PARTIE I

(Q1) Rappelons que : $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} f_r(t)\,dt = 1$.

Soit $r\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in]0,+\infty[$, $t f_r(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} e^{-t/2} t^{\frac{r}{2}+1-1} = \dfrac{\Gamma(\frac{r}{2}+1)2^{\frac{r}{2}+1}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{r+2}{2})2^{\frac{r+2}{2}}} e^{-t/2} t^{\frac{r+2}{2}-1}$

$\forall t\in]0,+\infty[$, $t f_r(t) = \dfrac{\Gamma(\frac{r}{2}+1)\,2}{\Gamma(\frac{r}{2})} f_{r+2}(t) \underset{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}{=} \frac{r}{2}\times 2 f_{r+2}(t) = r f_{r+2}(t)$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t f_r(t)\,dt$ existe et vaut r car $\int_0^{+\infty} f_{r+2}(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Comme $\int_{-\infty}^{0} t f_r(t)\,dt$ existe et vaut 0, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_r(t)\,dt$ existe et vaut r.

Finalement <u>X possède une espérance</u> et <u>$E(X)=r$.</u>

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$.

$t^2 f_r(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} e^{-t/2} t^{\frac{r+4}{2}-1} = \dfrac{\Gamma(\frac{r}{2}+2)2^{\frac{r}{2}+2}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} \times \dfrac{1}{\Gamma(\frac{r+4}{2})2^{\frac{r+4}{2}}} e^{-t/2} t^{\frac{r+4}{2}-1}$

$t^2 f_r(t) = \dfrac{(\frac{r}{2}+1)(\frac{r}{2})\Gamma(r/2)\times 2^2}{\Gamma(r/2)} \times f_{r+4}(t) = (r+2)r f_{r+4}(t)$.

$\int_0^{+\infty} f_{r+4}(t)\,dt$ existe et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} t^2 f_r(t)\,dt$ existe et vaut $(r+2)r$.

$\int_{-\infty}^{0} t^2 f_r(t)\,dt$ existe et vaut 0. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_r(t)\,dt$ existe et vaut r^2+2r.

Donc X^2 possède une espérance qui vaut r^2+2r

Alors X possède une variance qui vaut $r^2+2r-r^2=2r$.

<u>$V(X)$ existe et $V(X)=2r$.</u>

(Q2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall x\in\mathbb{R}$, $u(x)=e^x$. u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $u^{(k)}=u$.

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à u à l'ordre $n-1$ fournit : $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $u(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(\lambda-0)^k}{k!}u(0)+\int_0^\lambda \dfrac{(\lambda-t)^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n)}(t)\,dt$.

Ainsi $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $e^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \dfrac{(\lambda-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^t\,dt \underset{u=\lambda-t}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\lambda^k}{k!} + \int_\lambda^0 \dfrac{u^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda-u}(-du)$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $\quad e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda-t}\,dt$.

b) $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. $Y_\lambda \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et X_{2n} suit la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté.

$$P(X_{2n}>2\lambda) = 1-P(X_{2n}\leq 2\lambda) = 1-\int_{-\infty}^{2\lambda} f_{2n}(t)\,dt = 1-\int_0^{2\lambda}\frac{1}{\Gamma(n)2^n}\, t^{n-1} e^{-\frac{t}{2}}\,dt .$$

$$P(X_{2n}>2\lambda) = 1-\int_0^{2\lambda}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} e^{-t/2}\,\frac{1}{2}\,dt \underset{u=t/2}{=} 1-\int_0^{\lambda}\frac{1}{(n-1)!}\,u^{n-1}e^{-u}\,du = 1-\int_0^{\lambda}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt.$$

$$P(X_{2n}>2\lambda) = e^{-\lambda}\left[e^{\lambda}-\int_0^{\lambda}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda-t}\,dt\right] \underset{a)}{=} e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1}P(Y_\lambda=k).$$

$$P(X_{2n}>2\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}P(Y_\lambda=k) = P(Y_\lambda<n)$$

