PARTIE I Etude d'une suite.

Q1 a) $u_2 = 2-1+\frac{2}{2}\sum_{i=1}^{2-1} u_i = 1+u_1$. $u_3 = 3-1+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3-1} u_i = 2+\frac{2}{3}(u_1+u_2) = 2+\frac{2}{3}u_1+\frac{2}{3}(u_1+1)$.

$u_3 = 2+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}u_1 = \frac{8}{3}+\frac{4}{3}u_1$. $\quad$ $u_2 = 1+u_1$ et $u_3 = \frac{8}{3}+\frac{4}{3}u_1$.

b) Supposons que n soit élément de $[\![3,+\infty[\![$.

$u_n = n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} u_i$ donc $2\sum_{i=1}^{n-1} u_i = n u_n - n(n-1)$.

De même $2\sum_{i=1}^{n-2} u_i = (n-1)u_{n-1}-(n-1)(n-2)$ (car $n-1 \geq 2$).

Alors : $2u_{n-1} = 2\sum_{i=1}^{n-1} u_i - 2\sum_{i=1}^{n-2} u_i = n u_n - n(n-1) - (n-1)u_{n-1} + (n-1)(n-2)$

$2u_{n-1} = n u_n - (n-1)u_{n-1} - n^2+n+n^2-3n+2$; $0 = n u_n - (n-1+2)u_{n-1} - 2n+2$.

Si n est élément de $[\![3,+\infty[\![$, $n u_n-(n+1)u_{n-1} = 2n-2$.

Q2 a) Ici $n\in[\![3,+\infty[\![$. $n u_n-(n+1)u_{n-1} = 2n-2$; $\frac{n u_n}{n(n+1)} - \frac{(n+1)u_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$.

Ainsi $v_n - v_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$.

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}-\{0,-1\}$.

$$\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} - 2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right] = \frac{4}{x+1}-\frac{2}{x}.$$

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,0\},\quad \frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{-2}{x}+\frac{4}{x+1}.$$

c) Supposons que : $n\in[\![3,+\infty[\![$.

$$v_n = v_n - v_2 + v_2 = \sum_{k=3}^{n}(v_k - v_{k-1}) + v_2 = \sum_{k=3}^{n}\frac{2(k-1)}{k(k+1)} + \frac{u_2}{3} = \sum_{k=3}^{n}\frac{-2}{k} + \sum_{k=3}^{n}\frac{4}{k+1} + \frac{1+u_1}{3}.$$

$$v_n = -2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + 4\sum_{k=4}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3}.$$

$$v_n = -2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 2\times\frac{1}{2} + 4\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - 4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3} = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 1 - \frac{10}{3} + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3} + \frac{4}{n+1}.$$

$$V_n = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - 2 + \frac{u_1}{3} + \frac{4}{n+1} = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}.$$

Si $n=2$: $V_2 = \frac{u_2}{3} = \frac{1+u_1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3}$ et $2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1} = 2\frac{1}{2} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{3} =$

$1 + \frac{u_1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3}.$

Finalement si $n \in [\![2,+\infty[\![$, $V_n = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}$.

(Q3) a) $u_n = (n+1)V_n = (n+1)\left[2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}\right] = (n+1)\left[2h_n + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}\right].$

$$u_n = (n+1)\left[2h_n + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}\right].$$

b) $\sum_{k=2}^{n} \gamma_k + \ln n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right) + \ln n = h_n - \sum_{k=2}^{n}(\ln k - \ln(k-1)) + \ln n.$

$\sum_{k=2}^{n}\gamma_k + \ln n = h_n - \sum_{k=2}^{n}\ln k + \sum_{k=1}^{n-1}\ln k + \ln n = h_n - \sum_{k=2}^{n}\ln k + \sum_{k=1}^{n}\ln k \underset{\substack{\uparrow \\ \ln 1 = 0\,!}}{=} h_n$

Ainsi $h_n = \sum_{k=2}^{n}\gamma_k + \ln n$.

c) $\gamma_n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

$\gamma_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

$\to -\gamma_n \sim \frac{1}{2n^2}$ $\to$ $\frac{1}{2n^2} \geq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ $\to$ la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge ;

ainsi les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $-\gamma_n$ converge.

Alors la série de terme général γ_n converge.

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{h_n}{\ln n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\ln n}\sum_{k=2}^{n}\gamma_k\right) = 1$ car $\lim \frac{1}{\ln n} = 0$ et

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\gamma_k = \sum_{k=2}^{+\infty}\gamma_k$ $(<+\infty\,!)$

Ainsi $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

e] $u_n = (n+1)\left[2h_n + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}\right]$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2h_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(2\ln n) = +\infty$ car $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}\right] = \frac{u_1}{3} - 2$.

Ainsi $\frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1} = o(h_n)$; par conséquent : $2h_n + \frac{u_1}{2} - 2 + \frac{4}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2h_n$.

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(2h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2nh_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln n$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln n$.

PARTIE II $\boxed{A}$

$\boxed{A}$ $E(Z) = \sum\limits_{i=1}^{p} z_i\, P(Z = z_i)$.

$(A_1, A_2, \dots, A_q)$ est un système complet d'événements et $P(A_j) \neq 0$ pour tout $j \in [\![1, q]\!]$.

La formule des probabilités totales donne alors : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P(Z = z_i) = \sum\limits_{j=1}^{q} P(Z = z_i / A_j) P(A_j)$

Alors $E(Z) = \sum\limits_{i=1}^{p} z_i\left(\sum\limits_{j=1}^{q} P(Z = z_i / A_j) P(A_j)\right)$

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{q}\left[\sum_{i=1}^{p} z_i\, P(Z = z_i / A_j)\right] P(A_j) = \sum_{j=1}^{q} E(Z/A_j) P(A_j).$$

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{q} P(A_j)\, E(Z/A_j).$$

__Remarque__.. Ceci vaut encore si $(A_1, A_2, \dots, A_q)$ est un système quasi-complet d'événements tel que $P(A_j) \neq 0$ pour tout $j \in [\![1, q]\!]$

Les deux versions (système complet et système quasi-complet) s'étendent encore au cas où Z prend presque sûrement ses valeurs dans $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ (ie pour tout $z \in \mathbb{R} - \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, $P(Z = z) = 0$ ... ou $\sum\limits_{k=1}^{p} P(Z = z_k) = 1$) •

PARTIE II $\boxed{B}$

Avant de répondre aux questions nous allons préciser la notion de variable aléatoire presque sûrement constante et de variable aléatoire prenant presque sûrement ses valeurs dans un ensemble.

Dans la suite l'espace probabilisé de référence est $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Les variables aléatoires considérées le sont sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et sont discrètes.

