-\lambda)y) = x$. Donc $f'(x) = \lim\limits_{\lambda \to 1^-} \dfrac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{(\lambda x+(1-\lambda)y)-x} \geq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$; $\underline{f'(x) \geq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}}$

$\forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) - f(y) \geq \lambda(f(x)-f(y))$ donc :

$\forall \lambda \in]0,1[,\ \dfrac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{\lambda(y-x)} \geq \dfrac{f(x)-f(y)}{y-x} = -\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

$\forall \lambda \in]0,1[,\ \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \dfrac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{-\lambda(y-x)} = \dfrac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(y)}{(\lambda x+(1-\lambda)y)-y}$

En faisant tendre λ vers 0^+ il vient : $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(y)$.

Donc $f'(x) \geq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(y)$. En particulier $f'(x) \geq f'(y)$.

Ce qui achève de prouver la décroissance de f'. On retrouve ainsi $f'' \leq 0$!

<u>Remarque</u>. – Nous avons ainsi prouvé que f est concave sur $\mathbb{R}$ ssi f' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Nous pourrions encore montrer que f est concave sur $\mathbb{R}$ ssi $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes.

Q3 f est concave sur $\mathbb{R}$ donc f'' est négative sur $\mathbb{R}$ et f' est alors décroissante sur $\mathbb{R}$.

$f'(x_0)=0$ donc $\forall x\in]-\infty, x_0]$, $f'(x)\geq f'(x_0)=0$; f est croissante sur $]-\infty, x_0]$.

$\forall x\in [x_0,+\infty[$, $f'(x)\leq f'(x_0)=0$; f est décroissante sur $[x_0,+\infty[$.

En particulier $\forall x\in]-\infty,x_0]$, $f(x)\leq f(x_0)$ et $\forall x\in [x_0,+\infty[$, $f(x_0)\geq f(x)$.

f présente un maximum en x_0.

<u>Si $f'(x_0)=0$: f présente un maximum en x_0 ... lorsque f est concave !</u>

<u>Remarque</u>. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } f \text{ est concave : } f'(x_0)=0 \iff f \text{ présente un maximum absolu en } x_0\\ \text{Si } f \text{ est convexe : } f'(x_0)=0 \iff f \text{ présente un minimum absolu en } x_0\end{array}}$

Q4 $g\in E$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $g''(x)\leq -\alpha$ avec $\alpha>0$.

L'inégalité des accroissements finis donne alors : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\leq y \Rightarrow g'(y)-g'(x)\leq -\alpha(y-x)$.

Fixons y dans $\mathbb{R}$. $\forall x\in]-\infty, y]$, $g'(y)+\alpha(y-x)\leq g'(x)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(g'(y)+\alpha(y-x))=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)=+\infty$; en particulier <u>$\exists a\in\mathbb{R}_-^*$, $g'(a)>0$</u>

Fixons x dans $\mathbb{R}$. $\forall y\in [x,+\infty[$, $g'(y)\leq -\alpha(y-x)+g'(x)$.

$\lim\limits_{y\to+\infty}(-\alpha(y-x)+g'(x))=-\infty$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty} g'(y)=-\infty$; $\exists b\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(b)<0$

g' est continue sur $[a,b]$ et $g'(a)g'(b)<0$ donc $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $g'(x_0)=0$!

Par conséquent d'après ce qui précède g présente un maximum en x_0.

<u>Si $\forall x\in\mathbb{R}$, $g''(x)\leq -\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, alors g présente un maximum.</u>

Notons qu'un maximum est toujours unique ! Mais un maximum peut être atteint plusieurs fois !

Reprenons les hypothèses précédentes et supposons que :

$\exists (x_0,x'_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x_0\neq x'_0$ et $g(x_0)=g(x'_0)=\max\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t)$

Alors $g'(x_0)=g'(x'_0)$. En appliquant Rolle à l'intervalle d'extrémités x_0 et x'_0 on obtient l'existence d'un réel c tel que $g''(c)=0$!!

