PARTIE I

40% du barème

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n = h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

$v_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; $\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

De plus $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $v_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Moyenne classe 13,01
max 20
min 7.2
ET 3.55

- $-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} \geqslant 0$ • la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $-v_n$.

Ainsi la série de terme général v_n converge.

abordé par 90% des candidats. Taux de réussite 15% dit le rapport du concours.

b) Posons $V = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n-1} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = \gamma_n - \gamma_1$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\gamma_n = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$. Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = V$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma_1 + V$. Donc la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

c) Soit t un réel strictement positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n = \gamma + \ln(t+n) - \ln n - \gamma_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n,t} = \gamma + \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - \gamma_n$. Or $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} d_{n,t} = \gamma + 0 - \gamma = 0$. $\lim_{n\to+\infty} d_{n,t} = 0$ et ceci pour tout réel t strictement positif.

R

Q2 a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$ ou $X_t \hookrightarrow \Gamma(1,t)$. $E(X_t) = 1 \times t$ et $V(X_t) = 1^2 \times t$.

$E(X_t) = t$ et $V(X_t) = t$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Le texte indique que $\int_0^{+\infty} \ln u \, e^{-u} u^{t-1} du$ existe et vaut $\Gamma'(t)$, $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 e^{-u} u^{t-1} du$ existe et vaut $\Gamma''(t)$ et $\forall u \in]0,+\infty[$, $f_{X_t}(u) = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{-u} u^{t-1}$.

Alors $\int_0^{+\infty} (\ln u) f_{X_t}(u) du$ existe et vaut $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ donc $\psi(t)$.

$\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 f_{X_t}(u) du$ existe et vaut $\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}$.

Soit $r \in [\![1,2]\!]$!! • X_t prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$ ... on pourrait dire $]0,+\infty[$ pour simplifier...

• X_t est une variable aléatoire à densité de densité f_{X_t}.

• $u \mapsto (\ln u)^r$ est continue sur $[0,+\infty[$ privé du seul point 0.

Le théorème de transfert indique que $E((\ln X_t)^r)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$ est absolument convergente et qu'en cas d'existence $E((\ln X_t)^r) = \int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$.

Notons que $u \mapsto (\ln u)^r f_{X_t}(u)$ garde un signe constant sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$ converge absolument si et seulement si elle converge.

Or nous avons vu que $\int_0^{+\infty} (\ln u) f_{X_t}(u) du$ et $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 f_{X_t}(u) du$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$ converge car $r \in [\![1,2]\!]$!

Ceci permet de dire que $E((\ln X_t)^r)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$.

Donc $E(\ln X_t)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} \ln u \, f_{X_t}(u) du$ soit $\psi(t)$.

$E((\ln X_t)^2)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 f_{X_t}(u) du$ soit $\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}$.

~~Alors $V(\ln X_t)$ existe et vaut $\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} - (\psi(t))^2$.~~

$$V(\ln X_t) = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} - \left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\right)^2 = \frac{\Gamma''(t)\Gamma(t) - (\Gamma'(t))^2}{(\Gamma(t))^2} = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(t) = \psi'(t).$$

Pour tout réel t strictement positif, $E(\ln X_t)$ et $V(\ln X_t)$ existent et :

$E(\ln X_t) = \psi(t)$ et $V(\ln X_t) = \psi'(t)$.

le texte aurait été inspiré de traiter $E(1/X_t^2)$ dans cette question

Q3 a) Soit t un réel strictement supérieur à 1.

- X_t prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$
- X_t est une variable aléatoire à densité de densité f_{X_t}.
- $u \mapsto \frac{1}{u}$ est continue sur $[0,+\infty[$ privé du seul point 0.

Alors $E\left(\frac{1}{X_t}\right)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_X(u)\,du$ est absolument convergente.

Or $\forall u \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{u} f_X(u) \geq 0$.

Donc $E\left(\frac{1}{X_t}\right)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_X(u)\,du$ converge. En cas d'existence $E\left(\frac{1}{X_t}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_X(u)\,du$.

$$\forall u \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{u} f_X(u) = \frac{1}{u}\frac{1}{\Gamma(t)} e^{-u} u^{t-1} = \frac{e^{-u} u^{(t-1)-1}}{\Gamma(t)} = \frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)} f_{X_{t-1}}(u) \underset{\substack{\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1) \\ t=(t-1)+1}}{=} \frac{1}{t-1} f_{X_{t-1}}(u)$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{t-1}}(u)\,du$ existe et vaut 1 donc

$\int_0^{+\infty} f_{X_{t-1}}(u)\,du$ existe et vaut également 1 car $f_{X_{t-1}}$ est nulle sur $]-\infty,0]$.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_{X_t}(u)\,du$ existe et vaut $\frac{1}{t-1}$. Ceci achève de montrer que

$\frac{1}{X_t}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t-1}$ lorsque $t \in]1,+\infty[$.

b) $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$ $\left(\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln'' x = -\frac{1}{x^2} \leq 0\right)$

la courbe représentative de $\ln$ est en dessous de toutes ses tangentes en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = \underbrace{(\ln' 1)}_{=1}(x-1) + \underbrace{\ln 1}_{=0}$

donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln x \leq (\ln' 1)(x-1) + \ln 1 = x-1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. 1er cas $x \geq 1$. Alors $0 \leq \ln x \leq x-1$.

Donc $(\ln x)^2 \leq (x-1)^2 \leq (x-1)^2 + \left(1-\frac{1}{x}\right)^2$.

2e cas $x < 1$. Alors $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq 0$; $0 \leq -\ln x \leq -\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

Donc $(-\ln x)^2 \leq \left(-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^2$. $(\ln x)^2 \leq \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 \leq \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln x)^2 \leq (x-1)^2 + \left(1-\frac{1}{x}\right)^2$.

c1 Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X_t(\omega) > 0$. $\frac{X_t(\omega)}{t} > 0$ donc $1 - \frac{1}{X_t(\omega)/t} \leq \ln\left(\frac{X_t(\omega)}{t}\right) \leq \frac{1}{t} X_t(\omega) - 1$.

1. $\forall t \in \Omega$, $X_t(\omega) > 0 \Rightarrow 1 - t \times \frac{1}{X_t(\omega)} \leq \ln(X_t(\omega)) - \ln t \leq \frac{1}{t} X_t(\omega) - 1$.

2. $P(X_t > 0) = 1$. Donc $P\left(1 - t \times \frac{1}{X_t} \leq \ln(X_t) - \ln t\right) = P\left(\ln X_t - \ln t \leq \frac{1}{t} X_t - 1\right) = 1$.

3. $E\left(1 - t \times \frac{1}{X_t}\right)$ possède une espérance qui vaut $1 - t \times \frac{1}{t-1}$ ou : $-\frac{1}{t-1}$;

$E(\ln(X_t))$ possède une espérance;

$\frac{1}{t} X_t - 1$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t} \times t - 1$ ou 0.

Le tout permet de dire que : $-\frac{1}{t-1} \leq E(\ln(X_t)) - \ln t \leq 0$ (croissance de l'espérance)

"Si $E(X)$ et $E(Y)$ existent et si $P(X \leq Y) = 1$: $E(X) \leq E(Y)$."

Donc $-\frac{1}{t-1} \leq E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq 0$.

Supposons que t est strictement supérieur à 2. Montrons que $\frac{1}{X_t^2}$ possède une espérance

- X_t est une variable à densité de densité f_{X_t}
- X_t prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$
- $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ privé du seul point 0.

Le théorème de transfert indique que $E\left(\frac{1}{X_t^2}\right)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f_{X_t}(u)\,du$ est absolument convergente ou ici convergente car

$\forall u \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{u^2} f_{X_t}(u) \geqslant 0$.

