CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Samedi 25 Avril 1998, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les variables aléatoires, considérées dans chaque partie de ce problème, sont des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité (Ω, A, P).
X étant une variable aléatoire admettant des moments d'ordre 1 et 2, $E(X)$ désigne l'espérance de X, $V(X)$ sa variance.

Tous les couples (X,Y) de variables aléatoires à densité considérés dans ce problème sont tels que X et Y admettent des moments d'ordre 1 et 2 et le produit XY est une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 1. On définit alors la covariance de X et Y par:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et on admet que cette covariance vérifie les propriétés suivantes :

1) $cov(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha\, cov(X,Z) + \beta\, cov(Y,Z)$
2) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
3) $|cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$
4) si X et Y sont indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$

où α et β sont des réels, X, Y et Z des variables aléatoires à densité.

Ces propriétés ne doivent pas être démontrées.

Un gestionnaire investit un capital parmi n actifs, notés A_1 , A_2 , .., A_n (par exemple des actions), disponibles sur le Marché Boursier. Les rendements à un an de ces actifs, exprimés <u>en pourcentage</u> , sont des variables aléatoires R_1 , R_2, .. , R_n admettant des moments d'ordre 1 et 2. Par exemple, si l'actif A_1 a rapporté 6%, R_1 prend la valeur 6.

Le gestionnaire constitue un portefeuille, c'est-à-dire un n-uplet $(x_1, x_2, .., x_n)$ tel que, pour tout i de $\{1,..,n\}$, x_i est un réel positif ou nul et tel que : $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chaque coefficient x_i représente la proportion du capital investie dans l'actif A_i. Par exemple, si n vaut 3 et si le gestionnaire investit un quart du capital dans l'actif A_1, la moitié du capital dans l'actif A_2 et le quart du capital dans l'actif A_3 , le portefeuille vaut $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Si $(x_1, x_2, .., x_n)$ est un portefeuille donné, le rendement (en pourcentage) de ce portefeuille est la variable aléatoire : $R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$.

Notre gestionnaire prudent désire minimiser les risques et recherche pour cela les portefeuilles dont le rendement R est de variance minimale, sous certaines hypothèses.

Préliminaire

On considère le portefeuille : $Q = (x_1, .., x_n)$ et son rendement : $R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$. On rappelle que la variance de R est :

$$V(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, V(R_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \, cov(R_i, R_j).$$

1) On suppose, dans un programme Pascal, avoir défini :
   Const n = 5;
   Type Tab = Array[1..n] of real;
   var A: Array[1..n,1..n] of real;

où $A[i,j]$ représente $cov(R_i, R_j)$.

Ecrire une fonction V de type *real* de paramètre le portefeuille Q de type *Tab* qui renvoie la valeur de $V(R)$.

2) On considère l'ensemble : $H = \left\{ (x_1,...,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n , \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$. On admet que H est fermé.

On définit sur $\mathbb{R}^n$, la fonction F : $F(x_1, .., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, V(R_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \, cov(R_i, R_j)$.

Montrer que F admet un minimum sur H.

La suite du problème consiste à déterminer ce minimum et les points de H où ce minimum est atteint, pour répondre ainsi à la demande du gestionnaire prudent.

Partie 1

Dans cette partie, l'entier n vaut 2 et les rendements des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y.
On suppose : $V(X) = 12$, $V(Y) = 3$, $cov(X,Y) = c$, où c est un réel donné.
Pour un réel a de $[0,1]$, on considère le portefeuille $(a, 1-a)$ dont le rendement est la variable aléatoire :
$R = aX + (1-a)Y$.

1) Montrer que l'on a : $|c| \leq 6$.

2) a) Montrer que l'on a : $V(R) = (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$.

b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par : $h(x) = (15-2c)x^2 + 2(c-3)x + 3$. Etudier les variations de h sur $[0,1]$, en distinguant les deux cas : $c \in [-6, 3[$ et $c \in [3, 6]$. Montrer qu'il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale. On déterminera ce portefeuille en fonction de c.

3) a) On suppose : $c = -6$.
Déterminer le portefeuille dont le rendement R est de variance minimale et cette variance minimale. Que peut-on dire de la variable aléatoire R dans ce cas?

b) On suppose que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le portefeuille de rendement de variance minimale.

4) On suppose dans cette question que X et Y sont des variables gaussiennes indépendantes, X de moyenne égale à 6 et de variance égale à 12, Y de moyenne égale à 3 et de variance égale à 3.
Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Quelle est la loi de R ? Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4. (On donne : $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = 0{,}60$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).

5) On suppose dans cette question que les variables à densité X et Y sont indépendantes. On suppose de plus que X suit la loi uniforme sur $[0, 12]$ et que Y suit la loi uniforme sur $[0, 6]$.

a) Donner les valeurs des espérances de ces variables et vérifier : $V(X) = 12$, $V(Y) = 3$.

b) Déterminer la loi de la variable $4Y$, puis la densité de la variable $X + 4Y$. Tracer le graphe de cette densité.

c) Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4.

Partie 2

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z.
On suppose de plus : $V(X) = 2$, $V(Y) = V(Z) = 6$, $cov(X,Y) = -1$, $cov(X,Z) = 2$, $cov(Y,Z) = 1$.
On considère le portefeuille (x, y, z) dont le rendement est la variable : $R = xX + yY + zZ$.

