PARTIE I PROPAGATION DETERMINISTE

A premier modèle de propagation.

(Q1) Pour simplifier l'écriture nous écrirons dans une partie de cette question u_n à la place de $u_n(\Delta)$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = c\Delta(1-u_n)$ ou $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=(1-c\Delta)u_n+c\Delta$. $u_0=\frac{1}{N}$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $x=(1-c\Delta)x+c\Delta \iff x=1$ $(c\Delta\neq 0)$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-1=(1-c\Delta)u_n+c\Delta-[(1-c\Delta)1+c\Delta] = (1-c\Delta)(u_n-1)$.

$(u_n-1)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $1-c\Delta$ et de premier terme $u_0-1=\frac{1}{N}-1$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n-1=(1-c\Delta)^n(u_0-1)=(1-c\Delta)^n\left(\frac{1}{N}-1\right)=-\frac{N-1}{N}(1-c\Delta)^n$

Finalement: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n(\Delta)=1-\frac{N-1}{N}(1-c\Delta)^n$.

$0<\Delta<\frac{1}{c}$; $0<\Delta c<1$; $\Delta c\in]0,1[$ donc $1-c\Delta\in]0,1[$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-c\Delta)^n=0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(\Delta)=1$.

(Q2) a) $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq\frac{t}{\Delta}<\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1$ et $\Delta>0$, $\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq t<\Delta\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1\right)$.

donc $t-\Delta<\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq t$. Comme $\lim\limits_{\Delta\to 0}(t-\Delta)=t$ il vient par encadrement:

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\right)=t$.

$u_{\left[\frac{t}{\Delta}\right]}(\Delta)=1-\frac{N-1}{N}(1-c\Delta)^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]}$.

$(1-c\Delta)^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]}=e^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]\ln(1-c\Delta)}$ $(1-c\Delta>0)$

$\lim\limits_{\Delta\to 0}c\Delta=0$ donc $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\ln(1-c\Delta)\underset{\Delta\to 0}{\sim}\left[\frac{t}{\Delta}\right](-c\Delta)=-c\,\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\underset{\Delta\to 0}{\sim}-ct$ $(ct>0)$.

Ainsi $\lim\limits_{\Delta \to 0} \left(\left[\frac{t}{\Delta}\right] \ln(1-c\Delta) \right) = -ct$; $\lim\limits_{\Delta \to 0} e^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]\ln(1-c\Delta)} = e^{-ct}$ ($x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$)

Donc $\lim\limits_{\Delta \to 0} u_{\left[\frac{t}{\Delta}\right]} = 1 - \frac{N-1}{N} e^{-ct}$.

(Q3) Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = e^{ct} f(t)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = e^{-ct} g(t)$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $c(1-f(t)) = c - ce^{-ct} g(t)$ et $f'(t) = -ce^{-ct} g(t) + e^{-ct} g'(t)$

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $c(1-f(t)) = f'(t)$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $c - ce^{-ct} g(t) = -ce^{-ct} g(t) + e^{-ct} g'(t)$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) = ce^{ct}$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = e^{ct} + \lambda$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = e^{-ct} g(t) = 1 + \lambda e^{-ct}$. Or $f(0) = \frac{1}{N}$.

Ainsi $\frac{1}{N} = 1 + \lambda$; $\lambda = \frac{1}{N} - 1 = -\frac{N-1}{N}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = 1 - \frac{N-1}{N} e^{-ct}$.

B Deuxième modèle de propagation.

Ici encore pour simplifier nous écrirons assez souvent v_n à la place de $v_n(\Delta)$

(Q1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \left[\frac{1}{N}, 1\right[$

- C'est clair pour $n = 0$ car $v_0 = 1/N$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$c > 0$, $\Delta > 0$, $v_n > 0$ et $1 - v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n = c\Delta v_n(1-v_n) > 0$.

Ainsi $v_{n+1} > v_n \geqslant \frac{1}{N}$.

$v_{n+1} - 1 = v_n - 1 + c\Delta v_n(1-v_n) = (1-v_n)(c\Delta v_n - 1) = c\Delta(1-v_n)(v_n - \frac{1}{c\Delta})$

$1 - v_{n+1} = c\Delta(1-v_n)(\frac{1}{c\Delta} - v_n)$. Or $c > 0$, $\Delta > 0$, $1 - v_n > 0$ et $\frac{1}{c\Delta} - v_n > 1 - v_n > 0$;

donc $1 - v_{n+1} > 0$. Finalement $v_{n+1} \in \left[\frac{1}{N}, 1\right[$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n(\Delta) \in [\frac{1}{N}, 1[.$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} - V_n = c\Delta V_n(1-V_n) > 0$. $(V_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante et est majorée par 1 donc $(V_n)_{n\geq 0}$ converge. Soit L sa limite ; $L \in [\frac{1}{N}, 1]$

de plus $L - L = c\Delta L(1-L)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \; V_{n+1} - V_n = c\Delta V_n(1-V_n)$

donc $c\Delta L(1-L) = 0$ et : $L = 1$ car $c>0$, $\Delta > 0$ et $L > 0$.

Finalement $(V_n(\Delta))_{n\geq 1}$ converge vers 1.

Q2) a) • Soit $n \in \mathbb{N}$. $1 - V_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{voir Q1}}}{=} c\Delta(1-V_n)(\frac{1}{c\Delta} - V_n)$.

$\frac{1}{c\Delta} - V_n \leq \frac{1}{c\Delta} - \frac{1}{N}$ et $c\Delta(1-V_n) > 0$ donc $1 - V_{n+1} \leq c\Delta(1-V_n)(\frac{1}{c\Delta} - \frac{1}{N}) = (1-V_n)(1 - \frac{c\Delta}{N})$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - V_{n+1}(\Delta) \leq (1 - V_n(\Delta))(1 - \frac{c\Delta}{N})$.