$\Gamma(t) = (t-1)(t-2)\Gamma(t-2)$

Or $\forall u \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{u^2} f_{X_t}(u) = \frac{1}{u^2} \frac{e^{-u} u^{t-1}}{\Gamma(t)} \overset{t>2}{=} \frac{\Gamma(t-2)}{\Gamma(t)} f_{X_{t-2}}(u) = \frac{1}{(t-1)(t-2)} f_{X_{t-2}}(u)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{t-2}}(u)\,du$ existe et vaut 1 et $f_{X_{t-2}}$ est nulle sur $]-\infty,0]$ donc $\int_0^{+\infty} f_{X_{t-2}}(u)\,du$ existe et vaut 1. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f_{X_t}(u)\,du$ converge et vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$.

Ce qui suffit pour dire que $E\left(\frac{1}{X_t^2}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$ ... lorsque $t>2$.

Reprenons $t>2$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X_t(\omega)>0$.

Alors $\ln^2 \frac{X_t(\omega)}{t} \leqslant \left(1-\frac{1}{X_t(\omega)/t}\right)^2 + \left(\frac{X_t(\omega)}{t}-1\right)^2 = 1 - \frac{2t}{X_t(\omega)} + \frac{t^2}{(X_t(\omega))^2} + \frac{(X_t(\omega)-t)^2}{t^2}$.

1°. $\forall \omega \in \Omega,\ X_t(\omega)>0 \Rightarrow \ln^2 \frac{X_t(\omega)}{t} \leqslant 1 - 2t \times \frac{1}{X_t(\omega)} + t^2 \frac{1}{(X_t(\omega))^2} + \frac{1}{t^2} \times (X_t(\omega)-t)^2$

2°. $P(X_t>0)=1$ ... donc presque sûrement $\ln^2 \frac{X_t}{t} \leqslant 1 - 2t \times \frac{1}{X_t} + t^2 \frac{1}{X_t^2} + \frac{1}{t^2}(X_t-t)^2$.

3°. $\to \ln^2 \frac{X_t}{t} = (\ln X_t - \ln t)^2 = (\ln X_t)^2 - 2\ln t \ln X_t + (\ln t)^2$. Or $E((\ln X_t)^2)$ et $E(\ln X_t)$ existent donc $\ln^2 \frac{X_t}{t}$ possède une espérance.

$\Rightarrow \frac{1}{X_t}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t-1}$, $\frac{1}{X_t^2}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$ et $(X_t-t)^2 = (X_t - E(X_t))^2$ possède une espérance qui vaut $V(X_t)$ donc t. Alors $1 - 2t \times \frac{1}{X_t} + t^2 \times \frac{1}{X_t^2} + \frac{1}{t^2}(X_t-t)^2$ possède une espérance qui vaut $1 - 2t\frac{1}{t-1} + t^2 \frac{1}{(t-1)(t-2)} + \frac{1}{t^2} t$.

$1 - \frac{2t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t(t-1)(t-2)}\left[t(t-1)(t-2) - 2t^2(t-2) + t^3 + (t-1)(t-2)\right] = \frac{2t^2-t+2}{t(t-1)(t-2)}$

Dans ces conditions : $E\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t^2-t+2}{t(t-1)(t-2)} \underset{t>2}{\leq} \frac{2t^2}{t(t-1)(t-2)} \underset{\frac{1}{t-1}\leq\frac{1}{t-2}}{\leq} \frac{2t}{(t-2)^2}$

Si $t>2$: $E\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$.

d) $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

$t+n>2$. Alors $\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2$ est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui possède une espérance. L'inégalité de Markov donne alors :

$$0 \leq P\left(\left|\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2\right)}{\varepsilon^2} \underset{t+n>2}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{n}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{n} = 0$. Par encadrement il vient alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\ln \frac{X_{t+n}}{t+n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\omega \in \{|D_n| > \varepsilon\}$. Supposons que $\omega \notin \{|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|C_n| > \frac{\varepsilon}{3}\}$

Alors $|A_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|B_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|C_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Donc $|D_n(\omega)| = |A_n(\omega) + B_n(\omega) + C_n(\omega)| \leq |A_n(\omega)| + |B_n(\omega)| + |C_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$

Et ainsi $|D_n(\omega)| \leq \varepsilon$!! Donc $\omega \in \{|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|C_n| > \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \{|D_n| > \varepsilon\} \subset \{|A_n| \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|C_n| > \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Remarque.. $\forall V_1 \in \mathcal{A}, \forall V_2 \in \mathcal{A}$, $P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2) \leq P(V_1) + P(V_2)$.

Alors $\forall (V_1, V_2, V_3) \in \mathcal{A}^3$, $P(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \leq P(V_1 \cup V_2) + P(V_3) \leq P(V_1) + P(V_2) + P(V_3)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\{|D_n|>\varepsilon\} \subset \{|A_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|B_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|C_n|>\varepsilon/3\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|D_n|>\varepsilon) \leqslant P(\{|A_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|B_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|C_n|>\varepsilon/3\})$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P(|D_n|>\varepsilon) \leqslant P(|A_n|>\varepsilon/3) + P(|B_n|>\varepsilon/3) + P(|C_n|>\varepsilon/3)$.

Or $(A_n)_{n\geqslant 1}$, $(B_n)_{n\geqslant 1}$ et $(C_n)_{n\geqslant 1}$ convergent en probabilité vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|A_n|>\varepsilon/3) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|B_n|>\varepsilon/3) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|C_n|>\varepsilon/3) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(P(|A_n|>\varepsilon/3) + P(|B_n|>\varepsilon/3) + P(|C_n|>\varepsilon/3)\Big) = 0$

Par encadrement il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|D_n|>\varepsilon)$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0... ou vers la variable certaine nulle.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$. $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $|u_n-u| < \varepsilon/2$.
Soit $n \in [\![p,+\infty[\![$.
$\forall \omega \in \Omega$, $|V_n(\omega)| = |D_n(\omega) + u_n - u| \leqslant |D_n(\omega)| + |u_n-u| < |D_n(\omega)| + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall \omega \in \Omega$, $|V_n(\omega)| > \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < |D_n(\omega)| + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |D_n(\omega)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\{|V_n|>\varepsilon\} \subset \{|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}$; $P(|V_n|>\varepsilon) \leqslant P(|D_n| > \frac{\varepsilon}{2})$.

$\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leqslant P(|V_n|>\varepsilon) \leqslant P(|D_n|>\frac{\varepsilon}{2})$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|D_n|>\frac{\varepsilon}{2}) = 0$ car $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|V_n|>\varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0... ou vers la variable certaine nulle.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|(N+u+V_n)-(N+u)| \geqslant \varepsilon) = P(|V_n| \geqslant \varepsilon)$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|(N+u+V_n)-(N+u)| \geqslant \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|V_n| \geqslant \varepsilon) = 0$

Ainsi $(N+u+V_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable $N+u$.

c) Notons F_Π et F_{N+U} les fonctions de répartition de Π et $N+U$.

F_Π et F_{N+U} sont continues sur $\mathbb{R}$ car Π et $N+U$ sont des variables aléatoires à densité (N est une variable aléatoire à densité... aussi)

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $N+D_n+U_n = N+U+V_n$.

Alors $(N+D_n+U_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $N+U$. Donc $(N+D_n+U_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $N+U$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(N+D_n+U_n\leq x) = F_{N+U}(x)$ (... car F_{N+U} est continue en tout point de $\mathbb{R}$).

Or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, Π et $N+D_n+U_n$ ont même loi. suite constante !

Donc $F_{N+U}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(N+D_n+U_n\leq x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(\Pi\leq x) = P(\Pi\leq x) = F_\Pi(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{N+U}(x) = F_\Pi(x)$. Π et $N+U$ ont même loi car même fonction de répartition.

Q5 a) X_α et X_β prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et même dans $\mathbb{R}_+^*$...