La fonction f, l'ensemble K et l'ensemble K_0 sont définis comme suit :
pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6$, $K_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$
$K = \{ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ x + y \leq 1 \}$, $K_0 = \{ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x + y < 1 \}$. On admet que K_0 est ouvert.

1) Montrer que le problème du gestionnaire revient à déterminer le minimum de f sur K. Dessiner le domaine K.

2) a) Montrer que f admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$ atteint au point (x_0, y_0) que l'on déterminera.
b) En déduire que f n'admet pas de minimum sur K_0.

3) a) On pose : $K_1 = \{ (0,y), y \in [0,1] \}$, $K_2 = \{ (x,0), x \in [0,1] \}$, $K_3 = \{ (x, 1-x), x \in [0,1] \}$.
Déterminer les minimums de f respectivement sur K_1, K_2 et K_3.
b) En déduire l'unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

Partie 3

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1 , A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z .

1) On suppose : $V(X) = V(Y) = V(Z) = 1$, $cov(X,Y) = cov(X,Z) = cov(Y,Z) = c$, où c est un réel donné.

a) Calculer $V(X+Y+Z)$. Montrer que l'on a : $c \in \left[-\frac{1}{2},1\right]$.

b) On suppose : $c \neq 1$. On considère un portefeuille (x,y,z) de rendement R.

Montrer que l'on a : $V(R) = (1-c)\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2\right] + \frac{1+2c}{3}$.

Déterminer le portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

2) Soit A, B, C des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$; on a donc : pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(A=k) = P(B=k) = P(C=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On suppose que les variables X, Y et Z vérifient: $\begin{cases} X = B + C \\ Y = A + C + 1 \\ Z = A + B + 2 \end{cases}$.

a) Déterminer les espérances, variances et covariances des variables X, Y et Z.

b) Montrer que le portefeuille de rendement de variance minimale est $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

c) Déterminer la loi de $A+B+C$. En déduire la probabilité que le rendement R du portefeuille ci-dessus soit supérieur ou égal à 5.

Partie 4

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On note M la matrice de covariance de $R_1,.., R_n$, matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $cov(R_i, R_j)$.
On note $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles ayant n lignes et 1 colonne.

1) On considère un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$: $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et la variable aléatoire : $T = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$.

Vérifier que l'on a : $V(T) = {}^tU M U$, où ${}^tU$ désigne la transposée de U.

2) a) Montrer que M est diagonalisable.
b) A l'aide du 1), montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

3) On suppose M inversible. Pour tout (U,W) de $(M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on pose $\varphi(U,W) = {}^tU M W$
a) Montrer : si ${}^tU M U = 0$, alors $U = 0$.
b) Montrer que φ est un produit scalaire. On note N la norme associée à ce produit scalaire.
c) Montrer : pour tout (U,W) de $(M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[(N(U))^2 + (N(W))^2\right] - \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2$.

d) En déduire l'unicité du portefeuille dont le rendement est de variance minimale (l'existence ayant été montrée dans le préliminaire).

PRELIMINAIRE

Q1 Cela ne pose aucun problème en remarquant que :

- $V(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \mathrm{cov}(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\left[x_i V(R_i) + 2\sum_{j=i+1}^{n} x_j \mathrm{cov}(R_i, R_j)\right]\right)$
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $V(R_i) = \mathrm{cov}(R_i, R_i)$!

```
(*ESCP 98*)

program variance;

const n=5;
type Tab=array[1..n] of real;

var A:array[1..n,1..n] of real;

function v(Q:tab):real;

var i,j:integer;t,s:real;

begin
s:=0;
for i:=1 to n do

    begin
    t:=0;
    for j:=i+1 to n do t:=t+Q[j]*A[i,j];
    s:=s+Q[i]*(Q[i]*A[i,i]+t+t);
    end;
V:=s;
end;

begin
end.
```

Q2 On sait que F est une fonction polynômiale donc que F est continue sur $\mathbb{R}^n$ donc sur H.

Nous savons déjà que H est fermé ; il ne reste donc plus qu'à montrer qu'il est borné pour conclure.

Soit $Q = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément de H.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $|x_j| = x_j \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $|x_j| \leq 1$.

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

Ainsi $\max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq 1$ ou $\|Q\|_\infty \leq 1$.

donc $\forall \varphi \in H$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. H est donc contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 (relativement à $\|.\|_\infty$) donc H est borné.
F est continue sur le fermé borné H donc F possède un minimum sur H.

Remarque.. On peut montrer que H est fermé en remarquant que :
$$H = \mathbb{R}_+^n \cap H' \quad \text{où } H' = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$
$\mathbb{R}_+^n$ est un fermé car c'est le produit de n fermés de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$ est un fermé de $\mathbb{R}$).
H' est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $g : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - 1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
H est alors fermé comme intersection de deux fermés.

PARTIE 1

Q1 Nous savons que : $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$, ainsi : $|c| \leq \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.
$|c| \leq 6$.

Q2 a) $$V(R) = V(aX + (1-a)Y) = V(aX) + V((1-a)Y) + 2\,\mathrm{cov}(aX, (1-a)Y)$$
$$= a^2 V(X) + (1-a)^2 V(Y) + 2a(1-a)\,\mathrm{cov}(X,Y)$$
$$= 12a^2 + 3(1-2a+a^2) + (2a-2a^2)c$$
$$= (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$$

Donc $V(R) = (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$.

b) h est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $h'(x) = 2(15-2c)x + 2(c-3)x$
$\forall x \in [0,1]$, $h'(x) = 2(15-2c)\left[x - \dfrac{3-c}{15-2c}\right]$ $\quad (15-2c > 0$ car $c \in [-6,6])$.