Une récurrence très simple montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - V_n(\Delta) \leq (1 - \frac{c\Delta}{N})^n (1 - V_0(\Delta))$

car $1 - \frac{c\Delta}{N} \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < 1 - V_n(\Delta) \leq (1 - \frac{c\Delta}{N})^n (1 - \frac{1}{N})$.

$c\Delta \in]0,1[$; $\frac{c\Delta}{N} \in]0, \frac{1}{N}[\subset]0,1[$; $(1 - \frac{c\Delta}{N}) \in]0,1[$.

La série de terme général $(1 - \frac{c\Delta}{N})^n (1 - \frac{1}{N})$ est alors convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $1 - V_n(\Delta)$ converge.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln \left(\frac{1 - V_{n+1}}{(1-c\Delta)^{n+1}} \times \frac{(1-c\Delta)^n}{(1-V_n)} \right)$

$\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln \left(\frac{1 - V_{n+1}}{(1-c\Delta)(1-V_n)} \right) = \ln \left(\frac{c\Delta(1-V_n)(\frac{1}{c\Delta} - V_n)}{(1-c\Delta)(1-V_n)} \right) = \ln \left(\frac{1 - c\Delta V_n}{1 - c\Delta} \right)$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1 - c\Delta V_n}{1 - c\Delta} \right) = 1$ donc $\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln\left(\frac{1 - c\Delta V_n}{1 - c\Delta} \right) \sim \frac{1 - c\Delta V_n}{1 - c\Delta} - 1 = \frac{c\Delta}{1 - c\Delta}(1 - V_n)$.

$\ln x_{n+1} - \ln x_n \sim \frac{c\Delta}{1-c\Delta}(1-V_n)$ et la série de terme général $\frac{c\Delta}{1-c\Delta}(1-V_n)$ est convergente et "positive", ainsi la série de terme général $\ln x_{n+1} - \ln x_n$ est convergente.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\sum_{k=0}^{n-1}[\ln(x_{k+1}) - \ln(x_k)] = \ln x_n - \ln x_0$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}[\ln(x_{k+1}) - \ln x_k] + \ln x_0\right) = \Delta + \ln x_0$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = e^{\Delta+\ln x_0} = x_0 e^{\Delta}$

$x_0 = \frac{1-V_0(\Delta)}{(1-c\Delta)^0} = 1-V_0(\Delta) = \frac{N-1}{N}$; donc $x_0 e^{\Delta} = \frac{N-1}{N}e^{\Delta} > 0$; $x_n \sim \frac{N-1}{N}e^{\Delta}$.

$\frac{1-V_n(\Delta)}{(1-c\Delta)^n} \sim \frac{N-1}{N}e^{\Delta}$; $1-V_n(\Delta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma(1-c\Delta)^n$ avec $\gamma = \frac{N-1}{N}e^{\Delta} > 0$.

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{V_{n+1}}{(1-V_{n+1})(1+c\Delta)^{n+1}} \times \frac{(1-V_n)(1+c\Delta)^n}{V_n} = \frac{V_n + c\Delta V_n(1-V_n)}{V_n} \times \frac{1-V_n}{(1-V_{n+1})(1+c\Delta)}$

Rappelons que : $1-V_{n+1} = (1-V_n)(1-c\Delta V_n)$.

Ainsi $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+c\Delta(1-V_n)}{(1-c\Delta V_n)(1+c\Delta)} = \frac{(1-c\Delta V_n)(1+c\Delta) + (c\Delta V_n)(c\Delta)}{(1-c\Delta V_n)(1+c\Delta)}$.

Donc $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{c^2\Delta^2 V_n}{(1+c\Delta)(1-c\Delta V_n)}$. Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{c^2\Delta^2 V_n(\Delta)}{(1+c\Delta)(1-c\Delta V_n(\Delta))}$.

b) $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\ln$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} \leq 0$

Ainsi $\forall (a,x)\in{\mathbb{R}_+^*}^2$, $\ln x \leq \ln' a(x-a) + \ln a$ (... la courbe est en dessous de ses tangentes)

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq \frac{1}{1}(x-1) + \ln 1$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$.

Ainsi $\forall u\in\,]-1,+\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$

Montrons par récurrence que : $\forall q\in\mathbb{N}$, $\ln\frac{(N-1)V_q}{(1-V_q)(1+c\Delta)^q} \leq q\frac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$

Cela revient à prouver que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\ln((N-1)y_q) \leq q\dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$

$\ln((N-1)y_0) = \ln\left[(N-1)\dfrac{v_0}{(1-v_0)(1+c\Delta)^0}\right] = \ln\left((N-1)\dfrac{1/N}{1-1/N}\right) = \ln 1 = 0 \leq 0 \times \dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$.

La propriété est donc vraie pour $q=0$. Supposons la vraie pour $q \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $q+1$.

$\ln\dfrac{(N-1)y_{q+1}}{(N-1)y_q} = \ln\dfrac{y_{q+1}}{y_q} = \ln\left(1+\dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}\right) \leq \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}$.

donc $\ln((N-1)y_{q+1}) - \ln((N-1)y_q) \leq \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}$.

Ainsi $\ln((N-1)y_{q+1}) \leq \ln((N-1)y_q) + \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)} \overset{H.R.}{\leq} q\dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta} + \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}$.