Ainsi $\underline{P(X_{2n}>2\lambda) = P(Y_\lambda<n)}$.

c) Notons que : $\underline{P(X_{2n}>x) = P(Y_{\frac{x}{2}}<n) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x/2)^k}{k!}e^{-\frac{x}{2}}}$.

```
Function timgad(n:integer; x:real) : real;
var k:integer; u,s:real;
begin
x:=x/2; u:=1; s:=1;
For k:=1 to n-1 do
    begin
    u:=u*x/k; s:=s+u;
    end;
timgad:=s*exp(-x);
End;
```

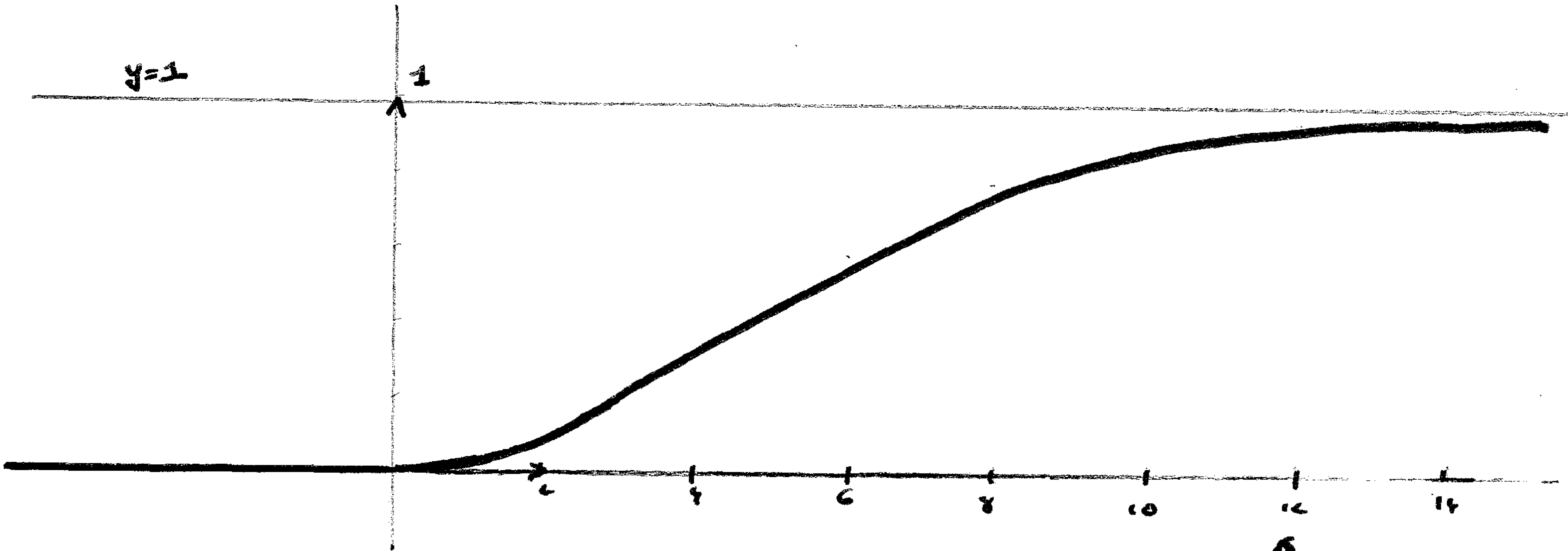
```
function Timgad(n:integer;x:real):real;

var k:integer;u,s:real;

begin
x:=x/2;u:=1;s:=1;
for k:=1 to n-1 do
    begin
    u:=u*x/k;s:=s+u;
    end;
Timgad:=s*exp(-x);
end;
```

quidam : $F_6(2)\simeq 0,083$; $F_6(4)\simeq 0,3233$!
$F_6(6)\simeq 0,5768$; $F_6(8)\simeq 0,7619$; $F_6(10)\simeq 0,8753$
$F_6(12)\simeq 0,9380$; $F_6(14)\simeq 0,9704$; $F_6(16)\simeq 0,9862$
$F_6(18)\simeq 0,9938$; $F_6(20)\simeq 0,9972$ ...

