Q1 $K=[0,1[\,\cup\,[3,4[$, $a=0$ et $M=10$. Ainsi $u_0=0$ et $v_0=10$.

$\frac{u_0+v_0}{2}=5$ majore K donc $u_1=u_0=0$ et $v_1=\frac{u_0+v_0}{2}=5$. $u_1=0$ et $v_1=5$.

$\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{5}{2}$ ne majore pas K donc $u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{5}{2}$ et $v_2=v_1=5$. $u_2=\frac{5}{2}$ et $v_2=5$.

$\frac{u_2+v_2}{2}=\frac{5/2+5}{2}=\frac{15}{4}$ ne majore pas K donc $u_3=\frac{u_2+v_2}{2}=\frac{15}{4}$ et $v_3=v_2=5$. $u_3=\frac{15}{4}$ et $v_3=5$.

$\frac{u_3+v_3}{2}=\frac{15/4+5}{2}=\frac{35}{8}$ majore K donc $u_4=u_3=\frac{15}{4}$ et $v_4=\frac{u_3+v_3}{2}=\frac{35}{8}$. $u_4=\frac{15}{4}$ et $v_4=\frac{35}{8}$.

Et pour le même prix : $u_5=\frac{15}{4}$, $v_5=\frac{65}{16}$; $u_6=\frac{125}{32}$, $v_6=\frac{65}{16}$; $u_7=\frac{255}{64}$, $v_7=\frac{65}{16}$;

$u_8=\frac{255}{64}$, $v_8=\frac{515}{128}$; $u_9=\frac{255}{64}$, $v_9=\frac{1025}{256}$; $u_{10}=\frac{2045}{512}$, $v_{10}=\frac{1025}{256}$; ...

Notons que $u_{10}\simeq 3{,}994$ et $v_{10}\simeq 4{,}004$ ... $u_{20}\simeq 3{,}99996$ et $v_{20}\simeq 4{,}000006$

Q2 a) et b) Soit $n\in\mathbb{N}$.

- Supposons que $\frac{u_n+v_n}{2}$ ne majore pas K. Alors $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=v_n$.

Ainsi $u_{n+1}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}$, $v_{n+1}-v_n=0$ et $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n-v_n}{2}$.

- Supposons que $\frac{u_n+v_n}{2}$ majore K. Alors $u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$.

Ainsi $u_{n+1}-u_n=0$, $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}$ et $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n-v_n}{2}$.

Dans tous les cas : $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n-v_n}{2}$. De plus $u_{n+1}-u_n\in\left\{0,\frac{v_n-u_n}{2}\right\}$ et $v_{n+1}-v_n\in\left\{0,\frac{u_n-v_n}{2}\right\}$.

$(u_n-v_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0-v_0=a-M$. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-v_n=\frac{a-M}{2^n}$.

$a \in K$ et M majore K donc $a - M \leq 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \in \{0, \frac{v_n - u_n}{2}\} \subset [0, +\infty[$; $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \in \{0, \frac{u_n - v_n}{2}\} \subset]-\infty, 0]$; $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \leq 0$.

$(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{a - M}{2^n} = 0$; $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Ainsi $((u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0})$ est un couple de suites adjacentes.

Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites convergentes qui ont la même limite b.

c) et d) Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\exists x_n \in K$, $u_n \leq x_n$ et v_n majore K.

-> C'est vrai pour $n = 0$ (il suffit de poser $x_0 = u_0 = a$).

-> Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

* 1er cas.. $\frac{u_n + v_n}{2}$ ne majore pas K. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ n'est pas un majorant de K ; $\exists x_{n+1} \in K$, $u_{n+1} < x_{n+1}$; $u_{n+1} \leq x_{n+1}$!
De plus $v_{n+1} = v_n$ majore K d'après l'hypothèse de récurrence.

* 2ème cas.. $\frac{u_n + v_n}{2}$ majore K. Alors $u_{n+1} = u_n$. $\exists x_n \in K$, $u_n \leq x_n$.
Posons $x_{n+1} = x_n$. $x_{n+1} \in K$ et $u_{n+1} \leq x_{n+1}$. De plus $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ est un majorant de K.

Ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, v_n est un majorant de K.

Soit k un élément de K. $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \leq v_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $k \leq b$.
$\forall k \in K$, $k \leq b$. <u>b majore K.</u>

Nous avons vu que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in K$, $u_n \leq x_n$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq x_n \leq v_n$ (v_n majore K). Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = b$, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers b.
<u>Il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b.</u>

<u>e)</u> Soit b' un majorant de K. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq b'$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $b \leq b'$.
<u>Si b' est un majorant de K, $b' \geq b$.</u>

<u>Remarque</u>.. b est le plus petit majorant de K. $b = \operatorname{Sup} K$ (b est la borne supérieure de K)
Soient $\hat{a}$ un élément de K et $\hat{n}$ un majorant de K.
Considérons les suites $(\hat{u}_n)_{n \geq 0}$ et $(\hat{v}_n)_{n \geq 0}$ définies par :
$$\hat{u}_0 = \hat{a},\ \hat{v}_0 = \hat{n} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ (\hat{u}_{n+1}, \hat{v}_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{\hat{u}_n + \hat{v}_n}{2}, \hat{v}_n\right) & \text{si } \frac{\hat{u}_n + \hat{v}_n}{2} \text{ ne majore pas } K. \\ \left(\hat{u}_n, \frac{\hat{u}_n + \hat{v}_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$
Alors ces deux suites ont même limite $\hat{b}$.
$\hat{b}$ majore K et si $\hat{b}'$ est un majorant de K alors $\hat{b}' \geq \hat{b}$
Ainsi $\hat{b} \geq b$ car $\hat{b}$ majore K et $b \geq \hat{b}$ car b majore K. $b = \hat{b}$.