1er cas.. $c \in [3,6]$; $\quad \dfrac{3-c}{15-2c} \leq 0$ donc $\forall x \in]0,1]$, $h'(x) > 0$ et $h'(0) \geq 0$.
h est strictement croissante sur $[0,1]$. Il en résulte donc que :
h admet pour minimum $h(0) = 3$ et ce minimum est atteint en le seul point 0.

2ème cas.. $c \in [-6,3[$. $\quad \dfrac{3-c}{15-2c} > 0$ et $\quad 1 - \dfrac{3-c}{15-2c} = \dfrac{12-c}{15-2c} > 0$.

Ainsi $\dfrac{3-c}{15-2c} \in]0,1[$.

$\forall x \in [0,\alpha[,\ h'(x) < 0$, $h'(\alpha) = 0$, $\forall x \in]\alpha, 1]$, $h'(x) > 0$ ... en posant $\alpha = \frac{3-c}{15-2c}$!
h est strictement décroissante sur $[0,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,1]$.
Ainsi h possède pour minimum $h(\alpha)$ et ce minimum n'est atteint qu'en α.
Rappelons que $\alpha = \frac{3-c}{15-2c}$; ainsi $h(\alpha) = (15-2c)\left(\frac{3-c}{15-2c}\right)^2 + 2(c-3)\left(\frac{3-c}{15-2c}\right) + 3 = \frac{36-c^2}{15-2c}$.

Dans les deux cas h admet un minimum atteint en un seul point de $[0,1]$; ce point est $\frac{3-c}{15-2c}$ lorsque $c \in [-6,3[$ et 0 lorsque $c \in [3,6]$.

Remarquons alors que $V(R) = h(a)$. Ainsi il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.
Lorsque c appartient à $[-6,3[$ ce portefeuille est : $\left(\frac{3-c}{15-2c}, 1-\frac{3-c}{15-2c}\right)$.
Lorsque c appartient à $[3,6]$ ce portefeuille est : $(0,1)$.

Q3 a) $c = -6$. $\frac{3-c}{15-2c} = \frac{1}{3}$ et $1 - \frac{3-c}{15-2c} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Le portefeuille dont le rendement est de variance minimale est : $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
Sa variance est : $V(R) = \frac{36-(-6)^2}{15-2(-6)} = 0$. Ce portefeuille a un rendement de variance nulle.
$V(R) = 0$ donc R est une variable aléatoire quasi-certaine.

b) X et Y sont indépendantes donc $c = \text{cov}(X,Y) = 0$. Ainsi $\frac{3-c}{15-2c} = \frac{1}{5}$ et $1 - \frac{3-c}{15-2c} = \frac{4}{5}$. $\frac{36-c^2}{15-2c} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le portefeuille de rendement de variance minimale lorsque X et Y sont indépendantes.

V(R) vaut alors 2,4.

Q4 $R = \frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y$. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(6, \sqrt{12})$ donc $\frac{1}{5}X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{6}{5}, \sqrt{\frac{12}{25}}\right)$

$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(3, \sqrt{3})$ donc $\frac{4}{5}Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{12}{5}, \sqrt{\frac{48}{25}}\right)$

X et Y étant indépendantes, $\frac{1}{5}X$ et $\frac{4}{5}Y$ le sont aussi. Le cours donne alors :

$R = \frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{6}{5}+\frac{12}{5}, \sqrt{\left(\sqrt{\frac{12}{25}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{48}{25}}\right)^2}\right)$.

Donc $R \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{18}{5}, \sqrt{\frac{12}{5}}\right)$.

<u>R suit une loi normale de paramètres $\frac{18}{5}$ et $\sqrt{\frac{12}{5}}$.</u>

$p(R \geq 4) = 1 - p(R<4) = 1 - p\left(\frac{R-\frac{18}{5}}{\sqrt{\frac{12}{5}}} < \frac{4-\frac{18}{5}}{\sqrt{\frac{12}{5}}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{2/5}{\sqrt{12/5}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \simeq 1 - 0{,}60$

Donc <u>$p(R \geq 4) \simeq 0{,}40$.</u>

Q5 a) $E(X) = \frac{12+0}{2} = 6$ et $E(Y) = \frac{6+0}{2} = 3$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin [0,12] \\ \frac{1}{12} \text{ si } t \in [0,12] \end{cases}$ et $v(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin [0,6] \\ \frac{1}{6} \text{ si } t \in [0,6] \end{cases}$

u (resp. v) est une densité de X (resp. Y).

$\int_{-\infty}^{0} t^2 u(t)\,dt$ (resp. $\int_{12}^{+\infty} t^2 u(t)\,dt$) existe et vaut 0

$\int_0^{12} t^2 u(t)\,dt = \frac{1}{12}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{12} = 48$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u(t)\,dt$ existe et vaut 48.

X possède donc un moment d'ordre 2 qui vaut : 48.

X possède alors une variance qui vaut $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 48 - 6^2 = 12$.

On montre de la même manière que $V(Y)$ existe et vaut 3.