d) $F_6(0) = P(X_{2\times 3}\leq 0) = 0$

$$F_6(4) = P(X_{2\times3}\leq 2\times 2) = 1-P(Y_2<3) = 1-P(Y_2\leq 2) \simeq 1-0,6767 = 0,3233$$

$$F_6(8) = P(X_{2\times3}\leq 2\times 4) = 1-P(Y_4<3) = 1-P(Y_4\leq 2) \simeq 1-0,2381 = 0,7619$$



Notons que : $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_6(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_6(x) = \frac{1}{\Gamma(3)\, 2^3}\, e^{-x/2}\, x^{\frac{6}{2}-1}$

Ainsi : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_6(x) = 0$ et $\forall x \in \underline{\underline{[}}0, +\infty[$, $f_6(x) = \frac{1}{8} e^{-x/2} x^2$

Alors f_6 est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$; f_6 est donc continue sur $\mathbb{R}$.

F_6 est donc C^1 sur $\mathbb{R}$; en particulier $F_6'(0) = f_6(0) = 0$.

Q3 a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$. φ est une densité de X_1. φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction de répartition Φ de X_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$P(X_1^2 \leq x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0]$. Supposons $x > 0$.

$P(X_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$.

Notons $F_{X_1^2}$ la fonction de répartition de X_1^2.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_{X_1^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\text{ ou } \underline{\underline{[}}0, +\infty[\quad (\Phi(0) = \frac{1}{2} \dots) \end{cases}$$

$F_{X_1^2}$ est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; par composition $F_{X_1^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$F_{X_1^2}$ est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc $F_{X_1^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$F_{X_1^2}$ est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ donc $F_{X_1^2}$ est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi $\underline{\underline{X_1^2 \text{ est une variable aléatoire à densité}}}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_{X_1^2}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_{X_1^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, 2\, \Phi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X_1^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x/2} & \text{si } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$

$f_{X_1^2}$ est une densité de X_1^2.

Notons que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_{X_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\frac{1}{2}} f_1(x)$; mieux :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(\frac{1}{2}) \sqrt{2} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2}) f_1(x)$.

de plus $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1^2}(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)\,du = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \times 1$; $\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X_1^2}(x) = f_1(x)$.

Finalement si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $X_1^2 \hookrightarrow \gamma(2, \frac{1}{2})$ ou X_1^2 suit la loi du χ^2 à 1 degré de liberté.

Remarque.. Ceci n'est pas un scoop. Notons aussi que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ce qui n'est pas davantage une surprise.

b) $X_1, \dots, X_k$ sont indépendantes donc $X_1^2, \dots, X_k^2$ le sont également

Ainsi $X_1^2, X_2^2, \dots, X_k^2$ sont indépendantes et suivent la même gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Le cours (ou le cours + une petite récurrence) montre alors que $X_1^2 + \dots + X_k^2$ suit une loi gamma de paramètres 2 et $\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k \text{ fois!}}$

$X_1^2 + \dots + X_k^2 \hookrightarrow \gamma(2, \frac{k}{2})$.

Finalement $X_1^2 + \dots + X_k^2$ suit la loi du χ^2 à k degrés de liberté.

c) Notons F_r (resp. $F_{r'}$) la fonction de répartition d'une variable aléatoire T_r (resp. T'_r) qui suit la loi du χ^2 à r (resp. r') degrés de liberté.

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite. T_r (resp. $T_{r'}$) et $X_1^2 + \dots + X_r^2$ (resp. $X_1^2 + \dots + X_{r'}^2$) ont même loi.

$r < r'$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{X_1^2+\dots+X_{r'}^2 \leq x\} \subset \{X_1^2+\dots+X_r^2 \leq x\}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(X_1^2+\dots+X_{r'}^2 \leq x) \leq p(X_1^2+\dots+X_r^2 \leq x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(T_{r'} \leq x) \leq p(T_r \leq x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{r'}(x) \leq F_r(x)$.