Ne reste plus alors qu'à prouver que $\dfrac{v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)} \leq \dfrac{1}{1-c\Delta}$ pour obtenir alors :

$\ln((N-1)y_{q+1}) \leq q\dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta} + \dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta} = (q+1)\dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$ et achever la récurrence.

Or : $0<v_q<1$, $0<\dfrac{1}{1+c\Delta}\leq 1$, $0<\dfrac{1}{1-c\Delta v_q} \leq \dfrac{1}{1-c\Delta}$ (*)

(* $v_q<1$; $c\Delta v_q < c\Delta$; $1-c\Delta v_q > 1-c\Delta>0$)

Par produit il vient $\dfrac{v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)} \leq \dfrac{1}{1-c\Delta}$ et c'est ce qu'il fallait prouver

pour clore la récurrence.

$$\forall q\in\mathbb{N},\ \ln\left(\frac{(N-1)\,v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+c\Delta)^q}\right) \leq q\,\frac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}.$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n>0$ et $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1+\dfrac{c^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_n(\Delta))} \geq 1$. Ainsi la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est

croissante, en particulier : $\forall q\in\mathbb{N}$, $y_q \geq y_0 = \dfrac{1/N}{(1-\frac{1}{N})(1+c\Delta)^0} = \dfrac{1}{N-1}$.

donc $\forall q \in \mathbb{N}$, $(N-1)y_q \geq 1$.

Ainsi : $\forall q \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln((N-1)y_q) = \ln\left(\dfrac{(N-1)v_q}{(1-v_q)(1+c\Delta)^q}\right) \leq q\ \dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$

ou $\forall q \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln\left(\dfrac{(N-1)\,v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))\,(1+c\Delta)^q}\right) \leq q\Delta\ \dfrac{c^2\Delta}{1-c\Delta}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $\quad 0 \leq \ln\left(\dfrac{(N-1)\,v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}^{(\Delta)})(1+c\Delta)^{[t/\Delta]}}\right) \leq \left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\Delta\ \dfrac{c^2\Delta}{1-c\Delta}$.

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\right) = t$ et $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{c^2\Delta}{1-c\Delta} = 0$. Par encadrement on obtient alors :

$\lim\limits_{\Delta\to 0} \ln\left(\dfrac{(N-1)\,v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}^{(\Delta)})(1+c\Delta)^{[t/\Delta]}}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{(N-1)\,v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}^{(\Delta)})(1+c\Delta)^{[t/\Delta]}} \overset{\bullet}{=} 1$

$[t/\Delta]\ln(1+c\Delta) \underset{\Delta\to 0}{\sim} [t/\Delta](c\Delta) \underset{\Delta\to 0}{\sim} ct$; $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left([t/\Delta]\ln(1+c\Delta)\right) = ct$;

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\ln(1+c\Delta)^{[t/\Delta]}\right) = ct$; $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+c\Delta)^{[t/\Delta]} \overset{\bullet\bullet}{=} e^{ct}$

Par produit de limites $(\bullet \times \bullet\bullet)$ il vient alors $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{(N-1)\,v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)} = e^{ct}$

c'est à dire $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\dfrac{1-v_{[t/\Delta]}^{(\Delta)}}{(N-1)v_{[t/\Delta]}^{(\Delta)}}\right) = e^{-ct}$

Donc $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left[\dfrac{1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{v_{[t/\Delta]}(\Delta)}\right] = (N-1)e^{-ct}$; $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left[\dfrac{1}{v_{[t/\Delta]}^{(\Delta)}} - 1\right] = (N-1)e^{-ct}$

$\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{1}{v_{[t/\Delta]}^{(\Delta)}} = 1+(N-1)e^{-ct}$; $\underline{\underline{\lim\limits_{\Delta\to 0} v_{[t/\Delta]}(\Delta) = \dfrac{1}{1+(N-1)e^{-ct}}}}$.

(Q4) $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ H(t) = \dfrac{1}{\ell(t)}$ et $\ell(t) = \dfrac{1}{H(t)}$.

H est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 = \ell'(t) - c\,\ell(t)(1-\ell(t)) = -\dfrac{H'(t)}{H^2(t)} - c\dfrac{1}{H(t)}\left(1-\dfrac{1}{H(t)}\right)$

Donc $0 = -\dfrac{1}{H^2(t)}\left[H'(t) + c(H(t)-1)\right]$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ H'(t) = c(1-H(t))$ et $H(0) = \dfrac{1}{\ell(0)} = N$.

Un raisonnement analogue à celui de A Q3 montre alors que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+, H(t) = 1 - \dfrac{\frac{1}{N}-1}{\frac{1}{N}} e^{-ct} = 1 - (1-N)e^{-ct} = 1+(N-1)e^{-ct}$

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h(t) = \dfrac{1}{1+(N-1)e^{-ct}}$.

Partie II Propagation probabiliste

A Une formule dans le cas discret.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $r \in [\![0, N-1]\!]$.

Notons $A_{n+1,r}$ l'événement à l'instant $(n+1)\Delta$ il reste r personnes non informées.

Notons $A_{n,r}$ (resp. $A_{n,r+1}$) l'événement à l'instant $n\Delta$ il reste r (resp. $r+1$) personnes non informées.

$A_{n+1,r}$ est contenu dans $A_{n,r} \cup A_{n,r+1}$ et $A_{n,r} \cap A_{n,r+1} = \emptyset$.

Ainsi $P(A_{n+1,r}) = P(A_{n+1,r} \cap A_{n,r}) + P(A_{n+1,r} \cap A_{n,r+1})$.

Donc $P(A_{n+1,r}) = P(A_{n+1,r} / A_{n,r}) P(A_{n,r}) + P(A_{n+1,r} / A_{n,r+1}) P(A_{n,r+1})$.