<u>b est indépendant de l'élément a de K et du majorant n de K choisis.</u>

PARTIE II Etude d'un exemple

(Q1) a) $\varphi : (x,y) \to ax + by + c$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+$. $\varphi(x_0, y_0) > 0$.
φ étant continue en (x_0, y_0) :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow |\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$. $\varepsilon > 0$.

$\exists \eta \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta \Rightarrow |\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta$.

$|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| < \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$; $-\frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0) < \varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0) < \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$.

En particulier : $\varphi(x,y) > -\frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)+\varphi(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0) > 0$; $(x,y)\in\mathcal{R}_+$.

Alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta \Rightarrow (x,y)\in\mathcal{R}_+$

donc la boule ouverte de centre (x_0,y_0) et de rayon η est contenue dans $\mathcal{R}_+$.

Ainsi pour tout élément (x_0,y_0) de $\mathcal{R}_+$ il existe une boule ouverte de centre (x_0,y_0) contenue dans $\mathcal{R}_+$. <u>$\mathcal{R}_+$ est un ouvert.</u>

<u>Remarques</u> 1.. En changeant a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$ on obtient que $\mathcal{R}_-$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

2.. $\mathcal{R}_+ = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$ ... et $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

3.. Plus généralement si φ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ par φ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$.

<u>b)</u> Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathcal{R}_+$ et λ un élément de $[0,1]$.

$a(\lambda x+(1-\lambda)x')+b(\lambda y+(1-\lambda)y')+c = \lambda(ax+by+c)+(1-\lambda)(ax'+by'+c)$

Si $\lambda>0$: $\lambda(ax+by+c)>0$ et $(1-\lambda)(ax'+by'+c)\geqslant 0$ ($(x,y)\in\mathcal{R}_+$, $(x',y')\in\mathcal{R}_+$ et $1-\lambda\geqslant 0$) donc $\lambda(ax+by+c)+(1-\lambda)(ax'+by'+c)>0$

Si $\lambda=0$ $\lambda(ax+by+c)+(1-\lambda)(ax'+by'+c) = ax'+by'+c>0$.

Dans les deux cas $a(\lambda x+(1-\lambda)x')+b(\lambda y+(1-\lambda)y')+c>0$.

Ainsi $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y')\in\mathcal{R}_+$

<u>$\forall (x,y)\in\mathcal{R}_+$, $\forall (x',y')\in\mathcal{R}_+$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y')\in\mathcal{R}_+$.</u>

Remarque. $\forall (x,y) \in \mathcal{R}_+$, $\forall (x',y') \in \mathcal{R}_+$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y') \in \mathcal{R}_+$;
$\mathcal{R}_+$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

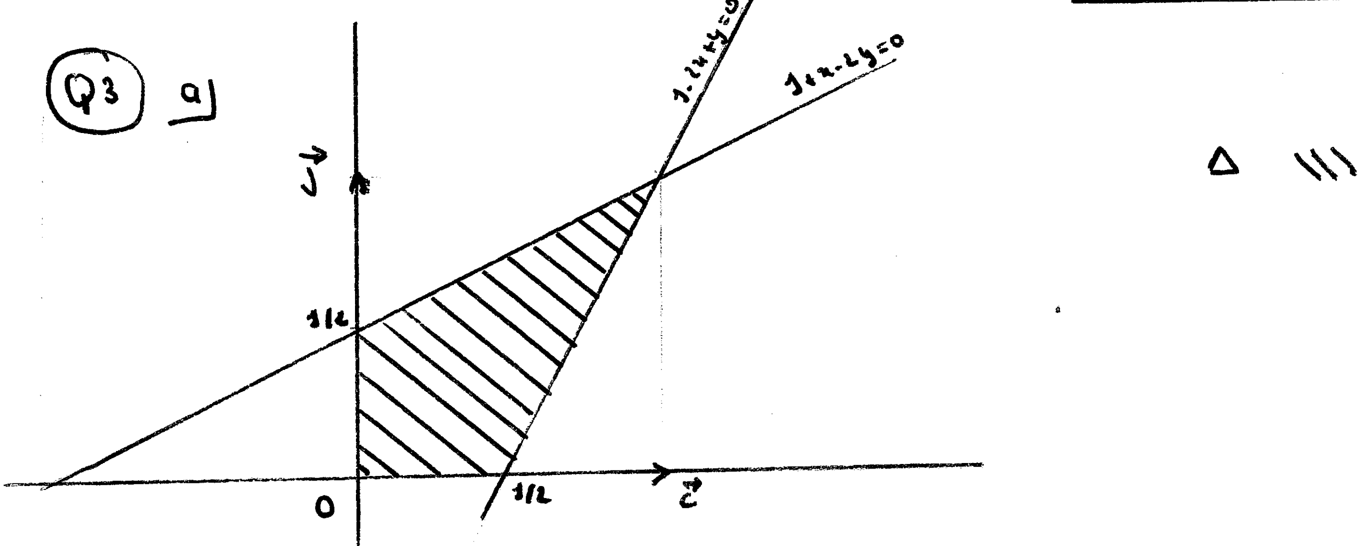
c) Posons $\forall \lambda \in [0,1]$, $\hat{\varphi}(\lambda) = a(\lambda x + (1-\lambda)x') + b(\lambda y + (1-\lambda) y') + c$.
$\hat{\varphi}$ est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et, $\hat{\varphi}(0) = ax'+by'+c < 0$ et $\hat{\varphi}(1) = ax+by+c > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors qu'il existe un élément λ de $[0,1]$ (et même de $]0,1[$) tel que $\hat{\varphi}(\lambda) = 0$.
Alors $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda) y') \in \mathcal{D}$.
$\forall (x,y) \in \mathcal{R}_+$, $\forall (x',y') \in \mathcal{R}_-$, $\exists \lambda \in [0,1]$, $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y') \in \mathcal{D}$.