Alors $T_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $Q_{\alpha,\beta} = \ln T_{\alpha,\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Posons $U_\alpha = \ln X_\alpha$ et notons F_{U_α} sa fonction de répartition. Notons F_{X_α} la fonction de répartition de X_α.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{U_\alpha}(x) = P(\ln X_\alpha\leq x) = P(X_\alpha\leq e^x) = F_{X_\alpha}(e^x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-x}x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$

f_{X_α} est continue sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi F_{X_α} est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $F'_{X_\alpha}(x) = f_{X_\alpha}(x)$.

$x\mapsto e^x$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x\in\mathbb{R}_+^*$ et F_{X_α} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition F_{U_α} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'_{U_\alpha}(x) = e^x F'_{X_\alpha}(e^x) = e^x f_{X_\alpha}(e^x)$.

Donc U_α est une variable aléatoire à densité et $f_{U_\alpha}: x\mapsto e^x f_{X_\alpha}(e^x)$ en est une densité.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{U_\alpha}(x) = \underset{e^x>0}{e^x}\,\dfrac{e^{-e^x}(e^x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \dfrac{e^{-e^x+\alpha x}}{\Gamma(\alpha)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{U_\alpha}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-e^x+\alpha x}$

Pour $V_\beta = \ln X_\beta$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{V_\beta}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\, e^{-e^x+\beta x}$.

V_β est également une variable aléatoire à densité et f_{V_β} en est une densité.

Alors $-V_\beta = -\ln X_\beta$ est également une variable aléatoire à densité et $f_{-V_\beta} : x \mapsto f_{V_\beta}(-x)$ en est une densité. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{-V_\beta}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\, e^{-e^{-x}-\beta x}$.

b) Notons que $Q_{\alpha,\beta} = \ln T_{\alpha,\beta} = \ln \dfrac{X_\alpha}{X_\beta} = \ln X_\alpha - \ln X_\beta = U_\alpha + (-V_\beta)$.

* U_α et $(-V_\beta)$ sont des variables aléatoires à densité de densité f_{U_α} et f_{-V_β}.
* $U_\alpha = \ln X_\alpha$ et $-V_\beta = -\ln X_\beta$ sont indépendantes car X_α et X_β sont indépendantes.
* Considérons $\varphi : x \mapsto e^{-e^x+\alpha x}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (-e^x+\alpha)\varphi(x)$.

De plus $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty}(-e^x+\alpha x) = \lim_{x\to-\infty}(-e^x+\alpha x) = -\infty$.

x	$+\infty$		$\ln\alpha$		$-\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\hat{M}$	$\searrow$	0

$\hat{M} = \varphi(\ln\alpha)$.

Ainsi φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Donc $f_{U_\alpha} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

On peut alors dire que $Q_{\alpha,\beta}$ est une variable aléatoire à densité et

$f_{Q_{\alpha,\beta}} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_\alpha}(y)\, f_{-V_\alpha}(x-y)\,dy$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^y+\alpha y}\, e^{-e^{-(x-y)}-\beta(x-y)}\,dy.$$

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y}\, e^{-e^y(1+e^{-x})}\,dy.$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. $y \mapsto e^y(1+e^{-x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie le changement de variable $u = e^y(1+e^{-x})$ dans ce qui suit.

$$\int_A^B e^{(\alpha+\beta)y} e^{-e^y(1+e^{-x})}\,dy = \int_{e^A(1+e^{-x})}^{e^B(1+e^{-x})} \left(\frac{u}{1+e^{-x}}\right)^{\alpha+\beta} e^{-u}\,\frac{du}{u} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}} \int_{e^A(1+e^{-x})}^{e^B(1+e^{-x})} f_{X_{\alpha+\beta}}(u)\,du$$

$$\begin{cases} u = e^y(1+e^{-x}) \\ du = e^y(1+e^{-x})\,dy = u\,dy \end{cases}$$

$$f_{X_{\alpha+\beta}}(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} \text{ si } u>0$$

Or 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} e^{-e^y(1+e^{-x})}\,dy$ converge.

2) $\lim_{A \to -\infty} e^A(1+e^{-x}) = 0$ et $\lim_{B \to +\infty} e^B(1+e^{-x}) = +\infty$

3) $\int_0^{+\infty} f_{X_{\alpha+\beta}}(u)\,du$ converge et vaut 1.

Alors en faisant tendre A vers $-\infty$ puis B vers $+\infty$ il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)y} e^{-e^y(1+e^{-x})}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}}.$$

Alors $f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \dfrac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}} = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \dfrac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}}.$

En multipliant haut et bas par $e^{(\alpha+\beta)x}$ il vient :

$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \dfrac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^{\alpha+\beta}}$ et ceci pour tout réel x.

Remarques. 1. $Q_{\alpha,\beta}$ suit la loi bêta de deuxième espèce de paramètres α et β.

2. $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ ... voir plus loin (Q5 e ; fin de la page 13).

3. $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition $F_{Q_{\alpha,\beta}}$ de $Q_{\alpha,\beta}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = f_{Q_{\alpha,\beta}}(x)$.

d) $T_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Notons $F_{T_{\alpha,\beta}}$ sa fonction de répartition.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = 0$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = P\left(\dfrac{X_\alpha}{X_\beta} \leq x\right) = P(\ln X_\alpha - \ln X_\beta \leq \ln x) = F_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x)$

$F_{T_{\alpha,\beta}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ car $F_{T_{\alpha,\beta}}$ est nulle sur $]-\infty, 0]$.

$x \mapsto \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F_{\varphi_{\alpha,\beta}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition

$F_{T_{\alpha,\beta}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Alors $\underline{F_{T_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$ et continue à gauche en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) = 0 = F_{T_{\alpha,\beta}}(0)$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $F_{T_{\alpha,\beta}}$ est continue à droite en 0.

Finalement $\underline{F_{T_{\alpha,\beta}} \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{T_{\alpha,\beta} \text{ est une variable aléatoire à densité}}}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = 0$ et $F'_{T_{\alpha,\beta}}(x) = 0$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = F_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x)$ et $F'_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \dfrac{1}{x} F'_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) = \dfrac{1}{x} f_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x)$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{x} f_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) \end{cases}$.

$f_{T_{\alpha,\beta}}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{T_{\alpha,\beta}}$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. $\underline{\underline{f_{T_{\alpha,\beta}} \text{ est une densité de } T_{\alpha,\beta}}}$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. $f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \dfrac{1}{x} f_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) = \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \dfrac{e^{\alpha \ln x}}{(1 + e^{\ln x})^{\alpha+\beta}}$.

$$\underline{\underline{\forall x \in]0, +\infty[,\ f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}}} \text{ et } \underline{\underline{\forall x \in]-\infty, 0],\ f_{\alpha,\beta}(x) = 0}}.$$

c) $J_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta} = \dfrac{1}{1 + \underline{\underline{T_{\beta,\alpha}}}}$ et $T_{\beta,\alpha}$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Alors $J_{\alpha,\beta}$ prend ses valeurs dans $]0,1[$. Notons $F_{J_{\alpha,\beta}}$ sa fonction de répartition.

$\forall z \in]-\infty,0]$, $F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = 0$; $\underline{F_{J_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty,0]}$

$\forall z \in [1,+\infty[$ $F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = 1$; $\underline{F_{J_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1,+\infty[}$.

$\forall z \in]0,1[$, $F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = P\left(\dfrac{1}{1+T_{\beta,\alpha}} \leq z\right) \underset{*}{=} P\left(\dfrac{1}{z} \leq 1 + T_{\beta,\alpha}\right) = P\left(\dfrac{1-z}{z} \leq T_{\beta,\alpha}\right)$.

$*\begin{cases} 1+T_{\beta,\alpha} \text{ prend ses valeurs dans }]1,+\infty[. \\ z>0 \end{cases}$

$\forall z \in]0,1[$, $F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = 1 - P\left(T_{\beta,\alpha} < \dfrac{1-z}{z}\right) = 1 - P\left(T_{\beta,\alpha} \leq \dfrac{1-z}{z}\right) = 1 - F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\dfrac{1-z}{z}\right)$.