Ainsi $P_{n+1}(\Delta, r) = (1 - \beta\Delta r(N-r)) P_n(\Delta, r) + \beta\Delta(r+1)(N-(r+1)) P_n(\Delta, r+1)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in [\![0, N-1]\!],\ P_{n+1}(\Delta, r) = P_n(\Delta, r)(1 - \beta\Delta r(N-r)) + P_n(\Delta, r+1)\beta\Delta(r+1)(N-r-1)$.

B Etude d'un premier cas discret.

Ici $N=4$, $\Delta = 1$ et $\beta \in]0, \frac{1}{4}[$.

Q1 $\forall n \in \mathbb{N}, r \in [\![0,3]\!],\ P_{n+1}(1,r) = P_n(1,r)(1-\beta r(4-r)) + P_n(1,r+1)\beta(r+1)(3-r)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,0) = P_n(1,0) + 3\beta P_n(1,1)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,1) = (1-3\beta)P_n(1,1) + 4\beta P_n(1,2)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,2) = (1-4\beta)P_n(1,2) + 3\beta P_n(1,3)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,3) = (1-3\beta)P_n(1,3)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} P_{n+1}(1,0) \\ P_{n+1}(1,1) \\ P_{n+1}(1,2) \\ P_{n+1}(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n(1,0) + 3\beta P_n(1,1) \\ (1-3\beta)P_n(1,1) + 4\beta P_n(1,2) \\ (1-4\beta)P_n(1,2) + 3\beta P_n(1,3) \\ (1-3\beta)P_n(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n(1,0) \\ P_n(1,1) \\ P_n(1,2) \\ P_n(1,3) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = T U_n$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}$.

Q2) a) T est triangulaire supérieure donc les valeurs propres de T sont les éléments de sa diagonale.

Les valeurs propres de T sont 1, $1-3\beta$ et $1-4\beta$. Ces trois valeurs propres sont distinctes car $\beta \neq 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$TX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3\beta y = x \\ (1-3\beta)y + 4\beta z = y \\ (1-4\beta)z + 3\beta t = z \\ (1-3\beta)t = t \end{cases} \underset{\beta\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}.\quad SEP(T,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$TX = (1-3\beta)X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3\beta y = (1-3\beta)x \\ (1-3\beta)y + 4\beta z = (1-3\beta)y \\ (1-4\beta)z + 3\beta t = (1-3\beta)z \\ (1-3\beta)t = (1-3\beta)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta(x+y) = 0 \\ 4\beta z = 0 \\ \beta(-z+3t) = 0 \end{cases} \underset{\beta\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$SEP(T, 1-3\beta) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$TX = (1-4\beta)X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3\beta y = (1-4\beta)x \\ (1-3\beta)y + 4\beta z = (1-4\beta)y \\ (1-4\beta)z + 3\beta t = (1-4\beta)z \\ (1-3\beta)t = (1-4\beta)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(3y+4x) = 0 \\ \beta(y+4z) = 0 \\ 3\beta t = 0 \\ \beta t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 4x = 0 \\ y = -4z \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -4z \\ t = 0 \end{cases}$$

$$SEP(T, 1-4\beta) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

<u>Remarque</u> .. T n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas 4 ... remarquons-nous elle est triangularisable ...

b) Soit $(y,z,t)\in\mathbb{R}^3$.

$$T\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix}=(1-3\beta)\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3\beta y=1\\(1-3\beta)y+4\beta z=(1-3\beta)y-1\\(1-4\beta)z+3\beta t=(1-3\beta)z\\(1-3\beta)t=(1-3\beta)t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1/3\beta\\z=-1/4\beta\\3\beta t=\beta z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1/3\beta\\z=-1/4\beta\\t=-1/12\beta\end{cases}$$

$$\exists!(y,z,t)\in\mathbb{R}^3,\ T\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix}=(1-3\beta)\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}:\ (y,z,t)=\left(\frac{1}{3\beta},-\frac{1}{4\beta},-\frac{1}{12\beta}\right).$$

Posons $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $X_4=\begin{pmatrix}0\\1/3\beta\\-1/4\beta\\-1/12\beta\end{pmatrix}$.

Observons que : $TX_1=X_1$, $TX_2=(1-4\beta)X_2$, $TX_3=(1-3\beta)X_3$, $TX_4=(1-3\beta)X_4+X_3$.

Montrons que (X_1,X_2,X_3,X_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Comme cette famille a quatre vecteurs et que $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 4 il suffit de prouver qu'elle libre. Soit donc $(\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\delta)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $\hat\alpha X_1+\hat\beta X_2+\hat\gamma X_3+\hat\delta X_4=0$

$$\hat\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\hat\beta\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+\hat\gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\hat\delta\begin{pmatrix}0\\1/3\beta\\-1/4\beta\\-1/12\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad\begin{cases}\hat\alpha+3\hat\beta+\hat\gamma=0\\-4\hat\beta-\hat\gamma+\frac{1}{3\beta}\hat\delta=0\\\hat\beta-\frac{1}{4\beta}\hat\delta=0\\-\frac{1}{12\beta}\hat\delta=0\end{cases}$$

Il vient alors sans difficulté : $\hat\delta=0$, $\hat\beta=0$, $\hat\gamma=0$ et $\hat\alpha=0$

Ceci achève de prouver que $\mathcal{B}'=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}'$.