- Soit X une telle variable aléatoire et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ une partie de $\mathbb{R}$ ayant r éléments.

  X prend presque sûrement ses valeurs dans A si : $\sum_{k=1}^{r} P(X=a_k) = 1$

<u>Remarque</u>.. Comme les événements $\{X=a_1\}, \{X=a_2\}, \dots, \{X=a_r\}$ sont deux à deux disjoints, X prend presque sûrement ses valeurs dans A si et seulement si $(\{X=a_k\})_{k \in [\![1,r]\!]}$ est un système quasi-complet d'événements.

$\boxed{P1}$ X prend presque sûrement ses valeurs dans $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R} - A,\ P(X=x) = 0$.

<u>Dm</u> C.N. Supposons que X prend presque sûrement ses valeurs dans A.

Soit $x \in \mathbb{R} - A$.

$$0 \leq P(X=x) = P\Big(\{X=x\} \cup \big(\bigcup_{k=1}^{r} \{X=a_k\}\big)\Big) - P\Big(\bigcup_{k=1}^{r} \{X=a_k\}\Big) \leq 1 - \sum_{k=1}^{r} P(X=a_k) = 0$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} - A,\ P(X=x) = 0$.

C.S. Supposons que : $\forall x \in \mathbb{R} - A,\ P(X=x) = 0$.

$$\sum_{k=1}^{r} P(X=a_k) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{r} \{X=a_k\}\Big) = P(X^{-1}(A))$$

$$1 = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(X^{-1}(A \cup \bar{A})) = P(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(\bar{A})) \overset{\text{réunion disjointe}}{=} P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(\bar{A})).$$

$$P(X^{-1}(\bar{A})) = P(X^{-1}(\bar{A} \cap X(\Omega))) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \bar{A} \cap X(\Omega)\}) = \sum_{x \in \bar{A} \cap X(\Omega)} P(X=x) = 0$$

Ainsi $1 = P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(\bar{A})) = P(X^{-1}(A))$.

Donc $\sum_{k=1}^{r} P(X=a_k) = 1$. Ceci achève la preuve de $P1$.

$\boxed{P2}$ On suppose que X prend ses valeurs presque sûrement dans $A = \{a_1, \dots, a_r\}$.
$E(X)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{r} a_k P(X = a_k)$

Dém Si $X(\Omega)$ est fini, $E(X)$ existe. Supposons que $X(\Omega)$ soit infini.
$X(\Omega) = \{x_k \,;\, k \in [\![0, +\infty[\![\}$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.
$\forall x \in \mathbb{R} - A$, $P(X = x) = 0$, donc $\{k \in \mathbb{N} \mid P(X = x_k) \neq 0\}$ est fini, ainsi
il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(X = x_k) = 0$.
$\forall k \in [\![n_0, +\infty[\![$, $x_k P(X = x_k) = 0$. Alors la série de terme général $x_k P(X = x_k)$ est absolument convergente et $E(X)$ existe !

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} x P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} x P(X = x) + \sum_{x \in \overline{X(\Omega)} \cap A} x P(X = x) = \sum_{x \in A} x P(X = x)$$

$P(X = x) = 0$ si $x \notin A$ $\qquad$ $P(X = x) = 0$ si $x \in \overline{X(\Omega)}$

$$E(X) = \sum_{x \in A} x P(X = x) = \sum_{k=1}^{r} a_k P(X = a_k).$$

$\boxed{P3}$ Si X prend ses valeurs presque sûrement dans A et si A' est une partie finie de $\mathbb{R}$ contenant A alors X prend ses valeurs presque sûrement dans A'.

Dém $$\sum_{x \in A'} P(X = x) = \sum_{x \in A} P(X = x) + \sum_{x \in A' \setminus A} P(X = x) = \sum_{x \in A} P(X = x) = 1.$$

$P(X = x) = 0$ si $x \notin A$

$\boxed{P4}$ On suppose que X prend presque sûrement ses valeurs dans A et que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ prenant presque sûrement ses valeurs dans $B = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ (card $B = s$).
Alors $X + Y$ prend presque sûrement ses valeurs dans $A + B = \{a_i + b_j \,;\, i \in [\![1, r]\!],$
$j \in [\![1, s]\!]\}$

Dém Soit $z \in \mathbb{R} - (A + B)$. Montrons que $P(X + Y = z) = 0$.

1er Cas.- $z \notin (X+Y)(\Omega)$. Alors nécessairement $P(X+Y=z)=0$.

2e Cas.- $z \in (X+Y)(\Omega)$. Posons $S_z = \{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \mid x+y=z\}$.

$$P(X+Y=z) = \sum_{(x,y)\in S_z} P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$$

Soit $(x,y)\in S_z$. Montrons que $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=0$;

$z \notin A+B$ donc ou $x \notin A$ ou $y \notin B$.

- a) $x \notin A$. Alors $P(X=x)=0$. Or $0 \leq P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) \leq P(X=x)=0$
  donc $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=0$ — croissance de P
- b) $y \notin B$. Alors $P(Y=y)=0$. Or $0 \leq P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) \leq P(Y=y)=0$
  donc $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=0$.

Ainsi $\forall (x,y)\in S_z$, $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=0$.

Par conséquent $P(X+Y=z)=0$

ceci achève de prouver P4.

Voilà on peut maintenant travailler presque sûrement sérieusement.

Q1 a] La formule des probabilités totales donne : $P(X_2=1) = P(X_2=1/I_2=1)P(I_2=1) + P(X_2=1/I_2=2)P(I_2=2) = \frac{1}{2}\left[P(2-1+X_{2-1}=1) + P(2-1+X_{2-1}=1)\right]$

$P(X_2=1) = \frac{1}{2}\left[P(X_1=0)+P(X_1=0)\right] = \frac{1}{2}[1+1]$. $P(X_2=1)=1$.

Ainsi <u>X_2 est une variable aléatoire presque sûrement égale à 1.</u> <u>$U_2 = E(X_2)=1$</u>

b] La formule des probabilités totales donne :

$P(X_3=2) = P(X_3=2/I_3=1)P(I_3=1) + P(X_3=2/I_3=2)P(I_3=2) + P(X_3=2/I_3=3)P(I_3=3)$

$P(X_3=2) = \frac{1}{3}\left[P(3-1+X_{3-1}=2) + P(3-1+Z_{3,2}+T_{3,2}=2) + P(3-1+X_{3-1}=2)\right]$

$P(X_3=2) = \frac{1}{3}\left[P(X_2=0) + P(Z_{3,2}+T_{3,2}=0) + P(X_2=0)\right]$

Or $P(X_2=0)=0$ car X_2 est presque sûrement égale à 1, ainsi
$P(X_3=2) = \frac{1}{3}\left[P(Z_{3,2}+T_{3,2}=0)\right]$.