$f_{T_{\beta,\alpha}}$ est au moins continue sur $\mathbb{R}^{*}$ donc $F_{T_{\beta,\alpha}}$ est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*}$ et

$\forall z \in \mathbb{R}^{*}$, $F'_{T_{\beta,\alpha}}(z) = f_{T_{\beta,\alpha}}(z)$.

$z \mapsto \dfrac{1-z}{z}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et $\forall z \in]0,1[$, $\dfrac{1-z}{z} \in \mathbb{R}^{*}$

Par composition $\underline{F_{J_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,1[}$.

Ainsi
- $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
- $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue à gauche en 0 et à droite en 1.

$\lim\limits_{z \to 0^+} F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \lim\limits_{z \to 0^+} \left(1 - F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\dfrac{1-z}{z}\right)\right) \underset{*}{=} 1 - 1 = 0 = F_{J_{\alpha,\beta}}(0)$; $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue à droite en 0.

$*\ \lim\limits_{z \to 0^+} \dfrac{1-z}{z} = +\infty$

$\lim\limits_{z \to 1^-} F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \lim\limits_{z \to 1^-} \left(1 - F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\dfrac{1-z}{z}\right)\right) = 1 - F_{T_{\beta,\alpha}}(0) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_{T_{\beta,\alpha}}(u)\,du = 1 - 0 = 1 = F_{J_{\alpha,\beta}}(1)$;

$F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue à gauche en 1.

Finalement $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci achève de montrer que $J_{\alpha,\beta}$ est une variable aléatoire à densité.

$F_{J_{\alpha,\beta}}$ est constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$. $\forall z\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ F'_{J_{\alpha,\beta}}(z)=0.$

$\forall z\in]0,1[,\ F_{J_{\alpha,\beta}}(z)=1-F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\frac{1-z}{z}\right)$. Soit $z\in]0,1[$. $\frac{1-z}{z}=\frac{1}{z}-1$.

$$F'_{J_{\alpha,\beta}}(z)=0-\left(-\frac{1}{z^2}\right)f_{T_{\beta,\alpha}}\left(\frac{1-z}{z}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1-z}{z}\in]0,+\infty[}}{=}\frac{1}{z^2}\times\frac{1}{B(\beta,\alpha)}\times\frac{\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\beta-1}}{\left(1+\frac{1-z}{z}\right)^{\beta+\alpha}}.$$

$B(\beta,\alpha)=B(\alpha,\beta)$

$$F'_{J_{\alpha,\beta}}(z)\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\times\frac{(1-z)^{\beta-1}}{z^{\beta-1}\,(1/z)^{\beta+\alpha}}=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,z^{-2-(\beta-1)+\beta+\alpha}(1-z)^{\beta-1}$$

$$F'_{J_{\alpha,\beta}}(z)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}.$$

$\forall z\in]0,1[,\quad \underline{F'_{J_{\alpha,\beta}}(z)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}.}$

Posons $\forall z\in\mathbb{R},\ f_{J_{\alpha,\beta}}(z)=\begin{cases}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} & \text{si } z\in]0,1[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

$f_{J_{\alpha,\beta}}$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{J_{\alpha,\beta}}$ sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

$\underline{f_{J_{\alpha,\beta}}\text{ est une densité de } J_{\alpha,\beta}=\frac{X_\alpha}{X_\alpha+X_\beta}}.$ $J_{\alpha,\beta}$ suit la loi bêta de première espèce de paramètres α et β.

<u>Remarque</u> : $\int_{-\infty}^{+\infty}f_{J_{\alpha,\beta}}(z)\,dz$ existe et vaut 1. Donc $\int_0^1 f_{J_{\alpha,\beta}}(z)\,dz$ existe et vaut 1.

Ainsi $\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz$ existe et vaut $B(\alpha,\beta)$ ou $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. $\quad B(\alpha,\beta)=\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz$

R

PARTIE II — 358 du barème

Q6 * $S_0(\Omega)=\{0\}$ et $P(S_0=0)=1$. $E(S_0)=0$ et $V(S_0)=0$

* Soit $k\in\mathbb{N}^*$. 1) $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ sont indépendantes

2) $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $Y_i\hookrightarrow \Gamma(1,1)$

le cours indique alors que $Y_1+\dots+Y_k \hookrightarrow \Gamma(1,k)$ ou $S_k \hookrightarrow \gamma(k)$.

Alors $E(S_k)=k$ et $V(S_k)=k$.

Q7 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{X_t+S_{k-1}}{X_t+S_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(X_t+S_{k-1})-\ln(X_t+S_k)\right]=\ln(X_t+S_0)-\ln(X_t+S_n)$

En remarquant que $S_0=0$ il vient : $\ln(X_t)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{X_t+S_{k-1}}{X_t+S_k}\right)+\ln(X_t+S_n)$.

⚠ b) Ici nous élargissons l'hypothèse insuffisante du texte en supposant que : les variables aléatoires de la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et la variable aléatoire X_α sont (mutuellement) indépendantes pour tout réel α strictement positif.

Soit $m\in\mathbb{N}^*$. $Y_1, Y_2,\dots, Y_m, X_t$ sont indépendantes, alors S_m et X_t sont indépendantes. De plus $S_m \hookrightarrow \gamma(m)$ ou $S_m\hookrightarrow\Gamma(1,m)$, et $X_t\hookrightarrow\gamma(t)$ ou $X_t\hookrightarrow\Gamma(1,\alpha)$

Alors X_t+S_m suit la loi gamma de paramètre $t+m$.

Or X_{t+m} suit la loi gamma de paramètre $t+m$.

Ainsi X_t+S_m et X_{t+m} ont même loi pour tout m dans $\mathbb{N}^*$.

Ceci vaut, pour tout m dans $\mathbb{N}$, la loi de X_t+S_m est celle de X_{t+m}.

Q8 a) $R_{t,1}=\frac{X_t+S_0}{X_t+S_1}=\frac{X_t}{X_t+Y_1}$. $R_{t,2}=\frac{X_t+S_1}{X_t+S_2}=\frac{X_t+Y_1}{X_t+Y_1+Y_2}$.

X_t et Y_1 sont indépendantes, $X_t\hookrightarrow\gamma(t)$ et $Y_1\hookrightarrow\gamma(1)$. Alors d'après le troisième point admis : $\frac{X_t}{X_t+Y_1}$ et X_t+Y_1 sont indépendantes

Comme les variables X_t, Y_1, Y_2 sont indépendantes :

$\frac{X_t}{X_t+Y_1}$, X_t+Y_1 et Y_2 sont indépendantes. Alors

d'après le premier point admis, $\frac{X_t}{X_t+Y_1}$ et $\frac{X_t+Y_1}{X_t+Y_1+Y_2}$ sont indépendantes

car $u \mapsto u$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(u,v) \to \frac{u}{u+v}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

Ainsi $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes.

b) Ici nous étendons encore les hypothèses d'indépendance en supposant que : les variables aléatoires des suites $(X_{t+k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont (mutuellement indépendantes).

Rappel ! Soient $\hat{U}, \hat{V}, \hat{U}', \hat{V}'$ quatre variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On suppose que :
1) $\hat{U}$ et $\hat{U}'$ ont même loi.
2) $\hat{V}$ et $\hat{V}'$ ont même loi
3) $\hat{U}$ et $\hat{V}$ sont indépendantes
4) $\hat{U}'$ et $\hat{V}'$ sont indépendantes.

Alors $\hat{U}+\hat{V}$ et $\hat{U}'+\hat{V}'$ ont même loi. Résultat que l'on peut généraliser à des sommes finies

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{X_t}{X_t+S_n}$ et X_t+S_n sont indépendantes car X_t et S_n sont indépendantes et $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$ et $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Alors $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $\ln(X_t+S_n)$ sont indépendantes.

Notons alors qu'avec la seconde extension de l'indépendance proposée :

$\frac{X_t}{X_t+S_n}$ et X_{t+n} sont indépendantes. Donc $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $\ln X_{t+n}$ sont également indépendantes.