Q2 Dans cette question si $c \in \mathbb{R}^2$ et si $r \in \mathbb{R}^*_+$ nous noterons $B(c,r)$ la boule ouverte de centre c et de rayon r. $B(c,r) = \{\hat{c} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\hat{c} - c\| < r\}$.

a) Soit $c \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$.
Soit $i \in [\![1,k]\!]$. A_i est ouvert et $c \in A_i$ donc $\exists r_i \in \mathbb{R}^*_+$, $B(c,r_i) \subset A_i$.
Posons $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_k)$. $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $B(c,r) \subset B(c,r_i) \subset A_i$.
Ainsi $B(c,r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$.
$\forall c \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$, $\exists r \in \mathbb{R}^*_+$, $B(c,r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$. $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ est un ouvert.

b) Soit $c \in A_1 \cup \dots \cup A_k$. $\exists i \in [\![1,k]\!]$, $c \in A_i$.
A_i est ouvert donc $\exists r \in \mathbb{R}^*_+$, $B(c,r) \subset A_i \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$.
$\forall c \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, $\exists r \in \mathbb{R}^*_+$, $B(c,r) \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ est un ouvert.

Q3 a)



b) Posons $A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\}$, $A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<0\}$, $A_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-2x+y<0\}$ et $A_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1+x-2y<0\}$. $\Delta = \overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4} = \overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

A_1, A_2, A_3 et A_4 sont quatre ouverts de $\mathbb{R}^2$ d'après $\varphi 1$.

$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ est alors un ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'après $\varphi 2$.

Donc $\Delta = \overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y)\in\Delta$. $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $1-2x+y\geqslant 0$ et $1+x-2y\geqslant 0$.

$0\leq 2(1-2x+y)+1+x-2y = 3-3x$; $3x\leq 3$; $x\leq 1$;

$0\leq 1-2x+y+2(1+x-2y) = 3-3y$; $3y\leq 3$; $y\leq 1$.

Alors $0\leq x\leq 1$ et $0\leq y\leq 1$; $x^2+y^2\leq 2$; $\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{2}$ $\|(x,y)\|\leq\sqrt{2}$.

$\forall (x,y)\in\Delta$, $\|(x,y)\|\leq\sqrt{2}$. Δ est borné

<u>Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.</u>

c) g est continue sur Δ (fonction polynômiale) et Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Le cours montre que <u>g possède un maximum sur Δ.</u>

d) Notons que Δ' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme intersection des quatre ouverts de $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-2x+y>0\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1+x-2y>0\}$ ($\varphi 1+\varphi 2$).

Notons également que g est de classe C^1 sur Δ' (fonction polynômiale).

Supposons que le maximum de g soit atteint en un point $C=(\alpha,\beta)$ de Δ'.

Alors 1) Δ' est ouvert ;

2) g est de classe C^1 sur Δ' ;

3) g atteint en C un maximum local.

$\frac{\partial g}{\partial x}(C) = \frac{\partial g}{\partial y}(C) = 0$. Or $\frac{\partial g}{\partial x}(C) = \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha,\beta) = 3$!

Ainsi <u>le maximum de g n'est pas atteint en un point de Δ'.</u>

e) On a donc $\max\limits_{(x,y)\in\Delta} g(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\Delta\setminus\Delta'} g(x,y)$.

Or $\Delta\setminus\Delta' = \Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4$ où $\Delta_1 = \{(x,y)\in\Delta \mid x=0\}$, $\Delta_2 = \{(x,y)\in\Delta \mid y=0\}$,
$\Delta_3 = \{(x,y)\in\Delta \mid 1-2x+y=0\}$ et $\Delta_4 = \{(x,y)\in\Delta \mid 1+x-2y=0\}$

Etudions alors les restrictions de g à $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4.

- $\Delta_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, y\geq 0, 1+y\geq 0$ et $1-2y\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0$ et $y\in[0,\frac{1}{2}]\}$.

  $\forall (x,y)\in\Delta_1$, $g(x,y) = -y+4$

  Alors $\max\limits_{(x,y)\in\Delta_1} g(x,y) = \max\limits_{y\in[0,\frac{1}{2}]} (-y+4) = 4$.

  Notons que : $\forall (x,y)\in\Delta_1$, $g(x,y)=4 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$.

- $\Delta_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y=0, 1-2x\geq 0, 1+x\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0$ et $x\in[0,\frac{1}{2}]\}$

  $\forall (x,y)\in\Delta_2$, $g(x,y) = 3x+4$.

  Alors $\max\limits_{(x,y)\in\Delta_2} g(x,y) = \max\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} (3x+4) = \frac{11}{2}$.