Alors. $P=\begin{pmatrix}1&3&1&0\\0&-4&-1&1/(3\beta)\\0&1&0&-1/(4\beta)\\0&0&0&-1/(12\beta)\end{pmatrix}$

et $P^{-1}TP=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1-4\beta&0&0\\0&0&1-3\beta&1\\0&0&0&1-3\beta\end{pmatrix}$ car $TX_1=X_1$, $TX_2=(1-4\beta)X_2$, $TX_3=(1-3\beta)X_3$ et $TX_4=X_3+(1-3\beta)X_4$

Si $S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1-4\beta&0&0\\0&0&1-3\beta&1\\0&0&0&1-3\beta\end{pmatrix}$, il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $S=P^{-1}TP$ ou $T=PSP^{-1}$.

On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1/(3\beta) \\ 0 & 1 & 0 & -1/(4\beta) \\ 0 & 0 & 0 & -1/(12\beta) \end{pmatrix}$ on a alors : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12\beta \end{pmatrix}$

d) Posons un instant : $a = 1-4\beta$ et $b = 1-3\beta$. On a alors $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$S^3 = S\,S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 & 3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix}.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^n & nb^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$

→ L'égalité vaut pour $n=1$ (et même pour $n=0$).

→ Supposons la vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$S^{n+1} = S\,S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^n & nb^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} & nb^n + b^n \\ 0 & 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$$ ... ce qui achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4\beta)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-3\beta)^n & n(1-3\beta)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (1-3\beta)^n \end{pmatrix}$$

Q3 $|1-4\beta| < 1$, $|1-3\beta| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-4\beta)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1-3\beta)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n(1-3\beta)^{n-1} = 0$

Ainsi la suite $(S^n)_{n\geq 0}$ converge vers $S_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $(PS^n)_{n\geq 0}$ converge vers PS_∞ et $(PS^nP^{-1})_{n\geq 0}$ converge vers $PS_\infty P^{-1}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = (PSP^{-1})^n = PS^nP^{-1}$.

Ainsi $(T^n)_{n\geq 0}$ converge vers $T_\infty = PS_\infty P^{-1}$

Posons $T_\infty = (t_{ij})$, $P = (p_{ij})$, $S_\infty = (s_{ij})$ et $P^{-1} = (q_{ij})$. $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2, \ t_{ij} = \sum_{k=1}^{4} p_{ik}\left(\sum_{\ell=1}^{4} s_{k\ell}\, q_{\ell j}\right) = \sum_{k=1}^{4} p_{ik}\, s_{k1}\, q_{1j} = p_{i1}\, q_{1j}$$

$\forall i \in [\![2,4]\!]$, $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $t_{ij} = 0$ car $p_{21} = p_{31} = p_{41} = 0$.

Ainsi les lignes 2, 3 et 4 de T_∞ sont nulles.

donc $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $T_\infty = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(T^n)_{n\geq 0}$ est convergente et par limite T_∞ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4 $LT = (1,1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix} = (1,1,1,1) = L$.

Une récurrence simple donne alors : $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ LT^n = L}}$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $\sum_{i=1}^{4} (T^n)_{ij} = 1$. En passant à la limite on obtient :

$\forall j \in [\![1,4]\!]$, $\sum_{i=1}^{4} (T_\infty)_{ij} = 1$. $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $(T_\infty)_{1j} + (T_\infty)_{2j} + (T_\infty)_{3j} + (T_\infty)_{4j} = 1$.

Rappelons que $(T_\infty)_{ij} = 0$ si $i \in [\![2,4]\!]$ et $j \in [\![1,4]\!]$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $(T_\infty)_{1j} = 1$.

Finalement $T_\infty = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$.

Q5 $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = TU_n$. Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = T^n U_0$

Or $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $(U_n)_i = \sum_{j=1}^{4} (T^n)_{ij} (U_0)_j = (T^n)_{i,4}$

Or $\lim_{n\to+\infty} (T^n)_{i,4} = (T_\infty)_{i,4}$. Ainsi $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(1,i-1) = \lim_{n\to+\infty} (U_n)_i = (T_\infty)_{i,4}$

donc $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} P_n(1,0) = 1,\ \lim_{n\to+\infty} P_n(1,1) = \lim_{n\to+\infty} P_n(1,2) = \lim_{n\to+\infty} P_n(1,3) = 0}}$

Rien de surprenant non ?

C Etude du cas discret général.

Q1 D'après A) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall r\in [\![0,N-1]\!], P_{n+1}(\Delta,r)=P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r))+P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-r-1)$

Posons $\forall r\in[\![0,N-1]\!],\ a_r=\beta\Delta r(N-r)$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}, \forall r\in[\![0,N-2]\!], P_{n+1}(\Delta,r)=(1-a_r)P_n(\Delta,r)+a_{r+1}P_n(\Delta,r+1)$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_{n+1}(\Delta,N-1)=(1-a_{N-1})P_n(\Delta,N-1)+0=(1-a_{N-1})P_n(\Delta,N-1)$. Par conséquent :

$$W_{n+1}=\begin{pmatrix}P_{n+1}(\Delta,0)\\P_{n+1}(\Delta,1)\\\vdots\\P_{n+1}(\Delta,N-2)\\P_{n+1}(\Delta,N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-a_0)P_n(\Delta,0)+a_1P_n(\Delta,1)\\(1-a_1)P_n(\Delta,1)+a_2P_n(\Delta,2)\\\vdots\\(1-a_{N-2})P_n(\Delta,N-2)+a_{N-1}P_n(\Delta,N-1)\\(1-a_{N-1})P_n(\Delta,N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a_0&a_1&0&\cdots&0\\0&1-a_1&a_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&1-a_{N-2}&a_{N-1}\\0&\cdots&\cdots&0&1-a_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_n(\Delta,0)\\P_n(\Delta,1)\\\vdots\\P_n(\Delta,N-2)\\P_n(\Delta,N-1)\end{pmatrix}$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}, W_{n+1}=RW_n$ avec $R=\begin{pmatrix}1-a_0&a_1&0&\cdots&0\\0&1-a_1&a_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&1-a_{N-2}&a_{N-1}\\0&\cdots&\cdots&0&1-a_{N-1}\end{pmatrix}$