De plus $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ a même loi que $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ (!!) et $\ln(X_t+S_n)$ et

$\ln X_{t+n}$ ont même loi puisque X_{t+n} et X_t+S_n ont même loi ($X_{t+n} \hookrightarrow \gamma(t+n)$

et $X_t+S_n \hookrightarrow \gamma(t+n)$ car $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$, $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$ et X_t et S_n sont indépendantes).

Le rappel permet de dire que $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} + \ln(X_t+S_n)$ a même loi que

$\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} + \ln X_{t+n}$.

Notons alors que $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} = \ln\left(\prod_{\ell=1}^{n} \frac{X_t+S_{\ell-1}}{X_t+S_\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \ln \frac{X_t+S_{\ell-1}}{X_t+S_\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell}$

De plus $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} + \ln(X_t+S_n) = \ln X_t$.

Alors $\ln X_t$ et $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} + \ln X_{t+n}$ ont même loi.

(Q9) a) Posons $V = -\ln U$. Notons F_U et F_V les fonctions de répartition de U et V.

Rappelons que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])$. V prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$.

$\forall x \in]-\infty, 0[, F_V(x) = 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[, F_V(x) = P(-\ln U \leq x) = P(U \geq e^{-x})$.

$\forall x \in [0,+\infty[, F_V(x) = 1 - P(U < e^{-x}) = 1 - P(U \leq e^{-x}) = 1 - F_U(e^{-x})$.

$\uparrow$ U à densité

Rappelons que $\forall z \in [0,1], F_U(z) = z$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[, F_V(x) = 1 - e^{-x}$. $\forall x \in \mathbb{R}, F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 1-e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$

Donc $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$-\ln U$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $R_{t,k} = \dfrac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k} = \dfrac{X_t + S_{k-1}}{(X_t + S_{k-1}) + Y_k}$.

1) $X_t + S_{k-1} \hookrightarrow \gamma(t+k-1)$ (y compris lorsque $k=1$)

2) $Y_k \hookrightarrow \gamma(1)$

3) $X_t + S_{k-1}$ et Y_k sont indépendantes.

Nous pouvons alors utiliser I Q 5 e) pour dire que $R_{t,k}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_{J_{t+k-1,1}}$.

$\forall z \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, $f_{J_{t+k-1,1}}(z) = 0$.

$\forall z \in]0,1[$, $f_{J_{t+k-1,1}}(z) = \dfrac{1}{B(t+k-1,1)} z^{t+k-2}$.

or $B(t+k-1,1) = \dfrac{\Gamma(t+k-1)\Gamma(1)}{\Gamma((t+k-1)+1)} = \dfrac{\Gamma(t+k-1)\times 1}{(t+k-1)\Gamma(t+k-1)} = \dfrac{1}{t+k-1}$.

donc $\forall z \in \mathbb{R}$, $f_{J_{t+k-1,1}}(z) = \begin{cases} (t+k-1) z^{t+k-2} & \text{si } z \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

c) Posons $H = U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$. Notons F_H la fonction de répartition de H.

H prend ses valeurs dans $]0,1]$. $\forall z \in]-\infty, 0]$, $F_H(z) = 0$ et $\forall z \in [1, +\infty[$, $F_H(z) = 1$.

Soit $z \in]0,1[$. $F_H(z) = P(U_k^{\frac{1}{t+k-1}} \leq z) = P(U_k \leq z^{t+k-1}) \underset{\uparrow}{=} z^{t+k-1}$.

$z^{t+k-1} \in]0,1[$

$\forall z \in \mathbb{R}$, $F_H(z) = \begin{cases} z^{t+k-1} & \text{si } z \in]0,1[\\ 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[\end{cases}$.

F_H est de classe C^1 sur $]0,1[$, $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$. En particulier F_H est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$, continue à gauche en 0 et à droite en 1.

$\lim_{z \to 0^+} F_H(z) = \lim_{z \to 0^+} z^{t+\ell-1} = 0 = F_H(0)$; F_H est continue à droite en 0.

$\lim_{z \to 1^-} F_H(z) = \lim_{z \to 1^-} z^{t+\ell-1} = 1 = F_H(1)$; F_H est continue à gauche en 1.

Finalement F_H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. H est une variable aléatoire à densité.

$\forall z \in]0,1[$, $F'_H(z) = (t+\ell-1) z^{t+\ell-2}$ et $\forall z \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $F'_H(z) = 0$.

Alors $f_{J_{t+\ell-1,1}}$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide

avec F'_H sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors $f_{J_{t+\ell-1,1}}$ est une densité de $H = U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ ... et de $R_{t,\ell}$.

donc $R_{t,\ell}$ et $U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ ont même loi.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma$ et simplifions.

$$T_n = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}}_{a_n} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{Y_\ell}{t+\ell-1} + \ln(X_{t+n}) - \ln(t+n) + \gamma + \ln(t+n) - \ln n - \gamma = -\sum_{\ell=1}^{n} \frac{Y_\ell}{t+\ell-1} + \ln(X_{t+n})$$

$$T_n = \sum_{\ell=1}^{n} \left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right) + \ln(X_{t+n}).$$

. Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$. Y_ℓ a même loi que $-\ln U_\ell$ d'après a.

Alors $-Y_\ell$ a même loi que $\ln U_\ell$ et $-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ a même loi que $\frac{1}{t+\ell-1} \ln U_\ell$.

Pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ a même loi que $\ln U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$

Or pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ a même loi que $R_{t,\ell}$ donc $\ln U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ a même loi que $\ln R_{t,\ell}$. Ainsi pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ a même loi que $\ln R_{t,\ell}$.

De plus 1) $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes donc $-\frac{Y_1}{t}, -\frac{Y_2}{t+1}, \dots, -\frac{Y_n}{t+n-1}$ sont indépendantes

2) $R_{t,1}, R_{t,2}, \dots, R_{t,n}$ sont indépendantes donc $\ln R_{t,1}, \ln R_{t,2}, \dots, \ln R_{t,n}$ sont indépendantes.

Le rappel permet de dire alors que $\sum_{\ell=1}^{n} -\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ et $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell}$ ont même loi.

De plus $\sum_{\ell=1}^{n} \left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right)$ et X_{t+n} sont indépendantes ; $\sum_{\ell=1}^{n} \left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right)$ et $\ln X_{t+n}$ aussi.

Nous avons également vu que $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} = \ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $\ln X_{t+n}$ sont indépendantes (fin de la page 15).

Alors $\sum_{\ell=1}^{n} \left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right) + \ln X_{t+n}$ et $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} + \ln X_{t+n}$ ont même loi.

Or la loi de $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} + \ln X_{t+n}$ est la même que celle de $\ln X_t$.

Ainsi $T_n = \sum_{\ell=1}^{n} \left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right) + \ln X_{t+n}$ a même loi que $\ln X_t$.

Finalement $\ln X_t$ a même loi que $\sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma$.

(Q10) Notons que : 1) $E(\ln X_t)$ existe et vaut $\psi(t)$.

2) $E(Y_{\ell+1})$ existe et vaut 1 pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

3) d'après Q3 c) $E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$ existe et

$-\frac{1}{t+n-1} \leq E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne par encadrement $\lim_{n\to+\infty} E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) = 0$.

4) La suite $(d_{n,t})_{n\geq 1}$ converge vers 0 d'après 1.c

d'après 9 $\ln X_t$ et $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}-\gamma$ ont même loi donc même espérance. Ce qui précède et la linéarité de l'espérance donne :

$$E(\ln X_t)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{E(Y_{\ell+1})}{t+\ell}\right)+E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)+d_{n,t}-\gamma.$$

Donc $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)=E(\ln X_t)-E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)-d_{n,t}+\gamma$ (car $E(Y_{\ell+1})=1$).

Alors $\lim_{n\to+\infty}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)=E(\ln X_t)-0-0+\gamma$.