Il faut donc retenir que la courbe représentative de $F_{r'}$ est au-dessous (au sens large !) de la courbe représentative de F_r.

Il ne me semble pas utile d'en faire davantage ici.

PARTIE II

A Etude des variable X_i

Q1 Les tirages étant indépendants X_i suit une loi binomiale de paramètres n et p_i (X_i compte le nombre de réalisations de l'événement obtenir une boule de couleur C_i lorsque l'on itère n fois l'expérience qui consiste à tirer une boule dans l'urne et cet événement se produit avec la probabilité p_i).

$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i)$. $E(X_i) = np_i$ et $V(X_i) = np_i(1-p_i)$.

Q2 $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

Notons A_{ij} (resp. A_i ; resp. A_j) l'événement obtenir une boule de couleur C_i ou C_j (resp. de couleur C_i ; resp. de couleur C_j) lorsque l'on tire une boule de l'urne.

$A_{ij} = A_i \cup A_j$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$. $P(A_{ij}) = P(A_i) + P(A_j) = p_i + p_j$.

$X_i + X_j$ compte le nombre de réalisations de l'événement $A_{ij} = A_i \cup A_j$ lorsque l'on itère (de manière indépendante) n fois l'expérience qui consiste à tirer une boule de l'urne. Ainsi $X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i+p_j)$. $V(X_i+X_j) = n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)$.

$n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j) = V(X_i+X_j) = V(X_i)+V(X_j)+2\operatorname{cov}(X_i,X_j) = np_i(1-p_i)+np_j(1-p_j)+2\operatorname{cov}(X_i,X_j)$.

$\operatorname{cov}(X_i,X_j) = \frac{n}{2}\left[(p_i+p_j)(1-p_i-p_j) - p_i(1-p_i) - p_j(1-p_j)\right] = \frac{n}{2}(p_i - p_i^2 - p_ip_j + p_j - p_jp_i - p_j^2 - p_i + p_i^2 - p_j + p_j^2)$.

$\mathrm{cov}(X_i,X_j) = \frac{n}{2}(-2p_ip_j) = -np_ip_j$. $\underline{\underline{\mathrm{cov}(X_i,X_j) = -np_ip_j}}$.

B $s=2$!

(Q1) $U_n = \frac{(X_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2-np_2)^2}{np_2} = p_2 Z_1^2 + \frac{(n-X_1-n(1-p_1))^2}{np_2} = p_2 Z_1^2 + p_1 Z_1^2 = Z_1^2$.

$X_1+X_2=n$

$p_1+p_2=1$

donc $\underline{\underline{U_n = Z_1^2}}$.

(Q2) a) Notons pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, B_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule de couleur C_1 et 0 sinon.

$X_1 = B_1 + B_2 + \dots + B_n$, $E(X_1) = np_1$ et $V(X_1) = \sqrt{np_1(1-p_1)}$.

les variables aléatoires B_i sont indépendantes et suivent la même loi donc le théorème de la limite centrée montre que $\left(\frac{B_1+B_2+\dots+B_n - E(B_1+B_2+\dots+B_n)}{\sqrt{V(B_1+B_2+\dots+B_n)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Or $\frac{B_1+B_2+\dots+B_n - E(B_1+\dots+B_n)}{\sqrt{V(B_1+B_2+\dots+B_n)}} = \frac{X_1-E(X_1)}{\sqrt{V(X_1)}} = \frac{X_1-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} = \frac{X_1-np_1}{\sqrt{np_1p_2}} = Z_1$

Ainsi "(Z_1)" converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Il semble désormais clair que l'on peut approcher, lorsque n est grand, Z_1 par une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} P(U_n \leq x) = F_1(x)$ où F_1 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à un degré de liberté.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(U_n \leq x) = P(Z_1^2 \leq x)$