et $\forall r\in[\![0,N-1]\!], a_r=\beta\Delta r(N-r)$

Q2 a)

```
procedure calcul1(var V:vecteur);

var k:integer; rho:real;

begin
rho:=Delta*Beta;

for k:=1 to N-1 do
V[k]:=(1-rho*(k-1)*(N-k+1))*V[k]+rho*k*(N-k)*V[k+1];

V[N]:=(1-rho*(N-1))*V[N];

end;
```

b)

(*)

```
procedure calcul2(var V:vecteur;i:integer);

var k:integer;

begin
for k:=1 to i do calcul1(V);
end;
```

(*) Pour moi c'est l'utilisateur qui initialise... voir le programme principal.

```
program HEC_99_MI;

uses crt;

const Beta=0.24;
      N=4;
      Delta=1;

Type vecteur=array[1..N] of real;

procédure calcul1 (var V:vecteur);
      ...
procédure calcul2 (...);
      ...

var i,k:integer;V:vecteur;

begin
clrscr;
write('Donner le nombre i d''itérations. i=');readln(i);

V[N]:=1;for k:=1 to N-1 do V[k]:=0;
calcul2(V,i);
writeln;
for k:=1 to N do
writeln('P(Delta,',k-1,')=',V[k]);

end.
```

← Le programme principal.

```
Donner le nombre i d'itérations. i=10
P10(Delta,0)= 9.9971903620E-01
P10(Delta,1)= 2.6911591958E-04
P10(Delta,2)= 8.8859029696E-06
P10(Delta,3)= 2.9619676670E-06

Donner le nombre i d'itérations. i=20
P20(Delta,0)= 9.9999999825E-01
P20(Delta,1)= 1.6995043337E-09
P20(Delta,2)= 2.6319757381E-11
P20(Delta,3)= 8.7732524604E-12

Donner le nombre i d'itérations. i=50
P50(Delta,0)= 9.9999999998E-01
P50(Delta,1)= 1.1451236747E-25
P50(Delta,2)= 6.8394758730E-28
P50(Delta,3)= 2.2798252910E-28
```

Q3 Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, N-1) = (1-a_{N-1})\,P_n(\Delta, N-1)$.

$(P_n(\Delta,N-1))_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $1-a_{N-1} = 1-\beta\Delta(N-1)(N-(N-1)) = \rho$

et de premier terme $P_0(\Delta,N-1)=1$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n(\Delta,r)=\rho^n$.

Q4 a) observons. $v_1 \leq a v_0 + b$

$v_2 \leq a v_1 + bq \leq a^2 v_0 + ab + bq = a^2 v_0 + b(a+q)$

$v_3 \leq a v_2 + bq^2 \leq a^3 v_0 + b(a^2+aq) + bq^2 = a^3 v_0 + b(a^2+aq+q^2)$.

$v_4 \leq a v_3 + bq^3 \leq a^4 v_0 + b(a^3+a^2q+aq^2+q^3)$.

Il semble donc que : $v_n \leq a^n v_0 + b(a^{n-1}+a^{n-2}q+\cdots+aq^{n-2}+q^{n-1})$

Ou encore : $v_n \leq a^n v_0 + b\dfrac{q^n-a^n}{q-a} = a^n v_0 + \dfrac{b}{q-a}(q^n-a^n)$.

Posons alors $A = \max\left(v_0, \dfrac{b}{q-a}\right)$.

Alors $v_n \leq a^n A + A(q^n - a^n) = Aq^n$ car $q^n-a^n\geq 0$ ... confirmons par récurrence !

Posons $A = \max\left(v_0, \frac{b}{q-a}\right)$ et montrons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n \le A q^n$.

→ C'est clair pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$v_{n+1} \le a v_n + b q^n \le aAq^n + bq^n = (aA+b)q^n \underset{\uparrow}{\le} (aA + A(q-a))q^n = Aq^{n+1}$.

Ceci achève la récurrence. $q^n\ge 0$ et $A \ge \frac{b}{q-a}$ donc $b \le A(q-a)$.

$\exists A\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_n\le Aq^n$.

b) $\forall n \in\mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + bq^n$; $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{u_n}{a^n} + \frac{b}{q}\left(\frac{q}{a}\right)^n$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k}\right) = \frac{b}{a}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{a}\right)^k \underset{\frac{q}{a}\neq 1}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{b}{a}\,\frac{1-\left(\frac{q}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{a}\right)}$

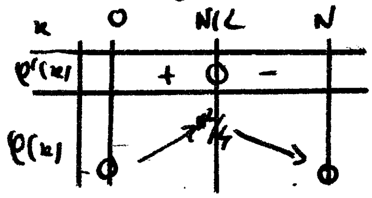
Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{a^n} - \frac{u_0}{a^0} = \frac{b}{a}\,\frac{1-\left(\frac{q}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{a}\right)}$. Notons que ceci vaut encore pour $n=0$.

On a alors $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_n}{a^n} = \frac{b}{a-q}\left(1-\left(\frac{q}{a}\right)^n\right) + u_0$; $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{b}{a-q}(a^n - q^n) + u_0 a^n$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{b}{a-q}(a^n-q^n)+u_0a^n$. Remarque : si $q=a\neq 0$ on obtient :
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = nbq^{n-1} + u_0 q^n$.

c) Posons $\forall x\in[0,N],\ \varphi(x) = x(N-x)$. φ est dérivable sur $[0,N]$ et $\forall x\in[0,N],\ \varphi'(x) = N-2x$.