$Z_{3,2}$ (resp. $T_{3,2}$) suit la même loi que $X_{2-1}=X_1$ (resp. $X_{3-2}=X_1$) et X_1 est la variable constante égale à 0. Alors $Z_{3,2}+T_{3,2}$ est également la variable constante égale à 0 ; $P(Z_{3,2}+T_{3,2}=0)=1$. <u>$P(X_3=2)=\frac{1}{3}$.</u>

La formule des probabilités totales donne encore :

$P(X_3=3) = \sum_{i=1}^{3} P(X_3=3/I_3=i)P(I_3=i) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P(X_3=3/I_3=i)$

$P(X_3=3) = \frac{1}{3}\left[P(X_3=3/I_3=1) + P(X_3=3/I_3=2) + P(X_3=3/I_3=3)\right]$

$P(X_3=3) = \frac{1}{3}\left[P(3-1+X_2=3) + P(3-1+Z_{3,2}+T_{3,2}=3) + P(3-1+X_2=3)\right]$

$P(X_3=3) = \frac{1}{3}\left[P(X_2=1) + P(Z_{3,2}+T_{3,2}=1) + P(X_2=1)\right]$

$P(X_3=3) = \frac{1}{3}[1+0+1]$ ($P(X_2=1)=1$ et $Z_{3,2}+T_{3,2}=0$) ; <u>$P(X_3=3)=\frac{2}{3}$.</u>

<u>$P(X_3=2)=\frac{1}{3}$ et $P(X_3=3)=\frac{2}{3}$ ...</u> <u>$\forall x \in \mathbb{R}-\{2,3\}$, $p(X_3=x)=0$.</u>

<u>X_3 prend donc presque sûrement ses valeurs dans $\{2,3\}$.</u> Ainsi $E(X_3) = 2P(X_3=2) + 3P(X_3=3)$

$E(X_3) = 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. $\underline{U_3 = E(X_3) = \frac{8}{3}}$.

Q2 Soit $k\in\mathbb{R}$. La formule des probabilités totales donne : $P(X_4=k) = \sum_{i=1}^{4} P(X_4=k / I_4=i)P(I_4=i)$

$P(X_4=k) = \frac{1}{4}\left[P(X_4=k/I_4=1) + P(X_4=k/I_4=2) + P(X_4=k/I_4=3) + P(X_4=k/I_4=4)\right]$

$P(X_4=k) = \frac{1}{4}\left[P(4-1+X_{4-1}=k) + P(4-1+Z_{4,2}+T_{4,2}=k) + P(4-1+Z_{4,3}+T_{4,3}=k) + P(4-1+X_{4-1}=k)\right]$

$P(X_4=k) = \frac{1}{4}\left[2P(X_3=k-3) + P(Z_{4,2}+T_{4,2}=k-3) + P(Z_{4,3}+T_{4,3}=k-3)\right]$

$Z_{4,2}$, $T_{4,2}$, $Z_{4,3}$, $T_{4,3}$ ont respectivement même loi que : X_1, X_2, X_2, X_1 ; ainsi $Z_{4,2}+T_{4,2}$ et $Z_{4,3}+T_{4,3}$ ont même loi ; mieux $Z_{4,2}+T_{4,2}$ et $Z_{4,3}+T_{4,3}$ ont même loi que X_2 car $X_1=0$.

$Z_{4,2}+T_{4,2}$ et $Z_{4,3}+T_{4,3}$ sont presque sûrement constantes égales à 1.

$$P(Z_{4,2}+T_{4,2}=k-3) = P(Z_{4,3}+T_{4,3}=k-3) = \begin{cases} 0 \text{ si } k-3\neq 1 \\ 1 \text{ si } k-3=1 \quad (\underline{\text{ie } k=4}) \end{cases}$$

$$P(X_3=k-3) = \begin{cases} 0 \text{ si } k-3\notin\{2,3\} \\ \frac{1}{3} \text{ si } k-3=2 \quad (\underline{\text{ie } k=5}) \\ \frac{2}{3} \text{ si } k-3=3 \quad (\underline{\text{ie } k=6}) \end{cases}$$

Finalement $P(X_4=k) = \frac{1}{4}\left[2P(X_3=k-3) + 2P(Z_{4,2}+T_{4,2}=k-3)\right]$

$$P(X_4=k) = \frac{1}{2}\left[P(X_3=k-3) + P(Z_{4,2}+T_{4,2}=k-3)\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } k\notin\{4,5,6\} \\ \frac{1}{2}(0+1) \text{ si } k=4 \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{3}+0) \text{ si } k=5 \\ \frac{1}{2}(\frac{2}{3}+0) \text{ si } k=6 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+0)=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+0)=\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=1$.

<u>X_4 prend presque sûrement ses valeurs dans $\{4,5,6\}$.</u>

<u>$P(X_4=4)=\frac{1}{2}$; $P(X_4=5)=\frac{1}{6}$; $P(X_4=6)=\frac{1}{3}$.</u>

Alors $E(X_4) = 4P(X_4=4) + 5P(X_4=5) + 6P(X_4=6) = 4\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{3} = \frac{29}{6}$.

<u>$U_4 = E(X_4) = \frac{29}{6}$.</u>

Q3 Montrons que pour tout $n \in [\![3,+\infty[\![$, X_n prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0, \frac{n(n-1)}{2}]\!]$. Notons que ceci vaut déjà pour $n=1$ et $n=2$.

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que : $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$, $P(X_n = x) = 0$.

→ La propriété est vraie pour $n=3$ ($[\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!] = [\![0,3]\!]$ et X_3 prend presque sûrement ses valeurs dans $\{2,3\}$ donc presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,3]\!]$)

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ ($n \geq 4$) et montrons la pour n.
Soit $x \in \mathbb{R} - [\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$; montrons que $P(X_n = x) = 0$.

Une fois encore : $P(X_n = x) = \sum_{i=1}^{n} P(X_n = x / I_n = i)\, P(I_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(X_n = x / I_n = i)$.

$$n P(X_n = x) = P(n-1+X_{n-1} = x) + \sum_{i=2}^{n-1} P(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i} = x) + P(n-1+X_{n-1} = x).$$

$$n P(X_n = x) = P(X_{n-1} = x-n+1) + \sum_{i=2}^{n-1} P(Z_{n,i}+T_{n,i} = x-n+1) + P(X_{n-1} = x-n+1).$$

$$n P(X_n = x) = 2 P(X_{n-1} = x-n+1) + \sum_{i=2}^{n-1} P(Z_{n,i}+T_{n,i} = x-n+1).$$

X_{n-1} prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,\frac{(n-1)(n-2)}{2}]\!] = [\![0,\sum_{k=1}^{n-2} k]\!]$.