Rappelons que (Z_1) converge en loi vers une variable aléatoire T qui suit une loi normale centrée réduite. Rappelons que T^2 suit une loi du χ^2 à un degré de liberté d'après P1 Q3 a). Ainsi $F_{T^2} = F_1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_-$; $P(U_n \leq x) = P(Z_1^2 \leq x) = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \leq x) = 0 = F_1(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$P(U_n \leq x) = P(Z_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq Z_1 \leq \sqrt{x})$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \leq x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(-\sqrt{x} \leq Z_1 \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq T \leq \sqrt{x})$ car 1) (Z_1) converge en loi vers T 2) T est une variable aléatoire à densité.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq T \leq \sqrt{x}) = P(T^2 \leq x) = F_{T^2}(x) = F_1(x)$.

Ceci achève de prouver que **(U_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à un degré de liberté.**

C $\quad D = 3$. $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ et $p_3 = \frac{1}{2}$.

(Q1) Rappelons l'identité du parallélogramme : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$!!

(dans un e.v.e. $2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2$).

$$U_n = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} + \frac{(X_3 - np_3)^2}{np_3} = \frac{4}{n}\left(X_1 - \frac{n}{4}\right)^2 + \frac{4}{n}\left(X_2 - \frac{n}{4}\right)^2 + \frac{2}{n}\left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2$$

$$U_n = \frac{2}{n}\left[2\left(X_1 - \frac{n}{4}\right)^2 + 2\left(X_2 - \frac{n}{4}\right)^2 + \left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2\right] = \frac{2}{n}\left[\left(X_1 - \frac{n}{4} + X_2 - \frac{n}{4}\right)^2 + \left(X_1 - \frac{n}{4} - X_2 + \frac{n}{4}\right)^2 + \left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2\right]$$

Or $X_1 + X_2 = n - X_3$ donc $X_1 - \frac{n}{4} + X_2 - \frac{n}{4} = n - X_3 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - X_3 = -\left(X_3 - \frac{n}{2}\right)$.

Ainsi $U_n = \frac{2}{n}\left[\left(-\left(X_3 - \frac{n}{2}\right)\right)^2 + (X_1 - X_2)^2 + \left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2\right] = \frac{4}{n}\left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{2}{n}(X_1 - X_2)^2 = Z_1^2 + Z_2^2$

$U_n = Z_1^2 + Z_2^2$. Hope, non ?

(Q2) $E(Z_1) = E\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\left(X_3 - \frac{n}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} E(X_3) - \sqrt{n} \overset{X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})}{=} \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{n}{2} - \sqrt{n} = 0$.

$V(Z_1) = V\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\left(X_3 - \frac{n}{2}\right)\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 V(X_3) = \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 \times n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$. Z_1 est centrée réduite.

$E(Z_2) = E\left(\sqrt{\frac{2}{n}}(X_1 - X_2)\right) = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(E(X_1) - E(X_2)\right) = 0$ car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$.

$V(Z_2) = \frac{2}{n}\left(V(X_1 - X_2)\right) = \frac{2}{n}\left[V(X_1) + V(-X_2) + 2\operatorname{cov}(X_1, -X_2)\right] = \frac{2}{n}\left[n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} - 2\operatorname{cov}(X_1, X_2)\right]$

Or d'après A Q2 : $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = -np_1p_2 = -\frac{n}{16}$.

$V(Z_2) = \frac{2}{n}\left[\frac{3n}{8} - 2\left(-\frac{n}{16}\right)\right] = \frac{2}{n} \times \frac{4n}{8} = 1$. Z_2 est également centrée réduite.

<u>$E(Z_1) = E(Z_2) = 0$ et $V(Z_1) = V(Z_2) = 1$.</u>

$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = \operatorname{cov}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\left(X_1 - \frac{n}{2}\right), \sqrt{\frac{2}{n}}(X_1 - X_2)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{n}\operatorname{cov}\left(X_1 - \frac{n}{2}, X_1 - X_2\right)$

$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = \frac{2\sqrt{2}}{n}\operatorname{cov}(X_1, X_1 - X_2)$ (car $\operatorname{cov}(T + \alpha, U + \beta) = \operatorname{cov}(T, U) \ldots$)

$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = \frac{2\sqrt{2}}{n}\left[\operatorname{cov}(X_1, X_1) - \operatorname{cov}(X_1, X_2)\right] = \frac{2\sqrt{2}}{n}\left(-np_1p_1 + np_1p_2\right) \overset{p_1 = p_2}{=} 0$.