<u>$V(X) = 12$ et $V(Y) = 3$.</u>

<u>Remarque</u> .. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$...

b) v est une densité de Y donc $\hat{v} : t \mapsto \frac{1}{|4|} v\left(\frac{t-0}{4}\right)$ est une densité de 4Y

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{v}(t) = \frac{1}{4} v\left(\frac{t}{4}\right)$. Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{v}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \frac{t}{4} \notin [0,6] \\ \frac{1}{4 \times 6} \text{ si } \frac{t}{4} \in [0,6] \end{cases}$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{v}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin [0,24] \\ \frac{1}{24} \text{ si } t \in [0,24] \end{cases}$. Notons alors que <u>$4Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,24])$.</u>

u est une densité de X, $\hat{v}$ est une densité de $4Y$ et X et $4Y$ sont indépendantes (car X et Y le sont). $w : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\hat{v}(x-t)\,dt$ est alors une densité de $X+4Y$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\hat{v}(x-t)\,dt = \int_0^{12} \frac{1}{12}\hat{v}(x-t)\,dt \underset{y=x-t}{=} \frac{1}{12}\int_x^{x-12}\hat{v}(y)(-dy) = \frac{1}{12}\int_{x-12}^{x}\hat{v}(y)\,dy$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $w(x) = \frac{1}{12}\int_{x-12}^{x} 0\,dy = 0.$

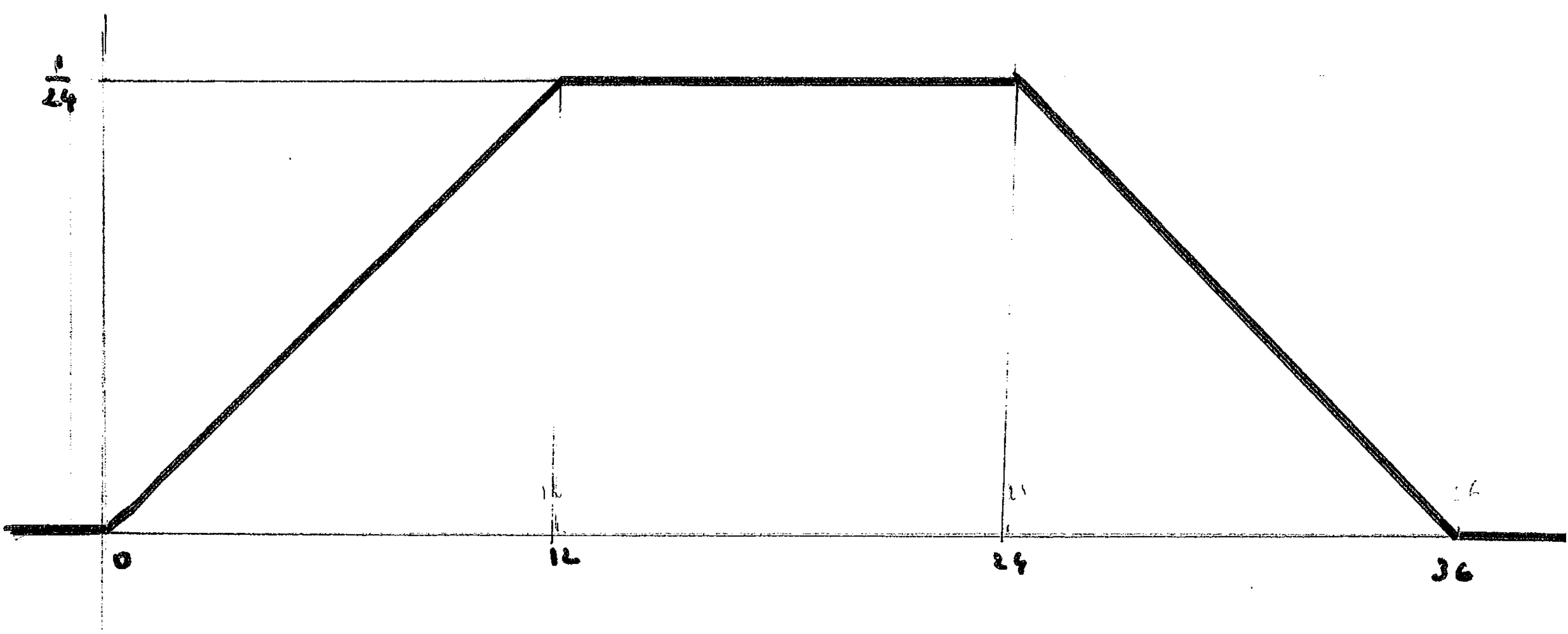
$\forall x \in [0, 12]$, $w(x) = \frac{1}{12}\int_0^x \frac{1}{24}\,dy = \frac{x}{288}$

$\forall x \in [12, 24]$, $w(x) = \frac{1}{12}\int_{x-12}^{x} \frac{1}{24}\,dy = \frac{1}{24}$

$\forall x \in [24, 36]$, $w(x) = \frac{1}{12}\int_{x-12}^{24} \frac{1}{24}\,dy = \frac{36-x}{288}$

$\forall x \in]36, +\infty[$, $w(x) = \frac{1}{12}\int_{x-12}^{x} 0\,dy = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad w(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]36, +\infty[\text{ ou si } x \in]-\infty, 0] \cup [36, +\infty[\\ \frac{x}{288} \text{ si } x \in [0, 12] \\ \frac{1}{24} \text{ si } x \in [12, 24] \\ \frac{36-x}{288} \text{ si } x \in [24, 36] \end{cases}$$



c) $P(R\geq 4) = P(\frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y \geq 4) = P(X+4Y \geq 20) = \int_{20}^{+\infty} \omega(t)dt = \frac{1}{24}\int_{20}^{24} dt + \frac{1}{288}\int_{24}^{36}(36-t)dt$