$n-1+X_{n-1}$ prend alors presque sûrement ses valeurs dans $[\![n-1,\sum_{k=1}^{n-2} k + n-1]\!]$

$n-1+X_{n-1}$ prend alors presque sûrement ses valeurs dans $[\![n-1,\sum_{k=1}^{n-1} k]\!] = [\![n-1,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$.

Or $x \notin [\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$ donc $x \notin [\![n-1,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$; ainsi $P(n-1+X_{n-1} = x) = 0$;

$\underline{\underline{P(X_{n-1} = x-n+1) = 0}}$. Soit i un élément de $[\![2,n-1]\!]$. $1 \leq i-1 \leq n-2$ et $1 \leq n-i \leq n-2$.

$Z_{n,i}$ a la même loi que X_{i-1} et X_{i-1} prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,\frac{(i-1)(i-2)}{2}]\!]$.

$T_{n,i}$ a la même loi que X_{n-i} et X_{n-i} prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}]\!]$.

Ainsi $Z_{n,i}+T_{n,i}$ prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,\frac{(i-1)(i-2)}{2}+\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}]\!]$.

Donc $n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}$ prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![n-1,\alpha]\!]$ avec

$$\alpha=\frac{(i-1)(i-2)}{2}+\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}+n-1=\frac{1}{2}\left[i^2-3i+2+n^2-ni-n-ni+i^2+i+2n-2\right]$$

$$\frac{n(n-1)}{2}-\alpha=\frac{1}{2}\left[n^2-n-i^2+3i-2-n^2+ni+n+ni-i^2-i-2n+2\right]=\frac{1}{2}\left[2ni+2i-2i^2-2n\right]$$

$$\frac{n(n-1)}{2}-\alpha=ni+i-i^2-n=n(i-1)-i(i-1)=(n-i)(i-1)\geqslant 0;\quad \alpha\leq\frac{n(n-1)}{2}.$$

Alors $[\![n-1,\alpha]\!]\subset[\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$; ainsi $n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}$ prend également presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$.

Comme $x\notin[\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$, $P(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=x)=0$; $P(Z_{n,i}+T_{n,i}=x-n+1)=0$.

Finalement : $P(X_{n-1}=x-n+1)=0$ et $\forall i\in[\![2,n-1]\!]$, $P(Z_{n,i}+T_{n,i}=x-n+1)=0$.

Alors $nP(X_n=x)=0$; $P(X_n=x)=0$.

$\forall x\in\mathbb{R}-[\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$, $P(X_n=x)=0$.

X_n prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$ et ainsi s'achève la récurrence.

Rappelons que la propriété est également vraie pour $n=1$ et 2 ($X_1=0$ et X_2 est presque sûrement constante égale à 1) ; nous l'avons d'ailleurs utilisé dans la récurrence.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0,\frac{n(n-1)}{2}]\!]$.

Q4 a) D'après la partie II A, $E(X_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_n/I_n=i)P(I_n=i)$

Supposons $n\geqslant 3$.

Alors $E(X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_n/I_n=i)=\frac{1}{n}\left[E(X_n/I_n=1)+E(X_n/I_n=n)+\sum_{i=2}^{n-1}E(X_n/I_n=i)\right]$.

$$E(X_n)=\frac{1}{n}\left[E(n-1+X_{n-1})+\sum_{i=2}^{n-1}E(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i})+E(n-1+X_{n-1})\right].$$

$$E(X_n)=\frac{1}{n}\left[2(n-1+E(X_{n-1}))+\sum_{i=2}^{n-1}\left[E(Z_{n,i})+E(T_{n,i})+n-1\right]\right].$$ le Σ contient $n-2$ termes !

$$E(X_n)=\frac{1}{n}\left[2U_{n-1}+\sum_{i=2}^{n-1}E(X_{i-1})+\sum_{i=2}^{n-1}E(X_{n-i})+2(n-1)+(n-2)(n-1)\right].$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n}\left[2U_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} U_i + \sum_{i=2}^{n-1} U_{n-i} + n(n-1)\right].$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n}\left[2U_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} U_i + \sum_{i=1}^{n-2} U_i + n(n-1)\right].$$

$$U_n = \frac{1}{n}\left[2\sum_{i=1}^{n-1} U_i + n(n-1)\right]. \quad U_n = n-1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} U_i.$$

Pour $n=2$: $U_n = 1$ et $n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} U_i = 2-1+\frac{2}{2}\sum_{i=1}^{1} U_i = 1+U_1 = 1$.

Alors pour $n \geqslant 2$: $U_n = n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} U_i$

b) d'après I $\quad U_n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} 2n\ln n$.

(Q5) a) $n \geqslant 3$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Nous avons prouvé dans Q3 que :

$$n\,P(X_n = k) = 2\,P(n-1+X_{n-1}=k) + \sum_{i=2}^{n-1} P(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=k).$$

une probabilité étant un réel positif :

$$P(X_n = k) = 0 \iff \begin{cases} P(n-1+X_{n-1}=k)=0 \\ \text{et} \\ \forall i \in [\![2,n-1]\!],\ P(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=k)=0 \end{cases}$$

$P(X_n = \alpha_n) \neq 0$ donc $\quad P(n-1+X_{n-1}=\alpha_n) \neq 0$ ou $\exists i \in [\![2,n-1]\!]$,

$P(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=\alpha_n) \neq 0$.

Dans le premier cas : $P(X_{n-1} = \alpha_n-n+1) \neq 0$ donc $\alpha_n-n+1 \geqslant \alpha_{n-1}$ c'est à

dire $\alpha_n \geqslant n-1+\alpha_{n-1}$.

Examinons le second cas ; $\exists i \in [\![2,n-1]\!]$, $P(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=\alpha_n) \neq 0$.

Alors $0 \neq P(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=\alpha_n) = \sum_{a \in T_{n,i}(\Omega)} P(\{T_{n,i}=a\} \cap \{Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a\})$

Une probabilité étant un réel positif, $\exists a \in T_{n,i}(\Omega)$, $P(\{T_{n,i}=a\} \cap \{Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a\}) \neq 0$

Or $\{T_{n,i}=a\}\cap\{Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a\}$ est contenu dans $\{T_{n,i}=a\}$ et $\{Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a\}$.

Ainsi $0<P(\{T_{n,i}=a\}\cap\{Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a\})\leq P(T_{n,i}=a)$ et

$0<P(\{T_{n,i}=a\}\cap\{Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a\})\leq P(Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a)$.