$\forall x\in[0,\frac{N}{2}],\ \varphi'(x)\ge 0$ et $\forall x\in[\frac{N}{2}, N],\ \varphi'(x)\le 0$.



$\varphi(N/2) = \frac{N^2}{4}$.

Q5 $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, N-2) = (1-a_{N-2})\,P_n(\Delta,N-2) + a_{N-1}\,P_n(\Delta,N-1)$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta,N-2) = (1-a_{N-2})\,P_n(\Delta,N-2) + a_{N-1}\,\rho^n$.

Pour utiliser b) prouvons que : $1-a_{N-2}\neq 0$ et que : $1-a_{N-2}\neq \rho$

Notons que $a_{N-2} = \beta\Delta\, p(N-2) \leq \beta\Delta \frac{N^2}{4} < 1$ car $0 < \Delta < \frac{4}{\beta N^2}$).

Ainsi $1 - a_{N-2} \neq 0$.

$\rho - (1 - a_{N-2}) = 1 - \beta\Delta(N-1) - 1 + \beta\Delta\, 2(N-2) = \beta\Delta(2N - 4 - N + 1) = \beta\Delta(N-3) \neq 0$.

Donc $1 - a_{N-2} \neq \rho$. Ainsi en appliquant b) (avec $a = 1 - a_{N-2}$, $q = \rho$ et $b = a_{N-1}$) on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, N-2) = \frac{a_{N-1}}{1 - a_{N-2} - \rho}\left((1 - a_{N-2})^n - \rho^n\right) + \underbrace{P_0(\Delta, N-2)}_{=0}(1 - a_{N-2})^n.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, N-2) = \dfrac{\beta\Delta(N-1)}{-\beta\Delta(N-3)}\left((1 - 2\beta\Delta(N-2))^n - \rho^n\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, N-2) = \frac{N-1}{N-3}\left[(1 - \beta\Delta(N-1))^n - (1 - 2\beta\Delta(N-2))^n\right]$$

Q6 Montrons à l'aide d'une récurrence descendante que :

$$\forall r \in [\![2, N-1]\!],\ \exists A_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) \leq A_r \rho^n.$$

- Pour $r = N-1$ remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) = P_n(\Delta, N-1) = \rho^n = 1 \times \rho^n \leq 1 \times \rho^n$
  En posant $A_{N-1} = 1$ on a bien $A_{N-1} \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, N-1) \leq A_{N-1}\rho^n$.
  La propriété est vraie pour $r = N-1$.
- Supposons la propriété vraie pour $r \in [\![3, N-1]\!]$ et montrons la pour $r-1$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, r-1) = P_n(\Delta, r-1)(1 - a_{r-1}) + P_n(\Delta, r)\, a_r$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, r-1) \leq (1 - a_{r-1}) P_n(\Delta, r-1) + a_r A_r \rho^n$ d'après l'hypothèse de récurrence ($a_r \geq 0$ ...). Appliquons alors Q4 a) en posant

$a = 1 - a_{r-1}$, $b = a_r A_r$ et $q = \rho$.

D'abord $a_{r-1} = \beta\Delta\, p(r-1) \leq \beta\Delta \frac{N^2}{4} < 1$; $1 - a_{r-1} > 0$; $a > 0$.

$q - a = \rho - 1 + a_{r-1} = 1 - \beta\Delta(N-1) - 1 + \beta\Delta(r-1)(N-(r-1)) = \beta\Delta\left[-(r-1)^2 + N(r-1) - (N-1)\right]$

$q - a = \beta\Delta\left[-\left(r - 1 - \frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N^2}{4} - N + 1\right] = \beta\Delta\left[\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \left(r - 1 - \frac{N}{2}\right)^2\right] = \beta\Delta\left(\frac{N-2}{2} + r - 1 - \frac{N}{2}\right)\left(\frac{N-2}{2} - r + 1 + \frac{N}{2}\right)$

$q - a = \beta\Delta(r-2)(N-r) > 0 \quad (r \in [\![3, N-1]\!])$

On peut donc appliquer Q 4 a) ; il existe $A_{r-1} \in \mathbb{R}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r-1) \leq A_{r-1}\,\rho^n$.

$A_{r-1} = A_{r-1}\,\rho^0 \geq P_0(\Delta, r-1) \geq 0$.

Ainsi $\exists A_{r-1} \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r-1) \leq A_{r-1}\,\rho^n$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall r \in [\![2, N-1]\!],\ \exists A_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) \leq A_r\,\rho^n$.

Q7 a) $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, 0) = P_n(\Delta, 0)(1 - \beta \times 0 \times (N-0)) + P_n(\Delta, 1)\,\beta\Delta\,1\,(N-1)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, 0) - P_n(\Delta, 0) = P_n(\Delta, 1)\beta\Delta(N-1) \geq 0$.

$(P_n(\Delta, 0))_{n\geq 0}$ est donc croissante et majorée par 1.

$(P_n(\Delta, 0))_{n \geq 0}$ converge.

D'après qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, 1) = \dfrac{P_{n+1}(\Delta, 0) - P_n(\Delta, 0)}{\beta\Delta(N-1)}$.

On $\lim\limits_{n \to +\infty} (P_{n+1}(\Delta, 0) - P_n(\Delta, 0)) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, 1) = 0$.