$P(R\geq 4) = \frac{1}{24}(24-20) + \frac{1}{288}\left[-\frac{(36-t)^2}{2}\right]_{24}^{36} = \frac{1}{6} + \frac{1}{288}\,\frac{12^2}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

$P(R\geq 4) = \frac{5}{12} \simeq 0{,}42$

PARTIE 2

Q1 $V(R) = V(xX+yY+zZ) = V(xX+yY+(1-x-y)Z)$ car $x+y+z=1$.

$V(R) = V(xX)+V(yY)+V((1-x-y)Z) + 2\,cov(xX,yY) + 2\,cov(xX,(1-x-y)Z) + 2\,cov(yY,(1-x-y)Z)$

$V(R) = x^2V(X)+y^2V(Y)+(1-x-y)^2V(Z) + 2xy\,cov(X,Y) + 2x(1-x-y)\,cov(X,Z) + 2y(1-x-y)\,cov(Y,Z)$

$V(R) = 2x^2+6y^2+6(1-x-y)^2 + 2xy(-1) + 2x(1-x-y)(2) + 2y(1-x-y)(1)$

$V(R) = 2x^2+6y^2+6+6x^2+6y^2-12x-12y+12xy-2xy+4x-4x^2-4xy+2y-2xy-2y^2$

$V(R) = 4x^2+10y^2+4xy-8x-10y+6$

$V(R) = 4x^2+10y^2+4xy-8x-10y+6 = f(x,y).$

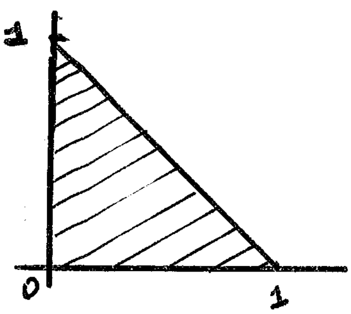
Trouver le minimum de $V(xX+yY+zZ)$ pour $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ et $x+y+z=1$ c'est trouver le minimum de $V(xX+yY+(1-x-y)Z) = f(x,y)$ pour $x\geq 0, y\geq 0, 1-x-y\geq 0$, c'est à dire pour $(x,y)\in K$.

Ainsi le problème du gestionnaire consiste à déterminer le minimum de f sur K.

⚠ Rectifions le texte en posant $K_0 = \{(x,y)\in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x+y<1\}$

K_0 est alors l'intérieur de K.

Notons encore que $K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$



K

Q2 a) f est une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^2$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x+4y-8$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 20y+4x-10.$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \iff \begin{cases}8x+4y-8=0\\20y+4x-10=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x+y=2\\2x+10y=5\end{cases} \iff \begin{cases}9y=3\\x=\frac{5-10y}{2}\end{cases} \iff \begin{cases}y=\frac{1}{3}\\x=\frac{5-\frac{10}{3}}{2}=\frac{5}{6}\end{cases}$

Ainsi $\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$ est l'unique point critique de f.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=20$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4$

Posons $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$ et $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$.

$s^2-rt=16-8\times 20<0$; f admet un extremum local en $\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$ qui est un un minimum car $r=8>0$

Conclusion.. <u>f admet un minimum local en le seul point $\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$.</u>

<u>Remarque</u>.. Il s'agit en fait d'un minimum global !

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{5}{6}+\alpha,\frac{1}{3}+\beta\right)-f\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)=\cdots=4\alpha^2+10\beta^2+4\alpha\beta=4\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2+9\beta^2\geq 0$

Les initiés auront aussi justifié cela en remarquant que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$
($s^2-rt\leq 0$ ... en tout point).

<u>b)</u> si f admet un minimum sur K_0 qui est ouvert alors f admet un point critique qui appartient à K_0 ; or le seul point critique de f est $\left(\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$ qui n'est pas un point de K_0 car $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7}{6}>1$.

<u>f n'admet pas de minimum sur K_0</u>.

Q3 <u>a)</u> * $\forall y\in[0,1]$, $f(0,y)=10y^2-10y+6=10\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

$\forall y\in[0,1]-\{\frac{1}{2}\}$, $f(0,y)>\frac{7}{2}=f\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

<u>f admet $\frac{7}{2}$ pour minimum sur K_1 ; ce minimum est atteint en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.</u>

* $\forall x\in[0,1]$, $f(x,0)=4x^2-8x+6=4(x-1)^2+2$

$\forall x\in[0,1]-\{1\}$, $f(x,0)>2=f(1,0)$.

<u>f admet 2 pour minimum sur K_2 ; ce minimum est atteint en $(1,0)$.</u>

* $\forall x\in[0,1]$, $f(x,1-x)=4x^2+10(1-x)^2+4x(1-x)-8x-10(1-x)+6=\cdots=10x^2-14x+6$

$\forall x \in [0,1]$, $f(x, 1-x) = 10x^2 - 14x + 6 = 10\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{11}{10}$.