Alors $P(X_{n-i}=a)=P(T_{n,i}=a)\neq 0$; $a\geqslant \alpha_{n-i}$

$P(X_{i-1}=\alpha_n-n+1-a)=P(Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-a)\neq 0$; $\alpha_n-n+1-a\geqslant \alpha_{i-1}$.

Donc $\alpha_n\geqslant n-1+a+\alpha_{i-1}\geqslant n-1+\alpha_{n-i}+\alpha_{i-1}$.

Ainsi $\alpha_n\geqslant n-1+\alpha_{n-1}$ ou $\exists i\in [\![2,n-1]\!]$, $\alpha_n\geqslant n-1+\alpha_{n-i}+\alpha_{i-1}=n-1+\alpha_{i-1}+\alpha_{n-i}$

α_n est au moins égal au minimum des nombres $n-1+\alpha_{n-1}$, $n-1+\alpha_1+\alpha_{n-2}$, $n-1+\alpha_2+\alpha_{n-3}$, ..., $n-1+\alpha_{n-2}+\alpha_1$

b) i) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 2}-2$.

g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g''(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}\geqslant 0$.

Ainsi g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall b\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $g(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)$.

En particulier : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall b\in\mathbb{R}_+^*$, $g\left(\frac{a+b}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}a+(1-\frac{1}{2})b\right)\leq\frac{1}{2}g(a)+(1-\frac{1}{2})g(b)=\dfrac{g(a)+g(b)}{2}$.

Alors si $(i,n)\in\mathbb{N}^2$ et si $2\leq i\leq n-1$: $g\left(\dfrac{i+n+1-i}{2}\right)\leq\dfrac{g(i)+g(n+1-i)}{2}$.

Donc $\forall(i,n)\in\mathbb{N}^2$, $2\leq i\leq n-1\Rightarrow g\left(\frac{n+1}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(g(i)+g(n+1-i)\right)$.

$\forall(i,n)\in\mathbb{N}^2$, $2\leq i\leq n-1\Rightarrow g(i)+g(n+1-i)\geqslant 2g\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

ii) $g(n+1)-g(n)=(n+1)\log_2(n+1)-2(n+1)+2-n\log_2(n)+2n-2=\log_2(n+1)+n(\log_2(n+1)-\log_2 n)-2$

$g(n+1)-g(n)=\log_2(n+1)+\dfrac{n}{\ln 2}\left(\ln\dfrac{n+1}{n}\right)-2=\log_2(n+1)+\dfrac{n}{\ln 2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-2$

Or $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x)\leq x$; donc : $g(n+1)-g(n)\leq\log_2(n+1)+\dfrac{n}{\ln 2}\times\dfrac{1}{n}-2=\log_2(n+1)+\dfrac{1}{\ln 2}-2$

Or $\dfrac{1}{\ln 2}-2\leq 0$ donc $g(n+1)-g(n)\leq\log_2(n+1)$.

Pour avoir $g(n+1)-g(n) \leq n-1$. __il suffit__ d'avoir $\log_2(n+1) \leq n-1$ car $g(n+1)-g(n) \leq \log_2(n+1)$.

$\log_2(n+1) \leq n-1 \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln 2} \leq n-1 \Leftrightarrow \ln(n+1) \leq (n-1)\ln 2 \Leftrightarrow n+1 \leq 2^{n-1}$.

Si $n \neq 1$ ou 2... montrons alors par récurrence que : $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $n+1 \leq 2^{n-1}$

→ C'est vrai pour $n=3$ $(3+1 \leq 2^{3-1} \Leftrightarrow 4 \leq 4\ !)$

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in [\![3,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$2^{n-1} \geq n+1$; $2^{(n+1)-1} = 2^n \geq 2(n+1) = n+2+(n) \geq n+2$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $2^{n-1} \geq n+1$; $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $g(n+1)-g(n) \leq \log_2(n+1) \leq n-1$.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $g(n+1)-g(n) \leq n-1$.

Si $n=1$: $g(n+1)-g(n) = g(2)-g(1) = 2\log_2 2 - 4+2 - \log_2 1 + 2 - 2 = 2-4+2-0+2-2 = 0 = n-1$

Donc si $n=1$: $g(n+1)-g(n) = n-1 \leq n-1$!

Si $n=2$: $g(n+1)-g(n) = 3\log_2 3 - 6+2 - 2\log_2 2 + 4 - 2 = \log_2 27 - 6+2-2+4-2 = \log_2 27 - 4$

$g(n+1)-g(n) = \log_2 27 - 5 + 1 = 1 + \log_2 27 - \log_2 2^5 = 1 - \log_2 \frac{32}{27} \leq 1 = n-1$

Finalement : $\underline{\underline{g(n+1)-g(n) \leq n-1 \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*}}$.

(Q6) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geq (n+1)\log_2(n+1) - 2n = g(n+1)$.

→ $X_1 = 0$; $\alpha_1 = 0$. $g(2) = 2\log_2 2 - 2 = 0$. La propriété est vraie pour $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ $(n \geq 2)$ et montrons la pour n.

$\alpha_n \geq \min(n-1+\alpha_{n-1}, n-1+\alpha_1+\alpha_{n-2}, n-1+\alpha_2+\alpha_{n-3}, \dots, n-1+\alpha_{n-2}+\alpha_1)$

$n-1+\alpha_{n-1} \geq n-1+g(n)$ et $\forall i \in [\![2, n-1]\!]$, $n-1+\alpha_{i-1}+\alpha_{n-i} \underset{\substack{\uparrow \\ 1 \leq i-1 \leq n-1 \\ 1 \leq n-i+1 \leq n-1}}{\geq} n-1+g(i)+g(n-i+1)$

Or $g(n+1)-g(n) \leq n-1$ donc

$n-1+g(n) \geq g(n+1)$; par conséquent : $n-1+\alpha_{n-1} \geq g(n+1)$.

Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$.

$n-1+\alpha_{i-1}+\alpha_{n-i} \geqslant n-1+g(i)+g(n-i+1) \geqslant n-1+2g\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

$$n-1+2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = n-1+2\left(\frac{n+1}{2}\log_2\frac{n+1}{2} - 2\times\frac{n+1}{2}+2\right)$$

$n-1+2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = n-1+(n+1)(\log_2(n+1)-\log_2 2)-2n+2$

$n-1+2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = (n+1)\log_2(n+1) + n-1-(n+1)\log_2 2 - 2n+2$. Notons que $\log_2 2 = 1$.

$n-1+2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = (n+1)\log_2(n+1)+n-1-n-1-2n+2 = (n+1)\log_2(n+1)-2n = g(n+1)$.