<u>$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = 0$.</u>

Q3 Notons que $E(X_1) = \frac{n}{2}$ et $\sqrt{V(X_1)} = \sqrt{n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Ainsi $Z_1 = \dfrac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{V(X_1)}}$ et $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

La situation est analogue à celle de B Q2 a).

<u>On peut donc approcher la loi de Z_1 lorsque n est grand par la loi normale centrée réduite.</u>

Q4 a) <u>$X_1 - X_2 = \sum_{i=1}^{n} T_i$.</u>

b) . Les variables T_i sont indépendantes et suivent la même loi.

$E(T_i) = 1 \times p_1 + (-1) \times p_2 + 0\, p_3 = 0$.

$E(T_i^2) = 1^2 \times p_1 + (-1)^2 \times p_2 = p_1 + p_2 = 1/2$. $V(T_i) = E(T_i^2) - (E(T_i))^2 = \frac{1}{2}$.

Ainsi la $E\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = 0$ et $V\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(T_i) = \frac{n}{2}$.

La suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} T_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right)}} = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = Z_2$ converge en loi vers une

une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

<u>Donc on peut approcher pour n grand la loi de Z_n par une loi normale centrée réduite.</u>

Q5 Dans ces conditions et d'après P1 Q 3 b) la loi de U_n est la loi du χ^2 à deux degrés de liberté.

Q6

```
procedure Tirage(var C:tableau);

var i,t:integer;

begin
for i:=1 to 100 do
    begin
    t:=random(4);
    if t=0 then C[i]:=3
            else C[i]:=t;
    end;
end;
```

```
function Difference(c:tableau):integer;

var i,d:integer;

begin
d:=0;
for i:=1 to 100 do
    If C[i]=1 then d:=d+1
              else if C[i]=2 then d:=d-1;
Difference:=d;
```

D $n \geq 2$

Q1 $M = (\mathrm{cov}(Y_i, Y_j))$. Soit $(i,j) \in [\![1,s]\!]^2$.

$\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{cov}\left(\frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}, \frac{X_j - np_j}{\sqrt{np_j}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{p_i p_j}} \mathrm{cov}(X_i - np_i, X_j - np_j)$

$\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \frac{1}{n\sqrt{p_i p_j}} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$ (car $\mathrm{cov}(\alpha U + \beta, \alpha' V + \beta') = \alpha\alpha' \mathrm{cov}(U, V)$...)

Si $i = j$: $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \frac{1}{n\sqrt{p_i^2}} \mathrm{cov}(X_i, X_i) = \frac{V(X_i)}{np_i} = \frac{np_i(1-p_i)}{np_i} = 1 - p_i = 1 - \sqrt{p_i^2} = 1 - \sqrt{p_i p_j}$!

Si $i \neq j$: $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \frac{1}{n\sqrt{p_i p_j}} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{-np_i p_j}{n\sqrt{p_i p_j}} = -\sqrt{p_i p_j}$

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,s]\!]^2$, $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \begin{cases} 1 - p_i = 1 - \sqrt{p_i p_j} & \text{si } i = j \\ -\sqrt{p_i p_j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Ainsi $\underline{\underline{M = I_s - N = I - N}}$

Q2 $\forall (i,j) \in [\![1,s]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_i p_k} \sqrt{p_k p_j} = \sqrt{p_i p_j} \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k}_{=1} = \sqrt{p_i p_j}$.

Ainsi $\underline{\underline{N^2 = N}}$.