$\forall x \in [0,1] - \{7/10\}$, $f(x, 1-x) = 10\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{11}{10} > \frac{11}{10} = f\left(\frac{7}{10}, 1 - \frac{7}{10}\right) = f\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$.

f admet $\frac{11}{10}$ pour minimum sur K_1 ; ce minimum est atteint en $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$.

b) D'après le préliminaire $(x,y,z) \to V(xX + yY + zZ)$ admet un minimum sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+3} \mid x+y+z = 1\}$ donc $f : (x,y) \to V(xX + yY + (1-x-y)Z)$ admet un minimum sur $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \mid x+y \leq 1\}$ (ce qui se retrouve en remarquant que f est continue et que K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$)

Ce minimum ne peut pas être atteint sur K_0 d'après 2b donc il est atteint ou sur K_1 ou sur K_2 ou sur K_3 car $K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$

Ainsi $\min\limits_{(x,y) \in K} f(x,y) = \min\limits_{(x,y) \in K_1 \cup K_2 \cup K_3} f(x,y)$. Or nous avons vu que : $\min\limits_{(x,y) \in K_1} f(x,y) = \frac{7}{2}$,

$\min\limits_{(x,y) \in K_2} f(x,y) = 2$ et $\min\limits_{(x,y) \in K_3} f(x,y) = \frac{11}{10}$. $\frac{7}{2} > 2 > \frac{11}{10}$! donc $\min\limits_{(x,y) \in K} f(x,y) = \frac{11}{10}$.

mieux ce minimum de f sur K est atteint en le seul point $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$.

Finalement l'unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale est $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}, 0\right)$.

Partie 3

Q1 a) $V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) + 2\operatorname{cov}(X,Y) + 2\operatorname{cov}(Y,Z) + 2\operatorname{cov}(Z,X)$

$V(X+Y+Z) = 3 + 2(c+c+c) = 3(1+2c)$. $V(X+Y+Z) = 3(1+2c)$.

$V(X+Y+Z)$ est positif donc $3(1+2c) \geq 0$; $c \geq -\frac{1}{2}$.

De plus $|c| = |\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)} = 1$; ceci donne : $-1 \leq c \leq 1$. Finalement : $c \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) $V(R) = V(xX + yY + zZ) = x^2 V(X) + y^2 V(Y) + z^2 V(Z) + 2xy\operatorname{cov}(X,Y) + 2yz\operatorname{cov}(Y,Z) + 2zx\operatorname{cov}(Z,X)$

$V(R) = V(xX + yY + zZ) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyc + 2yzc + 2zxc$

$= x^2 + y^2 + z^2 + c(2xy + 2yz + 2zx)$

$= x^2 + y^2 + z^2 + c\left[(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2\right]$

$V(R) = V(xX + yY + zZ) = (1-c)(x^2 + y^2 + z^2) + c$ car $x+y+z = 1$

$V(R) = (1-c)(x^2+y^2+z^2)+c = (1-c)\left[(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2 + 2\times\frac{1}{3}\underbrace{(x+y+z)}_{=1} - \frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right]+c$

$V(R) = (1-c)\left[(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2\right] + (1-c)(\frac{2}{3}-\frac{3}{9})+c$

$V(R) = (1-c)\left[(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2\right] + \frac{1-c}{3}+c$, or $\frac{1-c}{3}+c = \frac{1+2c}{3}$.

Finalement : $\underline{\underline{V(R) = (1-c)\left[(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2\right] + \frac{1+2c}{3}}}$.

Ainsi $V(R) = V(xX+yY+zZ) = (1-c)\left[(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2\right]+\frac{1+2c}{3} \geq \frac{1+2c}{3}$

$(1-c)\left[(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2\right] \geq 0$

Notons que $V(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}Y+\frac{1}{3}Z) = (1-c)[0^2+0^2+0^2]+\frac{1+2c}{3} = \frac{1+2c}{3}$

Ainsi $\forall (x,y,z) \in \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^{+3} \mid x+y+z=1\}$, $V(R) = V(xX+yY+zZ) \geq \frac{1+2c}{3} = V(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}Y+\frac{1}{3}Z)$

Remarquons que cette inégalité est stricte dès que $(x,y,z) \neq (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ car $(x,y,z)\neq(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ donne : $(1-c)\left[(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2\right] > 0$ puisque : $c < 1$.

Ainsi $\underline{\underline{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \text{ est le portefeuille dont le rendement est de variance minimale.}}}$

a) Rappelons que : $E(A) = E(B) = E(C) = \frac{1}{1/2} = 2$ et $V(A) = V(B) = V(C) = \frac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2$

$E(X) = E(B)+E(C) = 4$; $E(Y) = E(A)+E(C)+1 = 5$; $E(Z) = E(A)+E(B)+2 = 6$.

$V(X) = V(B)+V(C) = 4$ car B et C sont indépendantes

$V(Y) = V(A+C+1) = V(A+C) = V(A)+V(C) = 4$ car A et C sont indépendantes.

$V(Z) = V(A+B+2) = V(A+B) = V(A)+V(B) = 4$ — A et B —————— .

$cov(X,Y) = cov(B+C, A+C+1) = cov(B+C, A+C) + \underbrace{cov(B+C,1)}_{=0} = \underbrace{cov(B,A)}_{=0} + \underbrace{cov(B,C)}_{=0} + \underbrace{cov(C,A)}_{=0} + \underbrace{cov(C,C)}_{=V(C)=2}$

donc $cov(X,Y) = 2$.