  De plus : $\forall (x,y)\in\Delta_2$, $g(x,y) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ et $y=0$.

- $\Delta_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, y=2x-1, 1+x-2(2x-1)\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x-1, x\geq 0, x\geq\frac{1}{2}$ et $3-3x\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x-1$ et $x\in[\frac{1}{2},1]\}$.

  $\forall (x,y)\in\Delta_3$, $g(x,y) = 3y-(2x-1)+4 = x+5$.

  $\max\limits_{(x,y)\in\Delta_3} g(x,y) = \max\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]} (x+5) = 6$ et $\forall (x,y)\in\Delta_3$, $g(x,y)=6 \Leftrightarrow x=1$ et $y=2\times 1-1=1$.

- $\Delta_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, 1-2x+y\geq 0, y=\frac{x+1}{2}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, x+1\geq 0, 1-2x+\frac{x+1}{2}\geq 0, y=\frac{x+1}{2}\}$

  $\Delta_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, 3-3x\geq 0, y=\frac{x+1}{2}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1]$ et $y=\frac{x+1}{2}\}$.

  $\forall (x,y)\in\Delta_4$, $g(x,y) = 3x - \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{1}{2}(5x+7)$

  $\max\limits_{(x,y)\in\Delta_4} g(x,y) = \max\limits_{x\in[0,1]} \frac{1}{2}(5x+7) = 6$ et $\forall (x,y)\in\Delta_4$, $g(x,y)=6 \Leftrightarrow x=1$ et $y=1$.

Ce qui précède montre alors que :

$\rightarrow \max\limits_{(x,y)\in\Delta} g(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\Delta\setminus\Delta'} g(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4} g(x,y)$

$\rightarrow \max\limits_{(x,y)\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4} g(x,y) = \max(4, \frac{11}{2}, 6, 6) = 6$

$\rightarrow \forall (x,y)\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4,\ g(x,y)=6 \Leftrightarrow x=y=1.$

Ainsi le maximum de g sur Δ est 6 et il est atteint uniquement en $(1,1)$.

Q4 a) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$!

$X\in\mathcal{C} \Leftrightarrow x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0 \quad \begin{pmatrix}2&-1&1&0\\-1&2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0\\ 2x_1-x_2+x_3=1\\ -x_1+2x_2+x_4=1\end{cases}$

$X\in\mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases}x_3=1-2x_1+x_2\\ x_4=1+x_1-2x_2\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ 1-2x_1+x_2\geq 0,\ 1+x_1-2x_2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_3=1-2x_1+x_2\\ x_4=1+x_1-2x_2\\ (x_1,x_2)\in\Delta\end{cases}$

$\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4,\quad X\in\mathcal{C}\Leftrightarrow x_3=1-2x_1+x_2,\ x_4=1+x_1-2x_2,\ (x_1,x_2)\in\Delta.$

b) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathcal{C}.$

$f(X)=\langle X,W\rangle={}^tXW=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}=2x_1+4x_2+x_3+3x_4 \overset{X\in\mathcal{C}}{=} 2x_1+4x_2+1-2x_1+x_2+3(1+x_1-2x_2)$

$f(X)=3x_1-x_2+4=g(x_1,x_2).$

$\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathcal{C},\ f(X)=g(x_1,x_2).$

Ainsi $\max\limits_{X\in\mathcal{C}} f(X)=\max\limits_{(x_1,x_2)\in\Delta} g(x_1,x_2)=6$. De plus, soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathcal{C}.$

$f(X)=6 \Leftrightarrow g(x_1,x_2)=6 \Leftrightarrow x_1=x_2=1 \overset{X\in\mathcal{C}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x_1=1\\x_2=1\\x_3=1-2+1=0\\x_4=1+1-2=0\end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$

Le maximum de f sur $\mathcal{C}$ est 6 et il est atteint uniquement en $X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

PARTIE III Sommets et maximum

(Q1) <u>Remarque</u>.. Il est aisé de voir que $\mathcal{C}$ est convexe c'est à dire que :

$$\forall X \in \mathcal{C}, \forall X' \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in [0,1], \lambda X + (1-\lambda) X' \in \mathcal{C}.$$

Supposons que $0_{\mathbb{R}^p} \in \mathcal{C}$.

Soient $(Z', Z'') \in \mathcal{C}^2$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que : $0_{\mathbb{R}^p} = \lambda Z' + (1-\lambda) Z''$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda Z'_i + (1-\lambda) Z''_i = 0$. Or $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Z'_i \geq 0$, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Z''_i \geq 0$, $\lambda > 0$ et $1-\lambda > 0$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda Z'_i = (1-\lambda) Z''_i = 0$.

Comme λ et $1-\lambda$ ne sont pas nuls : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Z'_i = Z''_i = 0$; $Z' = Z''$.

$\forall (Z', Z'') \in \mathcal{C}^2$, $\forall \lambda \in]0,1[$, $(0_{\mathbb{R}^p} = \lambda Z' + (1-\lambda) Z'') \Rightarrow (Z' = Z'')$; $0_{\mathbb{R}^p}$ est un sommet de $\mathcal{C}$.

<u>Si $0_{\mathbb{R}^p}$ est un élément de $\mathcal{C}$, $0_{\mathbb{R}^p}$ est un sommet de $\mathcal{C}$.</u>

(Q2) a) $m_0 = f(U) = \langle U, W \rangle = \langle \lambda U' + (1-\lambda) U'', W \rangle = \lambda \langle U', W \rangle + (1-\lambda) \langle U'', W \rangle$

Donc $m_0 = f(U) = \lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'')$. Notons aussi que $f(U') \leq m_0$ et $f(U'') \leq m_0$.