$\mathrm{rg}(N) = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{p_1 p_1} \\ \sqrt{p_2 p_1} \\ \vdots \\ \sqrt{p_s p_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p_1 p_2} \\ \sqrt{p_2 p_2} \\ \vdots \\ \sqrt{p_s p_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \sqrt{p_1 p_s} \\ \sqrt{p_2 p_s} \\ \vdots \\ \sqrt{p_s p_s} \end{pmatrix}\right)$. Posons $C = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \sqrt{p_2} \\ \vdots \\ \sqrt{p_s} \end{pmatrix}$.

$\mathrm{rg}(N) = \dim \mathrm{Vect}(\sqrt{p_1} C, \sqrt{p_2} C, \dots, \sqrt{p_s} C) = \dim \mathrm{Vect}(C)$ $\underline{\underline{\text{car}}}$ $\exists i \in [\![1,s]\!]$, $\sqrt{p_i} \neq 0$!!

Pour la même raison ($\exists i \in [\![1,s]\!]$, $\sqrt{p_i} \neq 0$), C n'est pas nulle, par conséquent $\mathrm{rg}(N) = \dim \mathrm{Vect}(C) = 1$.

$\underline{\underline{\mathrm{rg}(N) = 1.}}$

(Q3) N est une matrice symétrique réelle de rang 1 et telle que $N^2=N$.

* en résulte que 1) N est diagonalisable (N est symétrique et réelle)

2) $Sp(N) \subset \{0,1\}$ $(N^2=N)$

3) $\dim SEP(N,0) = s-1$ $(rg(N)=1)$.

Par conséquent $Sp(N)=\{0,1\}$, $\dim SEP(N,0)=s-1$, $\dim SEP(N,1)=1$, $SEP(N,0)$ et $SEP(N,1)$ sont orthogonaux.

Soit B_1 (resp. B_2) une base orthonormale de $SEP(N,0)$ (resp. $SEP(N,1)$).

$B_1 \cup B_2$ est alors une base orthonormale de $M_{s,1}(\mathbb{R})$. Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $M_{s,1}(\mathbb{R})$ à la base $B_1 \cup B_2$. Les deux bases étant orthonormales : ${}^tQQ = I_s = I$. En particulier $Q^{-1}={}^tQ$

De plus ${}^tQNQ = Q^{-1}NQ = D$ où $D=\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \\ & & & 1\end{pmatrix} = I - J_{s-1}$.

Alors ${}^tQ\Gamma Q = {}^tQ(I-N)Q = {}^tQQ - {}^tQNQ = I-(I-J_{s-1}) = J_{s-1}$.

Donc $QJ_{s-1}{}^tQ = Q\,{}^tQ\Gamma Q\,{}^tQ = QQ^{-1}\Gamma QQ^{-1} = \Gamma$.

Donc $\exists Q \in M_s(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tQQ = I$ et $\Gamma = QJ_{s-1}{}^tQ$.

(Q4) $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $Z_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} Y_j$.

$\forall i \in [\![1,s]\!]$, $E(Z_i) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} E(Y_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E\left(\frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{1}{\sqrt{np_i}}\underbrace{(E(X_i)-np_i)}_{=0} = 0$

Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, Z_i est centrée.

Soit $(i,j) \in [\![1,s]\!]^2$. $cov(Z_i,Z_j) = cov\left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}Y_k, \sum_{\ell=1}^{s} a_{j\ell}Y_\ell\right)$

$cov(Z_i,Z_j) = \sum_{k=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{s} a_{ik}a_{j\ell}\,cov(Y_k,Y_\ell)$.

Posons ${}^tQ\Gamma Q = (d_{ij})$. Comme ${}^tQ = (a_{ij})$, $Q=(a_{ji})$, $\Gamma = (cov(Y_i,Y_j))$ on a :

${}^t\varphi\Pi = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{cov}(Y_k,Y_j)\right)$ et par conséquent :

$\forall (i,j)\in [\![1,s]\!]^2,\quad \alpha_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{cov}(Y_k,Y_\ell)\right)\times a_{j\ell}$

$\forall (i,j)\in [\![1,s]\!]^2,\quad \alpha_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{j\ell}\,\mathrm{cov}(Y_k,Y_\ell) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ik}a_{j\ell}\,\mathrm{cov}(Y_k,Y_\ell).$

Finalement $\forall (i,j)\in [\![1,s]\!]^2,\ \alpha_{ij} = \mathrm{cov}(Z_i,Z_j)$.