De même $cov(Y,Z) = cov(A+C+1, A+B+2) = \cdots = cov(A+C, A+B) = \cdots = cov(A,A) = V(A) = 2$

et $cov(Z,X) = cov(A+B+2, B+C) = \cdots = cov(A+B, B+C) = \cdots = cov(B,B) = V(B) = 2$.

Ainsi $\underline{\underline{E(X) = E(Y) = E(Z) = 4 .\ V(X) = V(Y) = V(Z) = 4 .\ cov(X,Y) = cov(Y,Z) = cov(Z,X) = 2.}}$

b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+3}$ tel que : $x+y+z = 1$.

$V(R) = V(xX+yY+zZ) = V(2x\frac{1}{2}X+2y\frac{1}{2}Y+2z\frac{1}{2}Z) = 2^2\, V(x(\frac{1}{2}X)+y(\frac{1}{2}Y)+z(\frac{1}{2}Z))$

Posons alors $X' = \frac{1}{2}X$, $Y' = \frac{1}{2}Y$ et $Z' = \frac{1}{2}Z$. $V(R) = 4\,V(xX'+yY'+zZ')$.

Remarquons alors que : $V(X') = V(\frac{1}{2}X) = \frac{1}{4}V(X) = 1$. De même $V(Y') = 1$ et $V(Z') = 1$.
$cov(X', Y') = cov(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}Y) = \frac{1}{4} cov(X, Y) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; de même $cov(Y', Z') = \frac{1}{2}$ et $cov(Z', X') = \frac{1}{2}$
comme $\frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, 1]$ et $\frac{1}{2} \neq 1$, d'après Q1 $V(xX' + yY' + zZ')$ est minimale

sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3} \mid x + y + z = 1\}$ pour $x = y = z = \frac{1}{3}$.
En rappelant que $V(R) = V(xX + yY + zZ) = 4V(xX' + yY' + zZ')$ on peut dire que
<u>le portefeuille de rendement de variance minimale est</u> $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Remarque.. Pour $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: $V(R) = 4 \times \frac{1 + 2 \times 1/2}{3} = \frac{8}{3}$.

<u>c1</u> les initiés diront que $A+B+C$ suit une loi de Pascal de paramètres 3 et 1/2.
Les autres feront deux étapes.

→ <u>Loi de A+B.</u> $(A+B)(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. $(B=i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements

$\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $p(A+B = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A+B = k \cap B = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A = k-i \cap B = i)$

$\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $p(A+B = k) = \sum_{i=1}^{k-1} p(A = k-i)\, p(B = i) = \sum_{i=1}^{k-1} p(A = k-i)\, p(B = i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-i-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$
A et B sont indépendantes

$\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $p(A+B = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = (k-1)\frac{1}{2^k} = C_{k-1}^1 \frac{1}{2^k}$.

$$\underline{\underline{(A+B)(\Omega) = [\![2, +\infty[\![\text{ et } \forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ p(A+B = k) = \frac{k-1}{2^k} = C_{k-1}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^k.}}$$

→ <u>Loi de A+B+C.</u>

$(A+B+C)(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$. Soit $k \in [\![3, +\infty[\![$.

$p(A+B+C = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A+B+C = k \cap C = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A+B = k-i \cap C = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A+B = k-i)\, p(C = i)$
A+B et C sont indépendantes car A, B et C le sont

$p(A+B+C = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A+B = k-i) \times \frac{1}{2^i}$

$p(A+B+C = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k-i-1}{2^{k-i}} \times \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{k-1} (k-i-1) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-2} j = \frac{1}{2^k} \frac{(k-2)(k-1)}{2}$.

$$\underline{\underline{(A+B+C)(\Omega) = [\![3, +\infty[\![\text{ et } \forall k \in [\![3, +\infty[\![,\ p(A+B+C = k) = \frac{(k-2)(k-1)}{2^{k+1}} = C_{k-1}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k}}$$

Remarque .. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$, indépendantes et qui suivent une loi géométrique de paramètre p : $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une loi de Pascal de paramètres n et p, c'est à dire :
$S(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ et $\forall k \in [\![n, +\infty[\![, \ p(S = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{n-k}$.

$R = \frac{1}{3}(X+Y+Z) = \frac{1}{3}(B+C+A+C+1+A+B+2) = \frac{2}{3}(A+B+C)+1$.

$p(R \geq 5) = p(\frac{2}{3}(A+B+C)+1 \geq 5) = p(A+B+C \geq 6) = 1 - p(A+B+C \leq 5) = 1 - p(A+B+C=3) - p(A+B+C=4) - p(A+B+C=5)$

$p(R \geq 5) = 1 - (\frac{1}{2})^3 - C_3^2 (\frac{1}{2})^4 - C_4^2 (\frac{1}{2})^5 = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{16} - \frac{6}{32} = \frac{1}{16}(16-2-3-3) = \frac{1}{2}$.

$p(R \geq 5) = 0{,}5$.