Mais rappelons g'' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ donc g' est strictement décroissante et ne peut s'annuler deux fois ! <u>Le maximum de g est atteint une seule fois.</u>

Q5 a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x)-f'(0)=\int_0^x f''(t)\,dt=\int_0^x -t^2e^{-t}\,dt=\int_{0}^{x} \underset{u}{t^2}\underset{v'}{(-e^{-t})}\,dt=\left[t^2e^{-t}\right]_0^x-\int_0^x 2te^{-t}\,dt=x^2e^{-x}+2\int_{0}^{x} \underset{u}{t}\,\underset{v'}{(-e^{-t})}\,dt$$

$$f'(x)=f'(0)+x^2e^{-x}+2\left[te^{-t}\right]_0^x-2\int_0^x e^{-t}\,dt=f'(0)+x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2\left[e^{-t}\right]_0^x$$

$$f'(x)=f'(0)+x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}-2$$

Posons $a=f'(0)-2$. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}+a$

Comme $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=-x^2e^{-x}$, ceci permet de dire que <u>$x\mapsto x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}$ est une primitive de $x\mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$</u>.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x te^{-t}\,dt=\left[t(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})\,dt=-xe^{-x}-\left[e^{-t}\right]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$

En particulier <u>$x\mapsto -xe^{-x}-e^{-x}$ est une primitive de $x\mapsto xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.</u>

Nous pouvons alors en mesure de dire qu'une primitive de $x\mapsto x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}+a$ sur $\mathbb{R}$ est : $x\mapsto -(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x})+2(-xe^{-x}-e^{-x})+2(-e^{-x})+ax$

Par conséquent : $\exists b\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}-2e^{-x}+ax+b$.

Par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x^2e^{-x}-4xe^{-x}-6e^{-x}+ax+b$.

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x^2e^{-x}-4xe^{-x}-6e^{-x}+ax+b=-(x^2+4x+6)e^{-x}+ax+b.$$

---

b) Soit $f\in E$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=-x^2e^{-x}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)\leq 0$. f est donc concave sur $\mathbb{R}$. f présente un maximum si et seulement si sa dérivée s'annule.

Notons que f' est décroissante et même strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)\leq 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f''(x)<0$.

$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x^2e^{-x}-4xe^{-x}-6e^{-x}+ax+b$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}+a$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=a$ car $\forall p\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x^pe^{-x})=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left[x^2+2x+2\right]+a\right]=+\infty$.

f' est continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=a$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$.

f' réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]a,+\infty[$.

Donc f' s'annule sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a<0$.

Par conséquent si $f\in C$ et si $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=-x^2e^{-x}$, f présente un maximum sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists a\in\mathbb{R}^*_-, \exists b\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=-x^2e^{-x}-4xe^{-x}-6e^{-x}+ax+b$

(Q6) Soit f une fonction concave sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur p que :

$\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)\in(\mathbb{R}_+)^p, \forall(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p, \sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$

→ C'est clair pour $p=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $p\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $p+1$.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{p+1})\in\mathbb{R}_+^{p+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i=1$ et soit $(x_1,x_2,\dots,x_{p+1})\in\mathbb{R}^{p+1}$

Montrons que : $f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i f(x_i)$.

Si $\lambda_{p+1}=1$ alors $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_p=0$ et l'inégalité est vraie car : $f(x_{p+1})\geq f(x_{p+1})$!

Supposons alors $\lambda_{p+1}\neq1$. Notons alors que : $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1-\lambda_{p+1}$ permet de dire alors que : $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1-\lambda_{p+1}>0$.

Posons $\lambda=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$. $\lambda>0$ et $\lambda=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\leq\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i=1$. $\lambda\in]0,1]$ et $\lambda_{p+1}=1-\lambda$

Par conséquent $f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\right)=f\left(\lambda\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda}x_i+(1-\lambda)x_{p+1}\right)\underset{\uparrow\ f\text{ est concave.}}{\geq}\lambda f\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda}x_i\right)+(1-\lambda)x_{p+1}$

$\forall i\in[\![1,p]\!], \frac{\lambda_i}{\lambda}\in\mathbb{R}_+$ et $\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda}=1$

L'hypothèse de récurrence donne alors $f\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda}x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda}f(x_i)$

Donc $f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\right)\geq\lambda f\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda}x_i\right)+(1-\lambda)x_{p+1}\geq\lambda\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda}f(x_i)+(1-\lambda)x_{p+1}\underset{\substack{\uparrow\\ \lambda_{p+1}=1-\lambda}}{=}\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i f(x_i)$

ceci achève la récurrence.

$\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}_+^p, \forall(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p, \sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$.

Remarque : La démonstration précédente est basée sur l'associativité du barycentre. Voir le cours de T.S.