La série de terme général $\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}$ converge et $\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)=E(\ln X_t)+\gamma$.

Ainsi $\underline{\underline{E(\ln X_t)=\psi(t)=-\gamma+\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)}}$.

1) $V(\ln X_t)$ existe et vaut $\psi'(t)$.

2) $V(Y_{\ell+1})$ existe et vaut 1 pour tout $\ell\in\mathbb{N}$.

3) $V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$ existe pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout $n\in[[2,+\infty[[$:

$0\leq E\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\leq\frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}=0$ il vient par encadrement $\lim_{n\to+\infty}E\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[E\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)-\left(E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\right)^2\right]=0-0^2=0$.

4) Les variables aléatoires $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ et $\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)$ sont indépendantes pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Même chose pour $-\frac{Y_1}{t},-\frac{Y_2}{t+1},\dots,-\frac{Y_n}{t+n-1}$ et $\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)$.

5) $\ln X_t$ a même loi que $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}-\gamma$.

Ce qui précède donne alors :

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = V\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma\right).$$

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = V\left(-\frac{Y_1}{t} - \frac{Y_2}{t+1} - \dots - \frac{Y_n}{t+n-1} + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell+1} + d_{n,t} - \gamma\right)$$

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = V\left(-\frac{Y_1}{t}\right) + V\left(-\frac{Y_2}{t+1}\right) - \dots - V\left(\frac{Y_n}{t+n-1}\right) + V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$$

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{V(Y_{\ell+1})}{(t+k)^2} + V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(t+k)^2} + V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right).$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(t+k)^2} = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(V(\ln X_t) - V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\right) = V(\ln(X_t)).$

Alors la série de terme général $\frac{1}{(t+k)^2}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2} = V(\ln(X_t)) = \psi'(t)$

donc $V(\ln X_t) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2}.$

Q11 $\forall t \in]1, +\infty[, \ -\frac{1}{t-1} \leq E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) = E(\ln X_t - \ln t) \leq 0.$

$\forall t \in]1, +\infty[, \ -\frac{1}{t-1} \leq E(\ln X_t) - \ln t \leq 0.$

$\forall t \in]1, +\infty[, \ -\frac{1}{t-1} \leq \psi(t) - \ln t \leq 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{t-1}\right) = 0$

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{t \to +\infty} (\psi(t) - \ln t) = 0.$

Q12 • G_p est une fonction du p-échantillon $(W_1, W_2, \dots, W_p)$ i.i.d. de la loi de $W = U^{1/\gamma}$ alors G_p est une statistique $-p\left(\sum_{i=1}^{p}\ln W_i\right)^{-1}$.

Ainsi, d'après le programme, G_p est un estimateur du paramètre ρ.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. W_i a même loi que W donc $\ln W_i$ a même loi que $\ln W = \frac{1}{\rho}\ln U$.

Alors $-\rho \ln W_i$ a même loi que $-\ln U$ donc $-\rho \ln W_i \hookrightarrow \Gamma(1)$.

Alors $\sum_{i=1}^{p}(-\rho \ln W_i) \hookrightarrow \Gamma(p)$ car $-\rho \ln W_1, -\rho \ln W_2, \dots, -\rho \ln W_p$ sont indépendantes.

Donc $\sum_{i=1}^{p}(-\rho \ln W_i)$ suit la même loi que X_p.

Donc $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p}(-\rho \ln W_i)}$ suit la même loi que $\dfrac{1}{X_p}$. Or $\dfrac{1}{X_p}$ possède une espérance

qui vaut $\dfrac{1}{p-1}$ (Q 3 a) car $p > 1$!)

Donc $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p}(-\rho \ln W_i)}$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{p-1}$.

Donc $\dfrac{p}{\sum_{i=1}^{p}(-\ln W_i)}$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{p\rho}{p-1}$. Or $\dfrac{p}{\sum_{i=1}^{p}(-\ln W_i)} = G_p$.

Donc $\underline{\underline{E(G_p) \text{ existe et vaut } \frac{p}{p-1}\rho}}$.

<u>G_p n'est pas un estimateur sans biais de ρ.</u> <u>G_p est biaisé.</u>

Mais $\lim_{p\to+\infty} E(G_p) = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{p}{p-1}\rho\right) = \rho$; <u>G_p est un estimateur asymptotiquement</u>

<u>sans biais de ρ.</u> Montrons que G_p converge en probabilité vers ρ.

$p > 3$ donc $\left(\dfrac{1}{X_p}\right)^2$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$ comme nous

l'avons vu p 5 (ici $p > 3$).

Alors $\left(\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p}(-\rho \ln W_i)}\right)^2$ possède une espérance qui vaut également $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$

Alors $E(G_p^2)$ existe et vaut $\dfrac{(\beta p)^2}{(p-1)(p-2)}$.

$(G_p-\beta)^2 = G_p^2 - 2\beta\, G_p + \beta^2$. Or G_p^2 et G_p possèdent une espérance.

Ainsi $E((G_p-\beta)^2)$ existe et vaut $E(G_p^2) - 2\beta E(G_p) + \beta^2$.

$E((G_p-\beta)^2) = \dfrac{(\beta p)^2}{(p-1)(p-2)} - 2\beta \dfrac{p}{p-1}\beta + \beta^2 = \dfrac{\beta^2}{(p-1)(p-2)}\left[p^2 - 2p(p-2) + (p-1)(p-2)\right]$.

$E((G_p-\beta)^2) = \dfrac{(p+2)\beta^2}{(p-1)(p-2)}$. Notons que $\lim\limits_{p\to+\infty} E((G_p-\beta)^2) = 0$.

d'après Markov :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq P(|G_p-\beta| \geq \varepsilon) = P((G_p-\beta)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{E((G_p-\beta)^2)}{\varepsilon^2}$ car $(G_p-\beta)^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et possède une espérance.

Donc, par encadrement, on a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{p\to+\infty} P(|G_p-\beta| \geq \varepsilon) = 0$.

G_p est un estimateur convergent de β.

(Q13) a) random fournit un nombre au hasard de l'intervalle $[0,1[$

1-random fournit un nombre au hasard de l'intervalle $]0,1]$

1-random simule alors une loi uniforme sur un intervalle (!) d'extrémités

0 et 1 ...

Alors $-\ln(1-\text{random})$ simulera une loi exponentielle de paramètre 1

d'après Q9a et $-\ln(1-\text{random})/\text{lambda}$ simuler une loi exponentielle

de paramètre λ (rappel.. si $X \hookrightarrow \Gamma(b,r)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha X \hookrightarrow \Gamma(\alpha b, r)$).

cette fonction simule une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle

de paramètre λ.

G

b)
```
Program HEC2010;

function X(lambda:real):real;

begin

X:=-ln(1-random)/lambda;
end;
```

```
function g(n:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to n do s:=s+X(1);
g:=s;
end;
```

← une fonction g utilisant X

```
function g2(n:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to n do s:=s-ln(1-random);
g2:=s;
end;
```

← une fonction g qui n'utilise pas X .

```
function m(p:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to p do s:=s-ln(1-random);
m:=p/s;
end;
```

← une fonction m qui n'utilise ni X ni g .

```
var k:integer;


begin
randomize;

for k:=1 to 100 do
writeln(m(10*k));
readln;

end.
```

← on appelle m pour des valeurs de p de plus en plus grandes

cf comme $\left(\frac{p}{X_p}\right)_{p\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 on doit constater que l'on obtient des valeurs qui se rapprochent de 0. Ce n'est pas évident lorsque l'on exécute le programme ...

⚠

Dans la suite nous supposerons que si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs deux à deux distincts, l'ensemble des variables aléatoires appartenant aux suites $(X_{a_n})_{n\geq 0}$ et $(Y_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes.

PARTIE III Quelques propriétés de la fonction Γ.

Q15 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$

Indices pairs ! Indices impairs !