PARTIE 4

(Q1) Posons $MU = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(R_i, R_j) x_j$

$${}^tUMU = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(R_i, R_j) x_i x_j .$$

$$V(T) = V(x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n) = \sum_{i=1}^{n} V(x_i R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(x_i R_i, x_j R_j)$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(R_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) =$$

Dans le dernier Σ échangeons les rôles de i et j, il vient alors:

$$V(T) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(R_i, R_i) x_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_j x_i \operatorname{cov}(R_j, R_i)$$

Or $\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \operatorname{cov}(R_j, R_i)$ donc :

$$V(T) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left[x_i \operatorname{cov}(R_i, R_i) + \sum_{j=i+1}^{n} x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) + \sum_{j=1}^{i-1} x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) \right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) \right)$$

$V(T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) = {}^tUMU.$ $\quad$ $\underline{V(T) = {}^tUMU.}$

(Q2) a) $M = (\operatorname{cov}(R_i,R_j))$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\operatorname{cov}(R_j,R_i) = \operatorname{cov}(R_i,R_j)$.
M est donc une matrice symétrique réelle elle est donc diagonalisable.
M est diagonalisable.

b) Soit λ une valeur propre de M. λ est un réel car M est réelle et symétrique.
$\exists U \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $U \neq 0$ et $MU = \lambda U$. $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; ${}^tUU = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ car $U \neq 0$.

$0 \leq V(x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n) = {}^tUMU = {}^tU(\lambda U) = \lambda\, {}^tUU.$

Ainsi $\lambda\, {}^tUU \geq 0$ et ${}^tUU > 0$; ceci donne alors $\lambda \geq 0$.
Les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

(Q3) a) Rappelons que M est réelle et symétrique ; ainsi il existe une base orthonormale $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M.
Notons, pour i dans $[\![1,n]\!]$, α_i la valeur propre associée à U_i. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \geq 0$ d'après Q2 b) et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$ car M est inversible. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i > 0$.
Soit U un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ses coordonnées dans la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$. $MU = M(\sum_{i=1}^{n} t_i U_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i MU_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i U_i$
Ainsi ${}^tUMU = \langle U, MU \rangle = \sum_{i=1}^{n}(t_i(t_i\alpha_i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^2$.

Supposons que : ${}^tUMU = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^2 = 0$. Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i t_i^2 \geq 0$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i t_i^2 = 0$; sachant que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$ il vient :
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i^2 = 0$ ou $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i = 0$ c'est à dire $U = 0$.

Donc $\underline{\forall U \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUMU = 0 \Rightarrow U = 0.}$

b) * Soient $(U, W, W') \in M_{n,1}(\mathbb{R})^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\underline{\varphi(U, \lambda W + W')} = {}^tUM(\lambda W + W') = \lambda\, {}^tUMW + {}^tUMW' = \underline{\lambda \varphi(U,W) + \varphi(U,W')}$. $\underline{\varphi \text{ est linéaire à droite}}$.

* Soit $(U, W) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2$.

${}^tUMW \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^t({}^tUMW) = {}^tUMW$; donc ${}^tW\,{}^tM\,{}^t({}^tU) = {}^tUMW$
or ${}^tM = M$ et ${}^t({}^tU) = U$; ainsi $\varphi(W,U) = {}^tWMU = {}^tW\,{}^tM\,{}^t({}^tU) = {}^tUMW = \varphi(U,W)$.

$\varphi(W,U) = \varphi(U,W)$. φ est symétrique.

* Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\varphi(U,U) = {}^tU\Pi U$

Si $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi(U,U) = {}^tU\Pi U = V(x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n) \geqslant 0$

de plus si $\varphi(U,U) = 0$ alors ${}^tU\Pi U = 0$ et ainsi $U = 0$ d'après Q3 a)

$\varphi(U,U) \geqslant 0$ et $(\varphi(U,U) = 0 \Rightarrow U = 0)$; φ est définie positive.

φ est une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, linéaire à droite, symétrique et définie positive donc φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) Soient U et W deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}N(U+W)\right]^2 = \frac{1}{4}N^2(U+W) = \frac{1}{4}\left[N^2(U) + N^2(W) + 2\varphi(U,W)\right]$; de même

$\left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left[N^2(U) + N^2(W) - 2\varphi(U,W)\right]$.

Par addition il vient : $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 + \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[N^2(U) + N^2(W)\right]$; ainsi :

$\forall (U,W) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[(N(U))^2 + (N(W))^2\right] - \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2$.

d) Supposons que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sont deux portefeuilles dont le rendement est de variance minimale.

Posons : $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i = \frac{x_i + x'_i}{2}$ et $\hat{T} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{U+W}{2}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sont deux éléments de H, ainsi :

- $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in H$ (vérification immédiate) ;
- $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = V(t_1R_1 + t_2R_2 + \dots + t_nR_n) \geqslant V(x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n) = [N(U)]^2$;
- $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = \longrightarrow \geqslant V(x'_1R_1 + x'_2R_2 + \dots + x'_nR_n) = [N(W)]^2$;

On a alors $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\left[(N(U))^2 + (N(W))^2\right] \geqslant \left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 + \left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2\right) = 0$

Ainsi $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 \geq \frac{1}{2}\left[(N(U))^2+(N(W))^2\right]$; ceci donne encore :

$$\frac{1}{2}\left[(N(U))^2+(N(W))^2\right]-\left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2 \geq \frac{1}{2}\left[(N(U))^2+(N(W))^2\right]$$

donc $-\left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2 \geq 0$; nécessairement : $\left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2=0$.

Nous obtenons alors $N\left(\frac{U-W}{2}\right)=0$ et donc $\frac{U-W}{2}=0$; finalement $U=W$.

<u>d'où l'unicité du portefeuille dont le rendement est de variance minimale.</u>