PARTIE II Etude d'un modèle financier simplifié

Q1 Le théorème de transfert permet de dire que :

$$E(u(W)) = \sum_{z \in W(\Omega)} u(z)\, p(W=z).$$ Notons que $W(\Omega)$ est un ensemble fini car

Ω est fini. Donc $W(\Omega) = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ (avec $z_1 < z_2 < \dots < z_p$).

Donc $E(u(W)) = \sum_{i=1}^{p} p(W=z_i)\, u(z_i)$. Or u est concave, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $p(W=z_i) \geq 0$

et $\sum_{i=1}^{p} p(W=z_i) = 1$; par conséquent I Q6 donne :

$$E(u(W)) = \sum_{i=1}^{p} p(W=z_i)\, u(z_i) \leq u\left(\sum_{i=1}^{p} p(W=z_i)\, z_i\right) = u(E(W)).$$

Donc $\underline{\underline{E(u(W)) \leq u(E(W)) = E(u(E(W)))}}$.

Par conséquent $\underline{\underline{\text{I préfère } E(W) \text{ à } u(W)}}$.

Q2 Soit $x \in \mathbb{R}$. $W(x)$ prend deux valeurs : $(1-x)R_0 + x(R_0+a) = R_0 + xa$ et

$(1-x)R_0 + x(R_0-b) = R_0 - xb$ chacune avec la probabilité $1/2$.

Donc $f(x) = E(u(W(x))) = u(R_0+xa) \times \frac{1}{2} + u(R_0 - xb) \times \frac{1}{2}$.

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\left(u(R_0+xa) + u_0(R_0-xb)\right)}}.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in [0,1]$.

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \frac{1}{2}\left[u(R_0 + (\lambda x + (1-\lambda)y)a) + u(R_0 - (\lambda x + (1-\lambda)y)b)\right]$

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \frac{1}{2}\left[u\left(\lambda(R_0+ax) + (1-\lambda)(R_0+ay)\right) + u\left(\lambda(R_0-bx) + (1-\lambda)(R_0-by)\right)\right]$

u étant concave sur $\mathbb{R}$:

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \frac{1}{2}\left[\lambda u(R_0+ax) + (1-\lambda)u(R_0+ay) + \lambda u(R_0-bx) + (1-\lambda)u(R_0-by)\right]$

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda\, \frac{1}{2}\left(u(R_0+xa) + u(R_0-xb)\right) + (1-\lambda)\, \frac{1}{2}\left(u(R_0+ay) + u(R_0-by)\right)$

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. $\underline{f \text{ est donc concave sur } \mathbb{R}}$.

__Remarque__.. Il était aussi aisé de montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{1}{2} a^2 u''(R_0+xa) + \frac{1}{2}(-b)^2 u''(R_0-xb) \leq 0$ ... mais pourquoi

utiliser une régularité ici inutile. De plus la démonstration précédente conserve " concave o affine = concave ";

Q3) u' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $u'(x_0) \geq u'(x)$; en faisant tendre x vers $+\infty$ il vient : $u'(x_0) \geq k_1$

$\forall x \in]-\infty, x_0]$, $u'(x) \geq u'(x_0)$; en faisant tendre x vers $-\infty$ il vient : $k_2 \geq u'(x_0)$

Donc $k_1 \leq u'(x_0) \leq k_2$. En particulier $k_1 \leq k_2$.

a) u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(u(x_0 + xa) + u(x_0 - xb))$.

$x \mapsto x_0 + xa$ et $x \mapsto x_0 - xa$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(a u'(x_0 + xa) - b u'(x_0 - xb))$.

u' étant dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{1}{2}(a^2 u''(x_0 + xa) + b^2 u''(x_0 - xb))$

u'', $x \mapsto x_0 + xa$ et $x \mapsto x_0 - xb$ étant continues sur $\mathbb{R}$, f'' est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent f est concave sur $\mathbb{R}$ et $f \in E$. Nous pouvons appliquer IQ2 et dire que si f' s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$ alors f présente un maximum en x_0.