Donc $n-1+\alpha_{i-1}+\alpha_{n-i} \geqslant g(n+1)$.

$n-1+\alpha_{n-1} \geqslant g(n+1)$ et $\forall i \in [\![2, n-1]\!]$, $n-1+\alpha_{i-1}+\alpha_{n-i} \geqslant g(n+1)$.

Alors $\alpha_n \geqslant \min(n-1+\alpha_{n-1}, n-1+\alpha_1+\alpha_{n-2}, n-1+\alpha_2+\alpha_{n-3}, \dots, n-1+\alpha_{n-2}+\alpha_1) \geqslant g(n+1)$.

Ceci achève la récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geqslant (n+1)\log_2(n+1)-2n$.

PARTIE III Etude d'un algorithme de tri.

$\boxed{A}$ Dans toute la suite nous notons Ω l'ensemble des permutations de E.

Comme E a n éléments, Ω a $n!$ éléments.

(Q1) $T_1(\Omega) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$P(T_1 = e_k) = P(\{\sigma \in \Omega \mid \sigma(e_1) = e_k\}) = \frac{\text{card}\{\sigma \in \Omega \mid \sigma(e_1)=e_k\}}{\text{card }\Omega}$$

$$P(T_1 = e_k) = \frac{1}{n!}\text{card}\{\sigma \in \Omega \mid \sigma(e_1) = e_k\}$$

Construire une permutation de $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ qui transforme e_1 en e_k revient à construire une bijection de $E-\{e_1\}$ sur $E-\{e_k\}$. $E-\{e_1\}$ et $E-\{e_k\}$ ont $n-1$ éléments. Il y a donc $(n-1)!$ bijections de $E-\{e_1\}$ sur $E-\{e_k\}$.

Ainsi $\{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma(e_1) = e_\ell\}$ a $(n-1)!$ éléments.

$P(T_1 = e_\ell) = \frac{1}{n!} \times (n-1)! = \frac{1}{n}$.

$\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ P(T_1 = e_\ell) = \frac{1}{n}$. T_1 suit une loi uniforme sur E

Remarque.. Il en est de même de $T_2, T_3, \dots, T_n$.

(Q2) Nous supposerons pour rendre cohérente la définition des $T'_1, T'_2, \dots, T'_{n-1}$ que 0 n'est pas élément de E !!

a) Pour construire une liste d'entiers $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ vérifiant $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ il convient 1/ de choisir k éléments distincts de $[\![2, n]\!]$; il y a C^k_{n-1} possibilités de le faire, 2/ de les ordonner dans l'ordre croissant ; il y a une possibilité de le faire.

Il y a donc C^k_{n-1} listes $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers vérifiant $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

b) Soit σ une permutation de E. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons $p_\sigma(e_j)$ le rang de e_j dans la liste $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_n))$ (si $\ell' \in [\![1, n]\!]$, $p_\sigma(e_j) = \ell' \Leftrightarrow \sigma(e_{\ell'}) = e_j$).
Nous définissons ainsi une application p_σ de E dans $[\![1, n]\!]$; p_σ est en fait une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$. σ est entièrement déterminé par p_σ.
L'application $\sigma \to p_\sigma$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur l'ensemble des bijections de E sur $[\![1, n]\!]$.

Notons H l'événement $\bigcap_{j=1}^{k} [T'_j = \alpha_j] \cap [T_1 = e_{k+1}]$.

Soit σ un élément de $\mathcal{S}$

$$\sigma \in H \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(e_1) = e_{k+1} \\ \text{Pour tout } j \in [\![1, k]\!], \text{ le } j^{\text{ème}} \text{ élément de } (\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_n)) \text{ inférieur} \\ \text{à } \sigma(e_1) = e_{k+1} \text{ est } \alpha_j \end{cases}$$

Notons que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont les k éléments de E strictement inférieurs à e_{k+1}.

Ainsi $\sigma \in H \Leftrightarrow \begin{cases} p_\sigma(e_{\ell+1}) = 1 \\ 2 \leq p_\sigma(\alpha_1) < p_\sigma(\alpha_2) < \dots < p_\sigma(\alpha_\ell) \leq n \end{cases}$

Il en résulte qu'il y a autant d'éléments dans H que de bijection p de E sur $[\![1,n]\!]$ vérifiant : $p(e_{\ell+1}) = 1$ et $p(\alpha_1) < p(\alpha_2) < \dots < p(\alpha_\ell)$.

Pour construire une telle bijection

1) on donne pour image 1 à $e_{\ell+1}$ (1 possibilité)

2) on choisit une suite d'entiers $(i_1, i_2, \dots, i_\ell)$ telle que $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n$ (il y a C_{n-1}^{ℓ} possibilités)

3) pour tout j dans $[\![1,\ell]\!]$ on donne pour image i_j à α_j

4) on construit une bijection de $\{e_{\ell+2}, \dots, e_n\}$ sur $[\![2,n]\!] - \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$; il y a $(n-(\ell+1))!$ possibilités.

Ainsi $\operatorname{card} H = 1 \times C_{n-1}^{\ell} \times 1 \times (n-(\ell+1))! = \dfrac{(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)!} \times (n-\ell-1)! = \dfrac{(n-1)!}{\ell!}$

Alors $P(H) = \dfrac{\operatorname{card} H}{\operatorname{card} \Omega} = \dfrac{\frac{(n-1)!}{\ell!}}{n!} = \dfrac{1}{n\,\ell!}$.

$$\underline{\underline{P\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} [T'_j = \alpha_j] \cap [T_1 = e_{\ell+1}]\right) = \frac{1}{n\,\ell!}}}.$$

c) $P\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} [T'_j = \alpha_j] \,/\, [T_1 = e_{\ell+1}]\right) = \dfrac{P\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} [T'_j = \alpha_j] \cap [T_1 = e_{\ell+1}]\right)}{P([T_1 = e_{\ell+1}])} = \dfrac{\frac{1}{n\,\ell!}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\ell!}$

Ainsi $\underline{\underline{P\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} [T'_j = \alpha_j] \,/\, [T_1 = e_{\ell+1}]\right) = \dfrac{1}{\ell!}}}$.

Q1 a) L'instruction Tri (T,i,i) provoque l'appel de la procédure Tri ; deb et fin reçoivent la valeur de i. Comme fin ≤ deb

Le test est alors négatif ((fin > deb) est le booléen false) et ainsi s'achève l'appel de la procédure ; T n'a subi aucune modification.

b) Nous écrivons A = α pour dire que A reçoit la valeur α ...