Supposons $f(U') \neq m_0$. Alors $f(U') < m_0$; $\lambda f(U') < \lambda m_0$ car $\lambda > 0$.

$$\lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'') < \lambda m_0 + (1-\lambda) f(U'') \underset{1-\lambda \geq 0}{\leq} \lambda m_0 + (1-\lambda) m_0 = m_0.$$

Ainsi $m_0 = \lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'') < m_0$!!

Par conséquent $f(U') = m_0 = f(U)$. Alors $m_0 = \lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'') = \lambda m_0 + (1-\lambda) f(U'')$.

Donc $(1-\lambda) f(U'') = m_0 - \lambda m_0 = (1-\lambda) m_0$; comme $1-\lambda$ n'est pas nul : $f(U'') = m_0 = f(U)$.

Ainsi <u>$f(U') = f(U'') = f(U)$</u>. $0 = f(U'') - f(U') = \langle U'', W \rangle - \langle U', W \rangle = \langle U'' - U', W \rangle = \langle V, W \rangle$; ainsi <u>$V = U'' - U'$ est orthogonal à W.</u>

b) • Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Supposons que $i \in \Delta(U')$.

Alors $U'_i \neq 0$; $U_i = \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i > 0$; $U_i \neq 0$; $i \in \Delta(U)$.

$\lambda > 0$, $U'_i \geq 0$ et $U'_i \neq 0$

$1-\lambda > 0$, $U''_i \geq 0$

Ainsi <u>$\Delta(U') \subset \Delta(U)$</u>. De même <u>$\Delta(U'') \subset \Delta(U)$</u>.

v1 Soit $i \in \Delta(V)$. $V_i = U''_i - U'_i \neq 0$

$U_i = \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i = U''_i - \lambda(U''_i - U'_i) = U''_i - \lambda V_i$

Supposons $U_i = 0$; $U''_i = \lambda V_i$ or $\lambda \neq 0$ et $V_i \neq 0$ donc $U''_i \neq 0$; ainsi $i \in \Delta(U'')$.

Mais alors $i \in \Delta(U)$ et donc $U_i \neq 0$!!

Par conséquent si $i \in \Delta(V)$, $U_i \neq 0$. $\underline{\underline{\Delta(V) \subset \Delta(U)}}$.

v2 Soit $i \in [\![1,p]\!]$. $U_i = 0 \Rightarrow \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i = 0 \underset{\substack{\lambda > 0,\ U'_i \geqslant 0 \\ 1-\lambda > 0,\ U''_i \geqslant 0}}{\Rightarrow} U'_i = U''_i = 0 \Rightarrow V_i = 0$; $U_i = 0 \Rightarrow V_i = 0$

Ainsi $V_i \neq 0 \Rightarrow U_i \neq 0$!

- Soit μ un réel. $AU = AU' = AU'' = B$ car U, U' et U'' sont des éléments de $\mathcal{C}$.
  $A(U + \mu V) = AU + \mu AV = B + \mu(A(U'' - U')) = B + \mu AU' - \mu AU'' = B + \mu B - \mu B = B$.
  $\underline{\underline{A(U + \mu V) = B}}$.

- Soit $i \in \Delta(U + \mu V)$. $U_i + \mu V_i \neq 0$.

  Supposons que : $U_i = 0$. Alors $0 = U_i = \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i$.

  Comme : $\lambda > 0$, $U'_i \geqslant 0$, $1-\lambda > 0$, $U''_i \geqslant 0$ on obtient $\lambda U'_i = (1-\lambda) U''_i = 0$, puis $U'_i = U''_i = 0$

  Alors $U_i + \mu V_i = \mu V_i = \mu(U''_i - U'_i) = 0$! Ainsi U_i n'est pas nul et $i \in \Delta(U)$.

  $\underline{\underline{\Delta(U + \mu V) \subset \Delta(U)}}$.

c) $AV = A(U'' - U') = AU'' - AU' = B - B = 0$. $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} V_j = 0$.

ceci s'écrit encore : $V_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + V_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + V_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}$; ou encore :

$V_1 C^1 + V_2 C^2 + \cdots + V_p C^p = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\sum_{i=1}^{p} V_i C^i = 0_{\mathbb{R}^n}$; $\sum_{i \in \Delta(U)} V_i C^i = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $i \notin \Delta(U) \overset{\Delta(V) \subset \Delta(U)}{\Rightarrow} i \notin \Delta(V) \Rightarrow V_i = 0$.

Or $\exists i_0 \in [\![1,p]\!]$, $V_{i_0} \neq 0$; $i_0 \in \Delta(V)$ donc $i_0 \in \Delta(U)$.

. Finalement : $\sum_{i\in D(U)} v_i C^i = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\exists i_0 \in D(U)$, $v_{i_0} \neq 0$.

Alors la famille $(C^i)_{i\in D(U)}$ est liée.

d) • - $U = U + 0V \in K$ donc K n'est pas vide.

- Par hypothèse il existe $i_1 \in [\![1,p]\!]$, $V_{i_1} < 0$. Soit $\rho \in K$. $U + \rho V \in \mathcal{E}$ donc,
en particulier $U_{i_1} + \rho V_{i_1} \geq 0$; $\rho V_{i_1} \geq -U_{i_1}$; $\rho \leq -\frac{U_{i_1}}{V_{i_1}}$ $(V_{i_1} < 0)$
Ainsi $\forall \rho \in K$, $\rho \leq -\frac{U_{i_1}}{V_{i_1}}$; K est est majorée.