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{a_{2k+1}}{t+2k}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{a_{2k+2}}{t+2k+1}\right)\right.$$

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)+4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+1}}{\frac{t+2k}{2}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+2k+1}{2}}\right..$$

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{2k+2}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{2k+2}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)\right..$$

Donc $$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\right).$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $w_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$

Or $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$; $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=h_{2n}-\frac{1}{2}h_n$

Donc $w_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=h_{2n}-\frac{1}{2}h_n-\frac{1}{2}h_n.$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n=h_{2n}-h_n.$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $w_n=h_{2n}-\ln 2n-(h_n-\ln n)+\ln 2n-\ln n=\gamma_{2n}-\gamma_n+\ln 2.$

$\lim_{n\to+\infty}w_n=\gamma-\gamma+\ln 2$. $\lim_{n\to+\infty}w_n=\ln 2.$

c) D'après ce qui précède, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}_+^*$

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\gamma_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\gamma_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\gamma_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2w_n.$$

D'après Q 9 d) $2\ln X_t$ a même loi que $2\sum_{\ell=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right)+2\ln\left(\frac{X_t+2n}{t+2n}\right)+2d_{2n,t}-2\gamma$

Donc $2\ln X_t$ a même loi que :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+1}}{\frac{t}{2}+\ell}\right)+\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+2}}{\frac{t+1}{2}+\ell}\right)+2\omega_n+2\ln\left(\frac{X_t+2n}{t+2n}\right)+2d_{2n,t}-2\gamma.$$

ok pour $Y_{2\ell+1}$?!

Notons aussi que $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+1}}{\frac{t}{2}+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{\frac{t}{2}}+n}{\frac{t}{2}+n}\right)+d_{n,\frac{t}{2}}-\gamma$ a même loi que $\ln X_{t/2}$.

ok pour $Y_{2\ell+2}$?!

$\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+2}}{\frac{t+1}{2}+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{\frac{t+1}{2}}+n}{\frac{t+1}{2}+n}\right)+d_{n,\frac{t+1}{2}}-\gamma$ a même loi que $\ln X_{\frac{t+1}{2}}$.

Alors $2\ln X_t$ a même loi que :

$$\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}\underbrace{-\ln\left(\frac{X_{\frac{t}{2}}+n}{\frac{t}{2}+n}\right)}_{A_n}\underbrace{-\ln\left(\frac{X_{\frac{t+1}{2}}+n}{\frac{t+1}{2}+n}\right)}_{B_n}+\underbrace{2\ln\left(\frac{X_t+2n}{t+2n}\right)}_{C_n}+\underbrace{2d_{2n,t}-d_{n,\frac{t}{2}}-d_{n,\frac{t+1}{2}}+2\omega_n}_{u_n}$$

$$D_n=A_n+B_n+C_n$$

$2\ln X_t$ a même loi que $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n$.

D'après Q 3 a) les suites $(A_n)_{n\geq1}$, $(B_n)_{n\geq1}$ et $(C_n)_{n\geq1}$ converge en probabilité vers 0 donc la suite $(D_n)_{n\geq1}$ converge également en probabilité vers 0 d'après Q 4 a)

Notons que $\lim_{n\to+\infty}u_n=2\times0-0-0+2\ln 2=2\ln 2$.

$$\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+2\ln 2+\underbrace{D_n+u_n-2\ln 2}_{V_n}=\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n.$$

Alors d'après Q 4 b) $(\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n)$ converge en probabilité vers $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+2\ln 2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n$ a même loi que $2\ln X_t$. Alors les variables aléatoires $2\ln X_t$ et $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+2\ln 2$ ont même loi.

Ainsi $2\ln X_t$ est de même loi que la variable aléatoire

$\ln X_{\frac{t}{2}} + \ln X_{\frac{t+1}{2}} + 2\ln 2$.

d) D'après ce qui précède : $\ln X_s + \ln X_{s+\frac{1}{2}} + 2\ln 2$ a même loi que $2\ln X_{2s}$.

donc $r\ln X_s + r\ln X_{s+\frac{1}{2}} + 2r\ln 2$ a même loi que $2r\ln X_{2s}$.

Alors $\ln(2^{2r} X_s^r X_{s+\frac{1}{2}}^r)$ a même loi que $\ln X_{2s}^{2r}$.

donc X_{2s}^{2r} et $2^{2r} X_s^r X_{s+\frac{1}{2}}^r$ ont même loi.

e) En prenant $s = 1/2$ on peut dire que X_1^{2r} et $2^{2r} X_{1/2}^r X_1^r$ ont même loi

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $E(X_t^n)$ existe. Il suffit de montrer que :

$\int_0^{+\infty} x^n \frac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)}\,dx$ est absolument convergente ou simplement convergente car

$x \mapsto x^n \frac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)}$ est positive sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[$. $x^n \frac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)} = \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)} \frac{e^{-x}x^{t+n-1}}{\Gamma(t+n)}$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{t+n-1}}{\Gamma(t+n)}\,dx$

existe et vaut 1. Ainsi $\int_0^{+\infty} x^n \frac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)}\,dx$ existe et vaut $\frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$.

donc $E(X_t^n)$ existe et vaut $\frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$.

Alors $E(X_1^{2r})$ existe et vaut $\frac{\Gamma(1+2r)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1+2r) = 2r\,\Gamma(2r)$.

$E(X_{1/2}^r)$ existe et vaut : $\frac{\Gamma(1/2+r)}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(r+\frac{1}{2})$.

$E(X_1^r)$ existe et vaut $\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1+r) = r\,\Gamma(r)$.

En supposant $X_{1/2}$ et X_1 indépendantes on a $X_{1/2}^r$ et X_1^r indépendantes.

Ainsi $E(X_1^{2r}) = E(2^{2r} X_{1/2}^r X_1^r) = 2^{2r} E(X_{1/2}^r)\, E(X_1^r)$.

Donc $2r\,\Gamma(2r) = 2^{2r} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(r+\frac{1}{2})\, r\,\Gamma(r)$.

Alors : $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2r) = \frac{2^{2r} r}{2r}\, \Gamma(r)\,\Gamma(r+\frac{1}{2})$.

Donc $\underline{\underline{2^{2r-1}\,\Gamma(r)\,\Gamma(r+\frac{1}{2}) = \Gamma(2r)\sqrt{\pi}}}$.

Q15 Deuxième application : la formule de Stirling.

a) Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
$$\frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1} = \frac{1}{u^2(u+1)^2}\left[a(u+1)^2 + bu^2 + cu(u+1)^2 + d(u+1)u^2\right]$$
$$\frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1} = \frac{1}{u^2(u+1)^2}\left[(c+d)u^3 + (a+b+2c+d)u^2 + (2a+c)u + a\right]$$

Il suffit donc d'avoir $\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ 2a+c=0 \\ a=1 \end{cases}$ pour avoir $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1}$.

$$\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+2c+d \\ 2a+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-2 \\ d=2 \\ b=1 \end{cases}.$$

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{u} + \frac{2}{u+1}}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $\psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}$ d'après Q10. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k+1)^2} + 2\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{t+k+1} - \frac{1}{t+k}\right)\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(t+k)^2} + 2\left(\frac{1}{t+n+1} - \frac{1}{t}\right)$$
Les séries de termes généraux $\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$ et $\frac{1}{(t+k)^2}$ étant convergentes, en faisant tendre n vers $+\infty$ il vient :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \psi'(t) + \psi'(t) - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = 2\psi'(t) - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}.$$

Alors $\boxed{\psi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(t+k+\frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(t+k+\frac{15}{4})^3}\right) \leq \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(t+k)^3} - \frac{1}{(t+k+1)^3}\right)$

En sommant de $k=0$ à n et par "télescopage" il vient :

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(t+\frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(t+n+\frac{15}{4})^3}\right] \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t+n+1)^3}\right]$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $\frac{1}{3(t+\frac{1}{14})^3} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3t^3}$.