La matrice de covariance de $Z_1,Z_2,\dots,Z_s$ est donc ${}^t\varphi\Pi\varphi$ c'est-à-dire J_{s-1}.

Alors $\forall (i,j)\in [\![1,s]\!]^2,\ \mathrm{cov}(Z_i,Z_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ 1 & \text{si } i=j\neq s \\ 0 & \text{si } i=j=s. \end{cases}$

En particulier $Z_1, Z_2,\dots,Z_{s-1}$ sont centrées réduites.

Notons que $V(Z_s)=\mathrm{cov}(Z_s,Z_s)=0$ et $E(Z_s)=0$.

Alors Z_s est une variable quasi-certaine égale à 0.

Q5 $U_n = \sum_{i=1}^{s} Y_i^2$. Notons que $\begin{pmatrix} Z_1\\ |\\ Z_s\end{pmatrix} = {}^t\varphi\begin{pmatrix} Y_1\\ |\\ Y_s\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} Y_1\\ |\\ Y_s\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} Z_1\\ |\\ Z_s\end{pmatrix}$

$U_n = \sum_{i=1}^{s} Y_i^2 = (Y_1,\dots,Y_s)\begin{pmatrix} Y_1\\ \vdots\\ Y_s\end{pmatrix} = {}^t\left(\varphi\begin{pmatrix} Z_1\\ |\\ Z_s\end{pmatrix}\right)\varphi\begin{pmatrix} Z_1\\ |\\ Z_s\end{pmatrix} = (Z_1 - Z_s)\underbrace{{}^t\varphi\varphi}_{I}\begin{pmatrix} Z_1\\ |\\ Z_s\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{s} Z_i^2$

$U_n = \sum_{i=1}^{s} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{s} Z_i^2 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{voir plus haut.}}}{=} \sum_{i=1}^{s-1} Z_i^2$

Pour n assez grand : $\forall i\in [\![1,s-1]\!],\ Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Z_1,Z_2,\dots,Z_{s-1}$ sont indépendantes

donc pour n assez grand et d'après I Q3 b), U_n suit la loi de χ^2 à $r-1$ degrés de liberté.

Notons X_i le nombre de personnes nées pendant la période T_i parmi les 8000 personnes.

D'après l'hypothèse faite : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(8000\,;\,0{,}250)$; $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(8000\,;\,0{,}169)$; $X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(8000\,;\,0{,}167)$; $X_4 \hookrightarrow \mathcal{B}(8000\,;\,0{,}414)$.

Ici donc $n = 8000$, $p_1 = 0{,}250$, $p_2 = 0{,}169$, $p_3 = 0{,}167$, $p_4 = 0{,}414$.

L'étude précédente conduit à dire que $U_n = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \right)^2$ suit la loi du χ^2 à 3 degrés de liberté.

$F_3(11{,}3) = 0{,}99$ indique que U_n prend une valeur inférieure ou égale à 11,3 avec une probabilité de 0,99 (99 chances sur 100).

Or la série statistique indique que la valeur observée de U_n est 12,03 !

On peut clairement rejeter l'hypothèse de répartition uniforme des naissances au cours de l'année.

Dès lors une vague colère nous envahit. Fallait-il s'envoyer 12 pages d'études théoriques pour savoir que la répartition des naissances au cours de l'année n'est pas uniforme ? Seuls les technocrates de la zigounette pouvaient le penser. Nous on avait bien compris qu'en plein hiver au bord d'un fjord avec moufles et passe-montagne ça le faisait pas beaucoup, hein ?

Bon, la prochaine fois on commencera par la fin.