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(a u'(x_0 + xa) - b u'(x_0 - xb)) \underset{a>0,\, b>0}{=} (a k_1 - b k_2)/2 < 0 \quad \left(\frac{a}{b} < \frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(a u'(x_0 + xa) - b u'(x_0 - xb)) \overset{\uparrow}{=} (a k_2 - b k_1)/2 > 0 \quad \left(\frac{a}{b} > \frac{k_1}{k_2}\right)$$

Donc $\exists x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x_2) < 0$ et $\exists x_1 \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x_1) > 0$

f' est continue sur $[x_1, x_2]$ et $f'(x_1) f'(x_2) < 0$. $\exists x_0 \in]x_1, x_2[$, $f'(x_0) = 0$.

D'après IQ2, f présente un maximum en x_0. <u>f présente un maximum sur $\mathbb{R}$.</u>

b) On suppose que f présente un maximum en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f'(x_0) = 0$.

f est concave sur $\mathbb{R}$ donc f' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $\frac{1}{2}(a u'(x_0 + xa) - b u'(x_0 - xb)) = f'(x) \leq 0$

En faisant tendre x vers $+\infty$ il vient : $\frac{1}{2}(a k_1 - b k_2) \leq 0$; $\frac{a}{b} \leq \frac{k_2}{k_1}$

$\forall x \in]-\infty, x_0]$, $\frac{1}{2}(a u'(x_0 + xa) - b u'(x_0 - xb)) = f'(x) \geq 0$

En faisant tendre x vers $-\infty$ il vient : $\frac{1}{2}(a k_2 - b k_1) \geq 0$; $\frac{a}{b} \geq \frac{k_1}{k_2}$

Finalement $\frac{k_1}{k_2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{k_2}{k_1}$.

PARTIE III

Passons aux choses sérieuses.

(Q1) * Supposons f concave sur $\mathbb{R}^3$. Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

soit $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in [0,1]$.

$\varphi_{x,h}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)h) = f(\lambda(x+t_1 h) + (1-\lambda)(x+t_2 h))$

$\varphi_{x,h}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ concave sur } \mathbb{R}^3}}{\geq} \lambda f(x+t_1 h) + (1-\lambda) f(x+t_2 h) = \lambda \varphi_{x,h}(t_1) + (1-\lambda)\varphi_{x,h}(t_2)$

Donc <u>pour tout élément (x,h) de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\varphi_{x,h}$ est concave sur $\mathbb{R}$.</u>

* Réciproquement supposons que pour tout élément (x,h) de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\varphi_{x,h}$ est concave sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in [0,1]$.

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(y + \lambda(x-y)) = \varphi_{y,x-y}(\lambda) = \varphi_{y,x-y}(\lambda \times 1 + (1-\lambda)\times 0) \underset{\substack{\varphi_{y,x-y} \text{ est concave sur } \mathbb{R} \\ \downarrow}}{\geq} \lambda \varphi_{y,x-y}(1) + (1-\lambda)\varphi_{y,x-y}(0)$

Donc $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(y + 1(x-y)) + (1-\lambda) f(y + 0(x-y)) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. <u>$f$ est concave sur $\mathbb{R}^3$.</u>

(Q2) a) Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $h = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{x,h}(t) = f(x_1 + t h_1, x_2 + t h_2, x_3 + t h_3)$

$t \mapsto x_1 + t h_1$, $t \mapsto x_2 + t h_2$, $t \mapsto x_3 + t h_3$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et f est

C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Par conséquent :

1°.. $\varphi_{x,h}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$

2°.. <u>$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'_{x,h}(t) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x+th) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x+th) + h_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x+th)$.</u>

Remarque.. <u>$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'_{x,h}(t) = \langle \operatorname{grad} f(x+th), h \rangle$.</u>

Posons $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $d_i(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)$. Un raisonnement analogue au précédent

(on remplace f par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) montre que, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$:

1°.. d_i est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

2°.. $\forall t \in \mathbb{R}$, $d'_i(t) = h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(x+th) + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i}(x+th) + h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_i}(x+th)$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'_{x,h}(t) = h_1 d_1(t) + h_2 d_2(t) + h_3 d_3(t)$.

$\varphi'_{x,h}$ apparaît alors comme une combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $\varphi'_{x,h}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

1°.. $\varphi_{x,h}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

2°.. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi''_{x,h}(t) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x+th) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+th)$

<u>Remarque</u> .. En posant $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi''_{x,h}(t) = {}^tH\, A_{x+th}\, H = \langle A_{x+th} H, H \rangle$$

En identifiant tout !!

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi''_{x,h}(t) = \langle A_{x+th}(h), h \rangle$ ... voir plus bas.