En divisant par 2 et en ajoutant $\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$ il vient :

$$\frac{1}{6}\frac{1}{(t+\frac{1}{14})^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \leq \psi'(t) \leq \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}.$$

donc $\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3} \leq \psi'(t) - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}$ et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $\varphi_1(t) = \psi(t) - \ln t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2}$ et

$\varphi_2(t) = \psi(t) - \ln t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{12t^2}$.

φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\varphi_1'(t) = \psi'(t) - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3} \geq 0$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\varphi_2'(t) = \psi'(t) - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{6t^3} \leq 0$.

φ_1 est croissante sur $]0,+\infty[$ et φ_2 est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Rappelons que $\lim_{t\to 0}(\psi(t) - \ln t) = 0$. Alors $\lim_{t\to+\infty} \varphi_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \varphi_2(t) = 0$.

Dans ces conditions $\forall t \in]0,+\infty[$, $\varphi_1(t) \leq 0$ et $\varphi_2(t) \geq 0$.

Alors $\forall t \in]0,+\infty[$, $\ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} \leq \psi(t) \leq \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2}$

V1 Soit $t\in]1,+\infty[$. $\ln t>0$. Alors :

$$1-\frac{1}{2t\ln t}-\frac{1}{12t^2\ln t}\leq\frac{\psi(t)}{\ln t}\leq 1-\frac{1}{2t\ln t}-\frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2\ln t}.$$

De plus $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left(1-\frac{1}{2t\ln t}-\frac{1}{12t^2\ln t}\right)=\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left(1-\frac{1}{2t\ln t}-\frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2\ln t}\right)=1$.

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\frac{\psi(t)}{\ln t}=1$. $\quad\psi(t)\underset{+\infty}{\sim}\ln t$.

V2 $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}(\psi(t)-\ln t)=0$ et $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\frac{1}{\ln t}=0$.

Par produit $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left(\frac{\psi(t)}{\ln t}-1\right)=0$. $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\frac{\psi(t)}{\ln t}=1$. $\psi(t)\underset{+\infty}{\sim}\ln t$.

$\forall t\in]0,+\infty[$, $\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3}+\frac{1}{t}\leq\psi'(t)\leq\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{t}$.

En multipliant par t il vient : $\forall t\in]0,+\infty[$, $\frac{1}{2t}+\frac{t}{6(t+\frac{1}{14})^3}+1\leq t\psi'(t)\leq\frac{1}{2t}+\frac{1}{6t^2}+1$.

Or $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2t}+\frac{t}{6(t+\frac{1}{14})^3}+1\right)=\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2t}+\frac{1}{6t^2}+1\right)=1$.

Par encadrement il vient $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}(t\psi'(t))=1$. $\quad\psi'(t)\underset{t\mapsto+\infty}{\sim}\frac{1}{t}$.

Finalement : $E(\ln X_t)\underset{t\mapsto+\infty}{\sim}\ln t$ et $V(\ln X_t)\underset{t\mapsto+\infty}{\sim}\frac{1}{t}$.

C] Soit y un réel tel que $y>t>0$.

$$\int_t^y\left(\psi(x)-\ln x+\frac{1}{2x}\right)dx\underset{\psi=\frac{\Gamma'}{\Gamma}}{=}\left[\ln|\Gamma(x)|-(x\ln x-x)+\frac{1}{2}\ln x\right]_t^y$$

$$\int_t^y\left(\psi(x)-\ln x+\frac{1}{2x}\right)dx=\ln\Gamma(y)-y\ln y+y+\frac{1}{2}\ln y-\ln\Gamma(t)+t\ln t-t-\frac{1}{2}\ln t.$$

Soit $y \in]1,+\infty[$, ce qui précède donne :

$$\ln\Gamma(y) - \ln y^y + \ln e^y + \ln y^{1/2} = \int_1^y \left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du + \ln\Gamma(1) - 1\ln 1 + 1 + \frac{1}{2}\ln 1$$

Donc $\ln \dfrac{\Gamma(y)\, e^y y^{1/2}}{y^y} = \displaystyle\int_1^y \left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du + \ln\Gamma(1) - 1\ln 1 + 1 + \frac{1}{2}\ln 1$

ou $\ln\left(\dfrac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right) = \displaystyle\int_1^y \left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du + \ln\Gamma(1) - 1\ln 1 + 1 + \frac{1}{2}\ln 1.$

Pour montrer que $y \mapsto \ln\left(\dfrac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)$ admet une limite finie en $+\infty$ il suffit donc

de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)dx$ converge.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ -\dfrac{1}{12x^2} \leq \psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x} \leq -\dfrac{1}{12\left(x+\frac{1}{14}\right)^2}$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ -\dfrac{1}{12} \leq x^2\left(\psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x}\right) \leq -\dfrac{x^2}{12\left(x+\frac{1}{14}\right)^2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{12\left(x+\frac{1}{14}\right)^2} = -\frac{1}{12}.$

Par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)\right) = -\frac{1}{12}.$

Alors $\quad \psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12x^2}.$

$-\left(\psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12x^2}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{12x^2}$ converge et $\forall x \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{12x^2} \geq 0$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives

montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)dx$ converge ; $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)dx$ converge.

Ainsi $y \mapsto \ln\left(\dfrac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)$ admet une limite finie en $+\infty$ ... notée θ

d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^x \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x} = \left(\frac{2x+1}{2}\right)^x \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = x^x$. (▲)

$\lim_{y \mapsto +\infty} \ln\left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}\right) = \theta$. $\lim_{y\mapsto+\infty} \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}\right) = e^\theta$ et $e^\theta \neq 0$.

Alors $\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} e^\theta$. $\underline{\underline{\Gamma(y) \underset{+\infty}{\sim} e^\theta y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}}$.

d'après e) $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $2^{2y-1} \Gamma(y) \Gamma(y+\frac{1}{2}) = \Gamma(2y)\sqrt{\pi}$.

Alors $2^{2y-1} e^\theta y^{y-1/2} e^{-y} e^\theta (y+\frac{1}{2})^y e^{-y-\frac{1}{2}} \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} e^\theta (2y)^{2y-\frac{1}{2}} e^{-2y} \sqrt{\pi}$

En simplifiant il vient

$e^\theta y^{y-\frac{1}{2}} (y+\frac{1}{2})^y e^{-1/2} \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} y^{2y-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{y}}\, y^{2y}$. En multipliant par $\sqrt{y}$

il vient $e^\theta y^y (y+\frac{1}{2})^y e^{-1/2} \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, y^{2y}$ ou encore :

$e^\theta \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, e^{1/2} y^y (y+\frac{1}{2})^{-y} \underset{\uparrow (▲)}{=} \sqrt{2\pi}\, e^{1/2} \left(1+\frac{1}{2y}\right)^{-y}$

Alors $e^\theta = \lim_{y\mapsto+\infty} \left(\sqrt{2\pi}\, e^{1/2} (1+\frac{1}{2y})^{-y}\right)$.

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(1+\frac{1}{2y}\right)^{-y} = e^{-y\ln(1+\frac{1}{2y})}$. $-y\ln(1+\frac{1}{2y}) \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} -y\left(\frac{1}{2y}\right) = -\frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{y\mapsto+\infty} \left(-y\ln(1+\frac{1}{2y})\right) = -\frac{1}{2}$; $\lim_{y\mapsto+\infty} (1+\frac{1}{2y})^{-y} = e^{-1/2}$.

Alors $e^\theta = \lim_{y\mapsto+\infty} \left(\sqrt{2\pi}\, e^{1/2} (1+\frac{1}{2y})^{-y}\right) = \sqrt{2\pi}\, e^{1/2} e^{-1/2} = \sqrt{2\pi}$. $\underline{\underline{e^\theta = \sqrt{2\pi}}}$

$\Gamma(y) \underset{y\mapsto+\infty}{\sim} e^\theta y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} = \sqrt{2\pi}\, y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} =$

$\underline{\underline{\Gamma(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}}}$.

Exercice. "Retrouver"

$n! \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.