K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

• D'après I Q 2 d) il existe une suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de K qui converge vers d.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U + \rho_n V \in \mathcal{E}$; $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_i + \rho_n V_i \geq 0$
En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $U_i + \alpha_K V_i \geq 0$; $U + \alpha_K V \geq 0$.
De plus : $A(U + \alpha_K V) = B$ (b)). Ainsi $U + \alpha_K V \geq 0$ et $A(U + \alpha_K V) = D$.
Par conséquent : $U + \alpha_K V \in \mathcal{E}$

Remarque.. $\alpha_K \in K$ ... et $\alpha_K = \operatorname{Sup} K$ donc α_K est le plus grand élément de K.

• $f(U + \alpha_K V) = \langle U + \alpha_K V, W \rangle = \langle U, W \rangle + \alpha_K \underbrace{\langle V, W \rangle}_{=0} = \langle U, W \rangle = f(U) = m_0$.

$f(U + \alpha_K V) = m_0$.

e) Supposons donc que : $\forall i \in D(U)$, $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i \neq 0$.
Soit $i \in D(U)$. $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i \neq 0$; mieux $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i > 0$ car $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i$ est non nul et positif $(U + \alpha_K V \in \mathcal{E})$.

$\lim_{\rho \to 0} (U_i + (\alpha_K + \rho) V_i) = U_i + \alpha_K V_i = \gamma_i > 0$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \delta_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < \delta_i \Rightarrow |U_i + (\alpha_K + \rho) V_i - \gamma_i| < \varepsilon$

Posons $\varepsilon = \gamma_i / 2$; $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < \delta_i \Rightarrow |U_i + (\alpha_K + \rho) V_i - \gamma_i| < \varepsilon = \frac{\gamma_i}{2}$.

$\forall \rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < \delta_i \Rightarrow -\frac{\gamma_i}{2} < U_i + (\alpha_K + \rho) V_i - \gamma_i < \frac{\gamma_i}{2} \Rightarrow U_i + (\alpha_K + \rho) V_i > \gamma_i - \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\gamma_i}{2} > 0$

$\forall \rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < \delta_i \Rightarrow U_i + (\alpha_K + \rho) V_i > 0$.

Posons $\eta = \inf_{i \in \Delta(U)} \left(\frac{\delta_i}{2}\right)$. $\forall i \in \Delta(U)$, $0 < \eta < \delta_i$; $\forall i \in \Delta(U)$, $U_i + (\alpha_K + \eta) V_i > 0$.

Rappelons que $\Delta(U + (\alpha_K + \eta) V) \subset \Delta(U)$; ainsi si $i \in [\![1,p]\!] - \{\Delta(U)\}$, $U_i + (\alpha_K + \eta) V_i = 0$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $U_i + (\alpha_K + \eta) V_i \geq 0$; $U + (\alpha_K + \eta) V \geq 0$.

De plus $A(U + (\alpha_K + \eta) V) = B$ (b)) donc $U + (\alpha_K + \eta) V \in \mathcal{C}$.

Alors $\alpha_K + \eta \in K$. Ceci est impossible car α_K est le plus grand élément de K et $\alpha_K + \eta > \alpha_K$.

Par conséquent $\exists i_2 \in \Delta(U)$, $U_{i_2} + \alpha_K V_{i_2} = 0$; $i_2 \in \Delta(U)$ et $i_2 \notin \Delta(U + \alpha_K V)$

Or $\Delta(U + \alpha_K V) \subset \Delta(U)$, donc $\Delta(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $\Delta(U)$.

f) $U^{(1)} \in \mathcal{C}$, $f(U^{(1)}) = M_0$. et $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$

$U^{(1)}$ a donc les mêmes qualités que U. On peut donc trouver $U^{(2)}$ dans $\mathcal{C}$ tel que : $f(U^{(2)}) = M_0$ et $\Delta(U^{(2)}) \subsetneq \Delta(U^{(1)})$

Dans ces conditions on peut construire un élément $U^{(2)}$ de $\mathcal{C}$ tel que : $\begin{cases} f(U^{(2)}) = M_0 \\ \text{et} \\ \Delta(U^{(2)}) \subsetneq \Delta(U^{(1)}) \end{cases}$

g) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe pas de sommet de $\mathcal{C}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$ (▲).

Montrons par récurrence que, pour tout élément k de $\mathbb{N}$, il existe une suite $(U^{(0)}, U^{(1)}, \ldots, U^{(k)})$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que :

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \forall i \in [\![0,k]\!],\ f(U^{(i)}) = M \\ \rightarrow \forall i \in [\![0,k-1]\!],\ \Delta(U^{(i+1)}) \subsetneq \Delta(U^{(i)}) \\ \rightarrow \forall i \in [\![0,k]\!],\ U^{(i)} \text{ n'est pas un sommet de } \mathcal{C} \end{array}\right\} (P_k)$$

→ C'est clair pour $k = 0$; il suffit de prendre $U^{(0)} \in \mathcal{C}$ tel que $f(U^{(0)}) = M_0$; l'hypothèse (▲) montre que $U^{(0)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Il existe une suite $(U^{(0)}, U^{(1)}, \ldots, U^{(k)})$ d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant (P_k).