<u>b)</u> $x \in \mathbb{R}^3$. A_x est une matrice ou un endomorphisme symétrique et le corps de base est $\mathbb{R}$. On peut donc trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A_x. Soit (r, ρ, v) une telle base.

$\exists (\alpha, \beta, \sigma) \in \mathbb{R}^3$, $A_x(r) = \alpha r$, $A_x(\rho) = \beta \rho$ et $A_x(v) = \sigma v$.

$\mathrm{Spec}\, A_x = \{\alpha, \beta, \sigma\}$.

* Supposons $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$, $\sigma \leq 0$.

Soit $h \in \mathbb{R}^3$. $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $h = \lambda_1 r + \lambda_2 \rho + \lambda_3 \omega$. $A_x(h) = \lambda_1 \alpha r + \lambda_2 \beta \rho + \lambda_3 \sigma v$

$\langle A_x(h), h \rangle = \lambda_1(\lambda_1 \alpha) + \lambda_2(\lambda_2 \beta) + \lambda_3(\lambda_3 \sigma)$ car (r, ρ, ω) est orthonormale

Donc $\langle A_x(h), h \rangle = \lambda_1^2 \alpha + \lambda_2^2 \beta + \lambda_3^2 \sigma \leq 0$ car $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$ et $\sigma \leq 0$.

Ainsi : $\underline{\forall h \in \mathbb{R}^3, \langle A_x(h), h \rangle \leq 0}$.

* Réciproquement supposons que : $\forall h \in \mathbb{R}^3$, $\langle A_x(h), h\rangle \leq 0$.

En particulier $0 \geq \langle A_x(r), r\rangle = \langle \alpha r, r\rangle = \alpha \|r\|^2$ donc $\alpha \leq 0$ car $\|r\|^2 > 0$.

De même : $\beta \leq 0$ et $\sigma \leq 0$.

Finalement les valeurs propres de A_x sont négatives si et seulement si :

$\forall h \in \mathbb{R}^3$, $\langle A_x(h), h\rangle \leq 0$.

Remarque.. Ce n'est pas nouveau et très classique (matrices symétriques positives, définies positives, ,...)

c) f concave

$\overset{\text{III}\varphi 1}{\longrightarrow}$ $\Updownarrow$

$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\varphi_{x,h}$ est concave

$\overset{\text{I}\varphi 2}{\longrightarrow}$ $\Updownarrow$

$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\Phi''_{x,h}$ est négative sur $\mathbb{R}$

IIIφ2 $\Updownarrow$

$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\langle A_{x+th}(h), h\rangle \leq 0$ $(*)$

Dès lors prouvons que $(*) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3, \operatorname{Spec}(A_x) \subset \mathbb{R}_-$.

($\Rightarrow$) Supposons $(*)$. Avec $t=0$ on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\forall h \in \mathbb{R}^3$, $\langle A_x(h), h\rangle \leq 0$

Ce qui précède montre alors que les valeurs propres de A_x sont négatives pour tout $x \in \mathbb{R}_3$.

($\Leftarrow$) Supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Spec} A_x \subset \mathbb{R}_-$

Alors $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $A_{x+th} \subset \mathbb{R}_-$

Donc $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}^3$, $\langle A_{x+th}(z), z\rangle \leq 0$; en particulier

$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\langle A_{x+th}(h), h\rangle \leq 0$

Finalement f est concave si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, les valeurs propres de A_x sont négatives

Remarques.. 1. Encore un très grand classique.

2.. f est convexe si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, les valeurs propres de A_x sont positives i.e A_x est une matrice (symétrique) positive.

d) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ car f est polynomiale. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = -2x_1 + 2\lambda x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = -2x_2 + 2\lambda x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 - 2x_3$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = -2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x) = 2\lambda$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = -2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x) = 2\lambda$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x) = -2$

Donc $A_x = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2\lambda \\ 0 & -2 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & -2 \end{pmatrix}$

Si $\lambda=0$: $A_x = -2I_3$; les valeurs propres de A_x sont négatives. Supposons $\lambda\neq 0$.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. $A_x - \alpha I = \begin{pmatrix} -2-\alpha & 0 & 2\lambda \\ 0 & -2-\alpha & 2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & -2-\alpha \end{pmatrix}$; cherchons une échelonnée de Gauss de cette matrice