1 • L'appel Tri (T, 1, 5)   T = [2, 9, 6, 1, 5]

deb = 1 fin = 5 ; 5 > 1 ; on exécute Place (T, deb, fin, pl) qui va mettre 2 à sa place dans le tableau.

Après l'exécution de cette instruction pl = 2 et T = [1 2 9 6 5]

pl > deb (2 > 1) et pl < fin (2 < 5)

Ainsi nous exécuterons successivement Tri (T, deb, pl - 1) et Tri (T, pl + 1, fin).

2 • L'appel Tri (T, deb, pl - 1) Le tableau reste inchangé car deb = 1 et pl - 1 = 1

3 • L'appel Tri (T, pl + 1, fin)

deb = 3 , fin = 5 ; 5 > 3 ; on exécute Place (T, deb, fin, pl) qui va mettre 9 à sa place dans le tableau [9 6 5].

Après l'exécution de cette instruction pl = 5 et T = [1 2 6 5 9]

5 > 3 mais on n'a pas 5 < 5

Ainsi nous n'exécuterons que Tri (T, deb, pl - 1)

4 • L'appel Tri (T, deb, pl - 1)

deb = 3 et fin = 4 ; 4 > 3 ; on exécute Place (T, deb, fin, pl) qui va mettre 6 à sa place dans le tableau [6 5]

Après l'exécution de cette instruction pl = 4 et T = [1 2 5 6 9]

pl > deb (4 > 3) mais on n'a pas pl < fin (4 < 4 est faux)

Ainsi nous exécutons Tri (T, deb, pl - 1) uniquement

5. L'appel Tri (T, deb, pl - 1) laisse les choses en état car (deb = 3 et pl - 1 = 3).

Ceci termine l'appel 4, qui termine l'appel 3 et qui achève l'appel 1 non ?! Le tableau est trié

<u>Résumons.</u> Pour trier le tableau [2, 9, 6, 1, 5] :

1°_ On met 2 à sa place et on obtient le tableau [1, $\underline{\underline{2}}$, 9, 6, 5]. PL = 2.

2°_ On trie les sous-tableaux [1] [9, 6, 5]

Il n'y a rien à faire pour le premier car sa longueur est 1 (donc deb ≥ fin)

Pour trier [9, 6, 5]

1°_ On met 9 à sa place et on obtient le tableau [6 5 9]. PL = 5.

2°. On trie les sous-tableaux [6, 5] et [] !

Le second est vide il n'y a donc rien à faire.

Pour trier [6, 5]

1°_ On met 6 à sa place et on obtient [5, 6]. PL = 4.

2°_ On trie les sous-tableaux [5] et [ ] dans les deux cas il n'y a rien à faire.

Le tableau initial a évolué de la manière suivante :

$$[2,9,6,1,5] \rightarrow \underset{PL=2}{[1,2,9,6,5]} \rightarrow \underset{PL=5}{[1,2,6,5,9]} \rightarrow \underset{PL=4}{[1,2,5,6,9]}.$$

5) L'algorithme précédent est un algorithme récursif qui met les éléments d'un tableau T dans l'ordre croissant de la manière suivante

1°. Il met le premier élément du tableau à sa place par glissement.

2°_ Il trie suivant le même principe les deux sous-tableaux constitués par les éléments se trouvant à sa droite et les éléments se trouvant à gauche de l'élément mis à sa place.

L'algorithme s'arrête nécessairement car la suite des longueurs des sous-tableaux est strictement décroissante et on considère comme trié un sous-tableau vide ou de longueur 1.

(Q2) a) Si $n=1$, l'appel Tri(T, 1, 1) ne nécessite pas l'utilisation de la procédure Place. Ainsi X_1 est la variable certaine nulle.

• Supposons $n \geq 2$.

L'appel Tri(T, 1, n) commence par un appel Place(T, 1, n) qui en n-1 comparaisons donne la place de T[1] dans le tableau. Cette place est une variable aléatoire J_n qui suit clairement une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1er cas.. J_n prend la valeur 1.
Il ne reste alors qu'à trier un tableau de longueur $\emptyset$ et un tableau de longueur n-1. Le tri du tableau vide ne nécessite pas l'usage de Place. Le tri du tableau de longueur n-1 nécessite X_{n-1} comparaisons relatives aux appels de Place.
Alors la loi de X_n sachant que J_n vaut 1 est la même que la loi de $n-1+X_{n-1}$

2e cas.. J_n prend la valeur n. Même chose. Le premier sous-tableau à trier est de longueur n-1 et le deuxième est vide.

Supposons $n \geq 3$.

3ème cas.. J_n prend la valeur i avec $i \in [\![2, n-1]\!]$. La place du premier élément dans le tableau est i. Le premier appel de Place, qui s'est fait en n-1 comparaisons, a amené le premier élément à sa place. i-1 éléments sont à sa gauche et n-i à sa droite.
La suite va donc consister à trier un tableau de longueur i-1 et un tableau de longueur n-i. Notons $Z_{n,i}$ (resp. $T_{n,i}$) le nombre de comparaisons relatives à la procédure Place pour trier le tableau de tableau de longueur i (resp. n-i)..

• $Z_{n,i}$ et $T_{n,i}$ sont indépendantes

- $Z_{n,i}$ (resp. $T_{n,i}$) a même loi que X_{i-1} (resp. X_{n-i}).
- La loi de X_n sachant que $I_n = i$ est la même que la loi de $n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}$.

Par conséquent $(X_n)_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses de II.B.

Alors $E(X_n) \sim 2n \ln n$

Remarque.. C'est un excellent résultat. Rappelons que les tris classiques (bulle, insertion, ...) sont le plus souvent en $O(n^2)$

b) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le tri de $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ nécessite $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons

→ C'est clair pour $n=1$. Le tableau de longueur 1 est déjà trié et pour $n=1$, $\frac{n(n-1)}{2}=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.
La première phase du tri de $(n+1, n, \dots, 2, 1)$ amène en $(n+1)-1$ comparaisons $n+1$ à sa place. Reste à trier un tableau vide et le tableau $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ cela nécessite, d'après l'hypothèse de récurrence, $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons.
En tout $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ comparaisons ont été nécessaires pour trier $(n+1, n, \dots, 2, 1)$ et la récurrence s'achève.

Le tableau $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ est trié en $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque.. Le résultat est le même pour $(1, 2, \dots, n)$.

Remarque.. $\frac{n(n-1)}{2}$ est le nombre maximum de comparaisons nécessaire au tri d'un tableau de longueur n.

c) Considérons le tableau $(4, 2, 6, 3, 5, 1, 7)$

6 comparaisons sont nécessaires pour mettre 4 à sa place.