$U^{(\ell)} \in \mathcal{C}$, $f(U^{(\ell)}) = m_0$ et $U^{(\ell)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$. $U^{(\ell)}$ a les mêmes qualités que U donc il existe un élément $U^{(\ell+1)}$ de $\mathcal{C}$ tel que :

$S(U^{(\ell+1)}) \subsetneq S(U^{(\ell)})$ et $f(U^{(\ell+1)}) = m_0$.

L'hypothèse ▲ indique que $U^{(\ell+1)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$.

Alors $(U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(\ell)}, U^{(\ell+1)})$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant $P_{\ell+1}$.

Ainsi s'achève la récurrence.

On peut donc trouver une suite $(U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(p+1)})$ d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant P_{p+1}.

Posons pour tout $i \in [\![0, p+1]\!]$, $n_i = \mathrm{card}\, S(U^{(i)})$.

$\forall i \in [\![0, p]\!]$, $n_{i+1} < n_i$ car $S(U^{(i+1)}) \subsetneq S(U^{(i)})$

donc $n_{p+1} < n_p < \dots < n_1 < n_0$. Or $\forall i \in [\![0, p+1]\!]$, $n_i \in [\![0, p]\!]$.

Alors $n_0, n_1, \dots, n_{p+1}$ sont $p+2$ éléments de l'ensemble $[\![0, p]\!]$ qui a $p+1$ éléments !

Ainsi l'hypothèse (▲) conduit à une contradiction.

<u>Il existe un sommet de $\mathcal{C}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.</u>

Remarque.. Notons que ce beau résultat suppose que f admette un maximum sur $\mathcal{C}$...

PARTIE IV Existence du maximum de la fonction f

(Q1) $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = {}^t(AX)Y = ({}^tX\,{}^tA)Y = {}^tX({}^tAY) = \langle X, {}^tAY\rangle$.

Posons $A' = {}^tA$. $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A'Y\rangle$.

<u>$\exists A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A'Y\rangle$.</u>

(Q2) <u>a)</u> Soient Y, $\hat{Y}$ deux éléments de E et α un réel.

$$\Theta(\alpha Y + \hat{Y}) = \begin{pmatrix} \langle \alpha Y + \hat{Y}, C^1\rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha Y + \hat{Y}, C^r\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\langle Y, C^1\rangle + \langle \hat{Y}, C^1\rangle \\ \vdots \\ \alpha\langle Y, C^r\rangle + \langle \hat{Y}, C^r\rangle \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \langle Y, C^1\rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \hat{Y}, C^1\rangle \\ \vdots \\ \langle \hat{Y}, C^r\rangle \end{pmatrix} = \alpha\,\Theta(Y) + \Theta(\hat{Y})$$

<u>Θ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^r$.</u>

Soit $Y \in \operatorname{Ke}\theta$. $\begin{pmatrix} \langle Y, c^1\rangle \\ \vdots \\ \langle Y, c^r\rangle \end{pmatrix} = 0$; $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\langle Y, c^i\rangle = 0$; $Y \in (\operatorname{Vect}(c^1,\dots,c^r))^\perp$

Donc $\operatorname{Ke}\theta \subset [\operatorname{Vect}(c^1,\dots,c^r)]^\perp = E^\perp = \{0_E\}$; $\operatorname{Ke}\theta = \{0_E\}$; θ est injective.

θ est une application linéaire injective de E dans $\mathbb{R}^r$ et $\dim E = \dim \mathbb{R}^r = r < +\infty$.

Ainsi <u>θ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^r$.</u>

<u>b]</u> Soit Y un élément de E.

$\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\langle Y, c^i\rangle = w_i \iff \begin{pmatrix} \langle Y, c^1\rangle \\ \vdots \\ \langle Y, c^r\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} \iff \theta(Y) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} \iff Y = \theta^{-1}\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}\right)$.

<u>Ainsi il existe un unique élément Z de E tel que : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\langle Z, c^i\rangle = w_i$; $Z = \theta^{-1}\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}\right)$.</u>

<u>c]</u> Soit $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\langle Z, c^i\rangle = \langle Z, AE_i\rangle = \langle AE_i, Z\rangle = \langle E_i, A'Z\rangle = \langle E_i, \sum_{\ell=1}^{p} (A'Z)_\ell E_\ell\rangle$

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\langle Z, c^i\rangle = \sum_{\ell=1}^{p} (A'Z)_\ell \langle E_i, E_\ell\rangle = (A'Z)_i$

<u>Les coordonnées de $A'Z$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ sont : $(\langle Z, c^1\rangle, \langle Z, c^2\rangle, \dots, \langle Z, c^p\rangle)$.</u>

<u>d]</u> • Soit X un élément de $\mathcal{C}$. $X \geqslant 0$ et $AX = B$.

$\langle Z, B\rangle = \langle Z, AX\rangle = \langle A'Z, X\rangle = \sum_{i=1}^{p} (A'Z)_i X_i = \sum_{i=1}^{p} \langle Z, c^i\rangle X_i$

$\langle Z, B\rangle = \sum_{i=1}^{r} W_i X_i + \sum_{i=r+1}^{p} \langle Z, c^i\rangle X_i = \sum_{i=1}^{p} X_i W_i + \sum_{i=r+1}^{p} (\langle Z, c^i\rangle - W_i) X_i$

$\forall i \in [\![r+1,p]\!]$, $X_i \geqslant 0$ et $\langle Z, c^i\rangle - W_i \geqslant 0$; $\forall i \in [\![r+1,p]\!]$, $(\langle Z, c^i\rangle - W_i) X_i \geqslant 0$.