Soit $r \in [\![2, N-1]\!]$, $\exists A_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) \leq A_r\,\rho^n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq P_n(\Delta, r) \leq A_r\,\rho^n$.

$\rho = 1 - \beta\Delta(N-1)$. $\quad 0 < \beta\Delta(N-1) < \frac{4}{N^2}(N-1) = 1 - \left(1 - \frac{4N-4}{N^2}\right) = 1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 < 1$

donc $0 < 1 - \rho < 1$; $0 < \rho < 1$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} A_r\,\rho^n = 0$ et il vient alors par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, r) = 0$.

$\forall r \in [\![2, N-1]\!],\ \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, r) = 0$

Finalement $\forall r \in [\![1, N-1]\!],\ \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, r) = 0$

$\sum\limits_{r=0}^{N-1} P_n(\Delta, r) = 1$ donc $P_n(\Delta, 0) = 1 - \sum\limits_{r=1}^{N-1} P_n(\Delta, r)$; ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, 0) = 1$.

Q8 $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n(\Delta,N-1)=\rho^n=(1-\beta\Delta(N-1))^n$.

Donc $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad P_{[t/\Delta]}(\Delta,N-1)=(1-\beta\Delta(N-1))^{[t/\Delta]}=e^{[t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))}$.

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. $\quad [t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))\underset{\Delta\to 0}{\sim}[t/\Delta](-\beta\Delta(N-1))=\Delta[t/\Delta](-\beta(N-1))$.

Rappelons que $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta[t/\Delta]=t$. Ainsi $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left([t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))\right)=-\beta(N-1)t$

Donc pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{\Delta\to 0}P_{[t/\Delta]}(\Delta,N-1)=e^{-\beta(N-1)t}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ P_n(\Delta,N-2)=\frac{N-1}{N-3}\left[(1-\beta\Delta(N-1))^n-(1-2\beta\Delta(N-2))^n\right]=\frac{N-1}{N-3}\left[e^{n\ln(1-\beta\Delta(N-1))}-e^{n\ln(1-2\beta\Delta(N-2))}\right]$

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad P_{[t/\Delta]}(\Delta,N-2)=\frac{N-1}{N-3}\left[e^{[t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))}-e^{[t/\Delta]\ln(1-2\beta\Delta(N-2))}\right]$

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$

Nous avons vu que $\lim\limits_{\Delta\to 0}e^{[t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))}=e^{-\beta(N-1)t}$; on montre de la même manière que : $\lim\limits_{\Delta\to 0}e^{[t/\Delta]\ln(1-2\beta\Delta(N-2))}=e^{-2\beta(N-2)t}$.

Finalement pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{\Delta\to 0}P_{[t/\Delta]}(\Delta,N-2)=\frac{N-1}{N-3}\left[e^{-\beta(N-1)t}-e^{-2\beta(N-2)t}\right]$

D Etude du cas continu

(Q1) $u : t \mapsto e^{at} f(t)$ est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I.

$\forall t \in I,\ u'(t) = a e^{at} f(t) + e^{at} f'(t) = e^{at}[a f(t) + f'(t)] = e^{at} b e^{-qt} = b e^{(a-q)t}$

Ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ u(t) = \dfrac{b}{a-q} e^{(a-q)t} + \lambda$.

Donc $\forall t \in I,\ e^{at} f(t) = \dfrac{b}{a-q} e^{at} e^{-qt} + \lambda$; $\forall t \in I,\ f(t) = \dfrac{b}{a-q} e^{-qt} + \lambda e^{-at}$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ f(t) = \lambda e^{-at} + \dfrac{b}{a-q} e^{-qt}$.

(Q2) $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F'_{N-1}(t) = \beta((N-1)+1)(N-1-(N-1)) F_N(t) - \beta(N-1)(N-(N-1)) F_{N-1}(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F'_{N-1}(t) = -\beta(N-1) F_{N-1}(t)$.

Nous pouvons alors appliquer Q1 avec $I = \mathbb{R}^+$, $a = \beta(N-1)$, $b = 0$ et $q \in \mathbb{R} - \{a\}$!

On obtient alors l'existence d'une constante λ_{N-1} telle que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-1}(t) = \lambda_{N-1} e^{-\beta(N-1)t}$. Or $F_{N-1}(0) = 1$ donc $\lambda_{N-1} = 1$.

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-1}(t) = e^{-\beta(N-1)t}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F'_{N-2}(t) = \beta(N-1)(N-1-(N-2)) F_{N-1}(t) - \beta(N-2)(N-(N-2)) F_{N-2}(t) = \beta(N-1) e^{-\beta(N-1)t} - 2\beta(N-2) F_{N-2}(t)$

Nous pouvons alors appliquer Q1 à F_{N-2} avec $I = \mathbb{R}^+$, $a = 2\beta(N-2)$, $b = \beta(N-1)$ et $q = \beta(N-1)$

car $a \neq q$ ($a = q \Rightarrow 2\beta(N-2) = \beta(N-1) \Rightarrow N = 3$!).

On obtient alors l'existence de λ_{N-2} élément de $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-2}(t) = \lambda_{N-2} e^{-2\beta(N-2)t} + \dfrac{\beta(N-1)}{2\beta(N-2) - \beta(N-1)} e^{-\beta(N-1)t}$.

Or $F_{N-2}(0) = 0$ donc $\lambda_{N-2} = -\dfrac{\beta(N-1)}{\beta(2N-4-N+1)} = -\dfrac{\beta(N-1)}{\beta(N-3)} = -\dfrac{N-1}{N-3}$

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-2}(t) = \dfrac{N-1}{N-3}\left(e^{-\beta(N-1)t} - e^{-2\beta(N-2)t}\right)$.