$L_1 \leftrightarrow L_3$ donc : $\begin{pmatrix} 2\lambda & 2\lambda & -2-\alpha \\ 0 & -2-\alpha & 2\lambda \\ -2-\alpha & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$; $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2+\alpha}{2\lambda} L_1$ donc $\begin{pmatrix} 2\lambda & 2\lambda & -2-\alpha \\ 0 & -2-\alpha & 2\lambda \\ 0 & 2+\alpha & 2\lambda - \frac{(2+\alpha)^2}{2\lambda} \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donc : $\begin{pmatrix} 2\lambda & 2\lambda & -2-\alpha \\ 0 & -2-\alpha & 2\lambda \\ 0 & 2+\alpha & 4\lambda - \frac{(2+\alpha)^2}{2\lambda} \end{pmatrix}$.

Par conséquent α est valeur propre de A_x si et seulement si $-2-\alpha=0$ ou $4\lambda - \frac{(2+\alpha)^2}{2\lambda} = 0$.

$-2-\alpha = 0$ ou $4\lambda - \frac{(2+\alpha)^2}{2\lambda} = 0 \Leftrightarrow \alpha=-2$ ou $(\alpha+2)^2 = (2\sqrt{2}\lambda)^2 \Leftrightarrow \alpha\in\{-2, -2+2\sqrt{2}\lambda, -2-2\sqrt{2}\lambda\}$

$\operatorname{Spec} A_x = \{-2, -2+2\sqrt{2}\lambda, -2-\sqrt{2}\lambda\}$. $-2+2\sqrt{2}\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $-2-2\sqrt{2}\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc les valeurs propres de A_x sont négatives si et seulement si $\lambda\in[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ... dans le cas où $\lambda \neq 0$. Dans le cas où $\lambda=0$ nous avons vu que les valeurs propres de A_x sont négatives

Finalement f est concave si et seulement si $\lambda\in[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Exercice .. retrouver ce résultat en décomposant en carré $\langle A_x(h), h\rangle$ ...

Q3 Montrons que $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $f(x)\leq f(y_0)$.

Soit $x\in\mathbb{R}^3$. Posons $h=y_0-x$. Notons que : $y_0=x+h=x+1\times h$!

$\varphi_{x,h}$ est concave sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2. Si $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $h=(h_1,h_2,h_3)$:

$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'_{x,h}(t)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x+th)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x+th)+h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(x+th)$

Donc $\varphi'_{x,h}(1)=0$. Par conséquent d'après I Q3, $\varphi_{x,h}$ possède un maximum en 1.

$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_{x,h}(t)\leq\varphi_{x,h}(1)$; donc $f(x)=\varphi_{x,h}(0)\leq\varphi_{x,h}(1)=f(y_0)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^3$, $f(x)\leq f(y_0)$; f présente un maximum en y_0

<u>Remarque</u> .. Dans le cas où f est concave si y_0 est un point critique de f, f présente un maximum en y_0. Pas mal non ? ..pour une fonction convexe c'est un minimum.

Q4 a) Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\Lambda$ et $h=(0,1,c)-(x_1,x_2,x_3)=(0,1,c)-x$

Montrons que $f(x)\leq f(h)$. Reprenons $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{x,h}(t)=f(x+th)$.

Il s'agit de prouver que : $\varphi_{x,h}(0)=f(x)$ est inférieur à $\varphi_{x,h}(1)=f(x+h)=f(0,1,c)$

f est concave sur $\mathbb{R}^3$ donc $\varphi_{x,h}$ est concave sur $\mathbb{R}$. Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}^3$, $\varphi_{x,h}$ est C^2 sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi'_{x,h}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que : $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'_{x,h}(t)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x+th)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x+th)+h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(x+th)$

avec $(h_1,h_2,h_3)=h$.

En particulier : $\varphi'_{x,h}(1)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c)+h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c)$.

Ainsi : $\varphi'_{x,h}(1)=-x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c)+(1-x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c)$ car $h_1=-x_1$, $h_2=1-x_2$ et

$\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c)=0$

Donc $\varphi'_{x,h}(1)\geq 0$ car $-x_1\leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c)\leq 0$, $1-x_2\geq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c)\geq 0$.

Comme $\varphi'_{x,h}$ est décroissante : $\forall t\in[0,1]$, $\varphi'_{x,h}(t)\geq\varphi'_{x,h}(1)\geq 0$.