Ainsi $\langle Z, B\rangle = \sum_{i=1}^{p} X_i W_i + \sum_{i=r+1}^{p} (\langle Z, c^i\rangle - W_i) X_i \geqslant \sum_{i=1}^{p} X_i W_i = \langle X, W\rangle$.

<u>$\forall X \in \mathcal{C}$, $\langle Z, B\rangle \geqslant \langle X, W\rangle$.</u>

• Soit U un élément de $\mathcal{C}$ tel que $\Delta(U) = \{1, \dots, r\}$.

$$\langle Z,B\rangle = \sum_{i=1}^{p} U_iW_i + \sum_{i=r+1}^{p} (\langle Z,c^i\rangle - W_i)\,U_i \underset{\underset{S(U)=\{1,\dots,r\}}{\uparrow}}{=} \sum_{i=1}^{p} U_iW_i = \langle U,W\rangle = f(U)$$

Alors $\forall X\in\mathcal{C}$, $f(U) = \langle Z,B\rangle \geqslant \langle X,W\rangle = f(X)$.

$U\in\mathcal{C}$ et $\forall X\in\mathcal{C}$, $f(U)\geqslant f(X)$. f possède un maximum sur $\mathcal{C}$ que U réalise.

D'après la partie III, U est un sommet de $\mathcal{C}$... car $(C^i)_{i\in[\![1,r]\!]} = (C^i)_{i\in S(U)}$ est libre.

Q3 Ici $n=2$, $p=4$, $C^1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $C^2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $C^3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $C^4=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}$

a) $C^3=\frac{2}{3}C^1+\frac{1}{3}C^2$ et $C^4=\frac{1}{3}C^1+\frac{2}{3}C^2$.

$E=\mathrm{Vect}(C^1,C^2,C^3,C^4)=\mathrm{Vect}(C^1,C^2)$ et la famille (C^1,C^2) est clairement libre.

Ainsi $r=\mathrm{rg}\,A=2$ et (C^1,C^2) est libre.

b) $Z=\alpha C^1+\beta C^2$. $\forall i\in\{1,\dots,r\}$, $\langle Z,C^i\rangle = W_i$.

$2=W_1=\langle Z,C^1\rangle = \alpha\langle C^1,C^1\rangle+\beta\langle C^1,C^2\rangle = 5\alpha-4\beta$.

$4=W_2=\langle Z,C^2\rangle = \alpha\langle C^1,C^2\rangle+\beta\langle C^2,C^2\rangle = -4\alpha+5\beta$.

$6=2+4=5\alpha-4\beta-4\alpha+5\beta=\alpha+\beta$; $2=4-2=-4\alpha+5\beta-5\alpha+4\beta=9(\beta-\alpha)$.

$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \beta-\alpha=\frac{2}{9}\end{cases}$; $2\beta=6+\frac{2}{9}=\frac{56}{9}$ et $2\alpha=6-\frac{2}{9}=\frac{52}{9}$; $\beta=\frac{28}{9}$ et $\alpha=\frac{26}{9}$.

$Z=\frac{26}{9}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\frac{28}{9}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8/3\\10/3\end{pmatrix}$. $Z=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}$.

c) $A'Z-W=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\8/3\\10/3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\5/3\\1/3\end{pmatrix}\geqslant 0$. $A'Z-W\geqslant 0$

Ainsi $\forall i\in\{r+1,\dots,p\}$, $\langle Z,C^i\rangle=(A'Z)_i\geqslant W_i$

d) Soit $X \in \mathcal{C}$. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$

$$s(X) = \{1,2\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 = x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ 1 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ 1 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \underset{\text{Aisé}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2 = 1.$$

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le seul élément de $\mathcal{C}$ tel que $s(U) = \{1,2\}$

D'après Q2 $f : x \mapsto \langle x, W \rangle$ atteint son maximum sur $\mathcal{C}$ en $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

U est un sommet de $\mathcal{C}$. Notons que $\Pi_0 = f(U) = \langle U, W \rangle = 6$.

On retrouve (presque) les résultats de la partie II ... il ne reste plus qu'à prouver que U est le seul point où f réalise son maximum sur $\mathcal{C}$.

Soit $X \in \mathcal{C} \setminus \{U\}$.

$$f(U) = \langle Z, B \rangle = \sum_{i=1}^{p} X_i W_i + \sum_{i=p+1}^{p} (\langle Z, C^i \rangle - W_i) X_i$$

$$f(U) = f(X) + \sum_{i=3}^{4} (A'Z - W)_i X_i = f(X) + \frac{5}{3} X_3 + \frac{1}{3} X_4$$

$$f(U) - f(X) = \frac{5}{3} X_3 + \frac{1}{3} X_4.$$

Supposons $X_3 = X_4 = 0$; alors $\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 0 = 1 \\ -X_1 + 2X_2 + 0 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2X_1 - X_2 = 1 \\ -X_1 + 2X_2 = 1 \end{cases}$; $X_1 = X_2 = 1$;

Alors $X = U$!

Donc $(X_3, X_4) \neq (0,0)$, comme $X_3 \geq 0$ et $X_4 \geq 0$: $\frac{5}{3} X_3 + \frac{1}{3} X_4 > 0$, $f(U) > f(X)$.