On obtient $(2, 3, 1, \underline{\underline{4}}, 6, 5, 7)$ et il reste à trier les sous-tableaux $(2, 3, 1)$ et $(6, 5, 7)$.

Pour $(2, 3, 1)$, deux comparaisons sont nécessaires pour mettre 2 à sa place ; on obtient $(1, \underline{\underline{2}}, 3)$. Reste deux tableaux de longueur 1 à trier ce qui ne nécessite aucune comparaison ... du type "placer".

Même chose pour $(6, 5, 7)$; deux comparaisons sont nécessaires pour trier ce tableau.

<u>Le tri de $(4, 2, 6, 3, 5, 1, 7)$ nécessite 10 comparaisons.</u>

Remarque .. 10 est le minimum des comparaisons nécessaires pour trier un tableau de longueur 7.

d) Rappelons que $g(n+1) = (n+1)\dfrac{\ln(n+1)}{\ln 2} - 2(n+1) + 2$

Ainsi pour que $g(n+1)$ soit un entier il suffit que $\exists k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln 2} = k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln 2} = k \Leftrightarrow \ln(n+1) = k \ln 2 \Leftrightarrow \ln(n+1) = \ln 2^k \Leftrightarrow n+1 = 2^k \Leftrightarrow n = 2^k - 1$.

Notons que $2^0 - 1 = 0$! Posons $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $c_k = 2^k - 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un tableau de longueur c_k qui nécessite $g(c_k + 1)$ comparaisons pour être trié.

- C'est clair pour $k = 1$ car $c_1 = 1$ et $g(c_1 + 1) = g(2) = 0$
- Supposons la propriété vraie pour un certain élément k de $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $k+1$.

Posons $n = c_{k+1}$. $n = 2^{k+1} - 1$. $E = \{1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\} = \{1, 2, \ldots, n\}$

Posons $a_1 = 2^k$. Le nombre d'éléments de E inférieurs à a_1 est 2^k-1 et le nombre d'éléments de E supérieurs à a_1 est 2^k-1.

Rappelons que $2^k-1 = c_k$. L'hypothèse de récurrence me permet d'affirmer qu'il existe un tableau $(a_2, a_3, \dots, a_{2^k})$ constitué des éléments de $\{1, 2, \dots, 2^k-1\}$ qui nécessite $g(c_k+1)$ comparaisons pour être trié.

De même il existe un tableau $(a_{2^k+1}, \dots, a_n)$ constitué des éléments de $\{2^k+1, \dots, n\}$ qui nécessite $g(c_k+1)$ comparaisons pour être trié.

Mais pour trier $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ il y aurait à faire :

→ $n-1$ comparaisons pour amener a_1 à sa place

→ $g(c_k+1)$ comparaisons pour trier le premier sous-tableau $(a_2, a_3, \dots, a_{2^k})$

→ $g(c_k+1)$ comparaisons pour trier le second sous-tableau $(a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \dots, a_n)$.

$n-1+2g(c_k+1)$ comparaisons nécessaires pour trier $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$n-1+2g(c_k+1) \underset{n=2^{k+1}-1 \text{ et } c_k+1=2^k}{=} 2^{k+1}-2 + 2\left[2^k \log_2 2^k - 2^{k+1} + 2\right].$$

$$n-1+2g(c_k+1) = 2^{k+1}\log_2 2^k - 2^{k+1} + 2 = 2^{k+1}\frac{\ln 2^k}{\ln 2} - 2^{k+1} + 2$$

$$n-1+2g(c_k+1) = k\,2^{k+1} - 2^{k+1} + 2 = (k+1)\,2^{k+1} - 2\times 2^{k+1} + 2$$

$$n-1+2g(c_k+1) = 2^{k+1}\frac{\ln 2^{k+1}}{\ln 2} - 2\times 2^{k+1} + 2 \underset{2^{k+1}=c_{k+1}+1}{=} g(c_{k+1}+1).$$

Ainsi $g(c_{k+1}+1)$ comparaisons sont nécessaires pour trier le tableau proposé et la récurrence s'achève. Le problème aussi !

J'vous aime tellement que je n'arrive plus à vous quitter.
Alors
1°- une petite proposition pour la procédure "placer" et un peu plus.

2°- Au délice d'avoir des collègues encore plus ça que moi.

```
Program hec2002M1;

uses crt;
const LongMax=10;NombreMax=100;
type Nom=string[LongMax];
     tableau= array[1..NombreMax] of Nom;
```

```
procedure Placer(Var T:tableau;deb,fin:integer;var pl:integer);


var i,a,b:integer;x:nom;inf,sup:tableau;

begin
x:=T[deb];pl:=deb;a:=0;b:=0;
for i:=deb+1 to fin do
    begin
    if T[i]>x then begin
                   b:=b+1;sup[b]:=T[i];
                   end
              else begin
                   a:=a+1;inf[a]:=T[i];
              end;
    end;
pl:=deb+a;T[pl]:=x;
for i:=1 to a do T[deb+i-1]:=inf[i];
for i:=1 to b do T[pl+i]:=sup[i];
end;
```

```
procedure tri(var T:tableau;deb,fin:integer);

var pl :integer;

Begin
if fin>deb then begin
                Placer(T,deb,fin,pl);
                if pl>deb then tri(T,deb,pl-1);
                if pl<fin then tri(T,pl+1,fin);
                end;
end;
```

Le programme principal:

```
var i,n:integer;T:tableau;

begin

Write('Donner n. n=');readln(n);
For i:=1 to n do
    begin
    write('Le nom numéro ', i,' : ');readln(T[i])
    end;

writeln;Writeln('Le tableau non trié est :');writeln;
For i:=1 to n do write(T[i],'  ');

tri(T,1,n);

writeln;writeln;writeln('Le tableau trié est :');writeln;
For i:=1 to n do write(T[i],'  ');
writeln;

end.
```

ceci donne :

```
Donner n. n=9
Le nom numéro 1 : GODEFROY
Le nom numéro 2 : MARECHAL
Le nom numéro 3 : PREVOST
Le nom numéro 4 : COINTE
Le nom numéro 5 : MENISSIER
Le nom numéro 6 : MOATY
Le nom numéro 7 : FALLAH
Le nom numéro 8 : KHIRAT
Le nom numéro 9 : WALD+PSG

Le tableau non trié est :

GODEFROY  MARECHAL  PREVOST  COINTE  MENISSIER  MOATY  FALLAH  KHIRAT  WALD+PSG


Le tableau trié est :

COINTE  FALLAH  GODEFROY  KHIRAT  MARECHAL  MENISSIER  MOATY  PREVOST  WALD+PSG
```