$\varphi_{x,h}$ est donc croissante sur $[0,1]$. On peut donc écrire $\varphi_{x,h}(0)\leq\varphi_{x,h}(1)$.

c'est à dire <u>$f(x)\leq f(0,1,c)$ et ceci pour tout $x\in\Lambda$.</u>

b) Reprenons $c \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $h = (h_1, h_2, h_3) = (0, 1, c) - x$

$\varphi_{x,h}$ est toujours C^2 sur $\mathbb{R}$ et concave.

$\varphi'_{x,h}$ est encore décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_{x,h}(1) = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) + (1-x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) + (c-x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c)$

Imaginons un instant que $\varphi'_{x,h}(1) < 0$

Alors la continuité de $\varphi'_{x,h}$ en 1 permet de dire qu'il existe un réel strictement positif α tel que : $\forall t \in]1-\alpha, 1+\alpha[$, $\varphi'_{x,h}(t) < 0$

(Prendre la définition de la continuité de $\varphi'_{x,h}$ en 1 avec $\varepsilon = -\frac{1}{2}\varphi'_{x,h}(1)$)

Il est donc possible de trouver $t_0 \in [0,1[$ tel que : $\forall t \in [t_0, 1]$, $\varphi'_{x,h}(t) < 0$

$\varphi_{x,h}$ est alors strictement décroissante sur $[t_0, 1]$. En particulier $\varphi_{x,h}(t_0) > \varphi_{x,h}(1)$

Donc $f(x + t_0 h) > f(x+h) = f(0,1,c)$.

Notons que $x + t_0 h = (x_1, x_2, x_3) + t_0((0,1,c) - (x_1, x_2, x_3)) = ((1-t_0)x_1, t_0 + (1-t_0)x_2, t_0 c + (1-t_0)x_3)$

Or
- $(1-t_0)x_1 \geq 0$ car $t_0 \in [0,1[$ et $x_1 \geq 0$
- $t_0 + (1-t_0)x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ x_2 \leq 1 \text{ et } 1-t_0 \geq 0}}{\leq} t_0 + (1-t_0) = 1$

Donc $x + t_0 h \in \Omega$ et $f(x+t_0 h) > f(0,1,c)$; f ne possède donc pas de maximum en $(0,1,c)$

Résumons ! <u>Nous venons de montrer que si il existe $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ tel que : $-x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) + (1-x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) + (c-x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) < 0$ alors f ne possède pas de maximum en $(0,1,c)$.</u>

Pour achever la question il ne reste plus qu'à démontrer que si l'une des trois conditions du a n'est pas vérifiée alors on est en mesure de trouver un tel x.

La tâche est aisée. Envisageons trois cas.

1er cas.– $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) > 0$ il suffit alors de prendre $x = (x_1, 1, c)$ avec $x_1 > 0$;

on a alors $\varphi'_{x,h}(1) = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) < 0$.

2ème cas.. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) < 0$ il suffit de prendre $x = (0, x_2, c)$ avec $x_2 < 1$;

on a alors $\varphi'_{x,h}(1) = (1-x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) < 0$.

3^e cas.. $\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) \neq 0$ il suffit de prendre $x = (0, 1, x_3)$ avec $x_3 > c$ si $\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) > 0$

et $x_3 < c$ si $\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) < 0$; on a alors $\varphi'_{x,h}(1) = (c-x_3) \frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) < 0$.

Pour conclure f possède un maximum en $(0,1,c)$ sur $\Omega = [0,+\infty[\times]-\infty, 1] \times \mathbb{R}$ si

et seulement si : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) \geq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) = 0$.

Q5 Etude d'un autre modèle financier simplifié.

a) Notons que si T est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ avec $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

alors $E(T) = \sum_{i=1}^{n} T(\omega_i)\, p(\{\omega_i\})$.

Par conséquent si $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(y) = E(u(W(y))) = \sum_{i=1}^{n} u(W(y)(\omega_i))\, p(\{\omega_i\})$$

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} u\left(R_0 + \sum_{k=1}^{3} (R_k(\omega_i) - R_0)\, y_k\right) p(\{\omega_i\})$$

Notons que $f = \sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\}) f_i$ avec $f_i : (y_1, y_2, y_3) \mapsto u\left(R_0 + \sum_{k=1}^{3} (R_k(\omega_i) - R_0)\, y_k\right)$

si nous montrons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est concave sur $\mathbb{R}^3$ alors f

sera clairement concave sur $\mathbb{R}^3$ car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p(\{\omega_i\}) \geq 0$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrons que f_i est concave.

Soient $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$f_i(\lambda x+(1-\lambda)y) = u\left(R_0 + \sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)(\lambda x_k+(1-\lambda)y_k)\right)$$

$$f_i(\lambda x+(1-\lambda)y) = u\left(\lambda\left(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)x_k\right)+(1-\lambda)\left(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)y_k\right)\right)$$

u est sur $\mathbb{R}$ donc :

$$f_i(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda\, u\left(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)x_k\right)+(1-\lambda)\, u\left(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)y_k\right)$$

$$f_i(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f_i(x)+(1-\lambda)f_i(y)$$

Ceci achève de prouver la concavité de f_i donc celle de f.

Nous allons maintenant montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Il suffit pour cela de montrer que, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, f_i est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$

Pour $\forall y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, $\varphi_i(y)=R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k^{(\omega_i)}-R_0)y_k$

$f_i = u \circ \varphi_i$.

φ_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, car elle est polynômiale et u est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc

f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

De plus $\forall j \in [\![1,3]\!]$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) = (R_j(\omega_i)-R_0)\,u'\left(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)y_k\right)$ pour tout $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

Donc $\forall j \in [\![1,3]\!]$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) = (R_j(\omega_i)-R_0)(u'\circ\varphi_i)(y)$.

φ_i est toujours de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et u' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent pour tout $j \in [\![1,3]\!]$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

Ceci achève de montrer que f_i est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Par conséquent :

<u>f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.</u>

Remarque.. Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,3]\!]$.

$$\forall y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)=(R_j(\omega_i)-R_0)\,u'(\varphi_i(y))$$

Donc $$\forall y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(y)=\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_j(\omega_i)-R_0)\,u'\Big(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)y_k\Big)$$

$$\forall \ell\in[\![1,3]\!],\ \forall y\in\mathbb{R}^3,\quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\ell\,\partial x_j}(y)=(R_j(\omega_i)-R_0)(R_\ell(\omega_i)-R_0)\,u''(\varphi_i(y))$$

$$\forall \ell\in[\![1,3]\!],\ \forall y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell\,\partial x_j}(y)=\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_j(\omega_i)-R_0)(R_\ell(\omega_i)-R_0)\,u''\Big(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)y_k\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell\,\partial x_j}(y)=\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_j(\omega_i)-R_0)(R_\ell(\omega_i)-R_0)\,u''\Big(R_0+\sum_{k=1}^{3}(R_k(\omega_i)-R_0)y_k\Big)$$

a) $$\forall j\in[\![1,3]\!],\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(0,1,c)=\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_j(\omega_i)-R_0)\,u'\big(R_0+(R_2(\omega_i)-R_0)+(R_3(\omega_i)-R_0)c\big)$$

$$\forall j\in[\![1,3]\!],\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(0,1,c)=\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_j(\omega_i)-R_0)\,u'\big(R_2(\omega_i)+c\,R_3(\omega_i)-cR_0\big)$$

D'après Q4 c convient si et seulement si

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_1(\omega_i)-R_0)\,u'(R_2(\omega_i)+cR_3(\omega_i)-cR_0)\leq 0\\ \sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_2(\omega_i)-R_0)\,u'(R_2(\omega_i)+cR_3(\omega_i)-cR_0)\geq 0\\ \sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\})(R_3(\omega_i)-R_0)\,u'(R_2(\omega_i)+cR_3(\omega_i)-cR_0)=0\end{cases}$$

; c'est-à-dire si et seulement si : (*)

$$(*)\quad\begin{cases}E[(R_1-R_0)\,u'(R_2+cR_3-cR_0)]\leq 0\\ E[(R_2-R_0)\,u'(R_2+cR_3-cR_0)]\geq 0\\ E[(R_3-R_0)\,u'(R_2+cR_3-cR_0)]=0\end{cases}$$

;

i.e. $$E(R_1\,u'(R_2+cR_3-cR_0))\leq R_0\,E(u'(R_2+cR_3-cR_0))=E(R_3\,u'(R_2+cR_3-cR_0))\leq E(R_2\,u'(R_2+cR_3-cR_0)),$$