CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. – E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles. L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbf{E}(X)$.
On admet les résultats suivants :
i) si X et Y sont deux variables aléatoires possédant une espérance et vérifiant l'inégalité $X \leqslant Y$ (c'est-à-dire vérifiant $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ pour tout élément ω de Ω) alors on a l'inégalité : $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
ii) Étant donné une fonction f continue sur $[0, +\infty[$ et une variable aléatoire Y possédant une densité φ continue sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0[$, si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ converge absolument alors la variable aléatoire $f(Y)$ possède une espérance vérifiant $\mathbf{E}\big(f(Y)\big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,\varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

Partie I Définition de l'application L

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0, +\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

1) a) Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
b) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$.

2) Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Vérifier que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
b) Pour tout réel λ positif ou nul, on note ε_λ la fonction réelle définie par $\varepsilon_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel λ positif ou nul, la fonction ε_λ est dans E et, pour tout réel x strictement positif, calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$.
c) Montrer que, pour tout réel λ positif ou nul et toute fonction f de E, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est aussi dans E et vérifie, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda)$.

3) On considère une fonction H élément de E, de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction H' est aussi dans E et, pour tout réel x strictement positif, justifier l'égalité :

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x)$$

4) Soit une fonction f élément de E. Pour tout entier naturel n, montrer que la fonction qui à tout réel t positif ou nul associe $t^n f(t)$ est aussi élément de E.

Partie II Dérivabilité de la fonction $L(f)$

Dans toute cette partie on considère un réel x strictement positif et une fonction f élément de E.

1) Soit h un réel non nul vérifiant l'inégalité $|h| < \dfrac{x}{2}$.

   a) Pour tout réel t strictement positif, justifier l'inégalité : $\left|\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt} + h\,t\,\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{h^2t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-xt/2}$.

   b) Pour tout réel T strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left|\int_0^T \left(\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} f(t) + t\,\mathrm{e}^{-xt} f(t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t$$

   c) En déduire que $L(f)$ est dérivable en x et que son nombre dérivé en x vaut :

$$\Big(L(f)\Big)'(x) = -\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

   d) Montrer que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel k, donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k-ième de $L(f)$ en x.

Partie III Injectivité de l'application $L\colon f \longmapsto L(f)$

Dans toute cette partie on considère un réel x strictement positif et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0,+\infty[$. *Ainsi f est élément de E.*

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\dfrac{1}{x}$ (donc d'espérance x). Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   a) Donner une densité de la variable aléatoire S_n.

   b) Donner une densité, qu'on notera φ_n, de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$.

2) a) Soit α un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\,\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\,\right]\right) = 0$$

   b) En utilisant la continuité de la fonction f en x, pour tout réel ε strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left[\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]$$

   c) Soit ε un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\,\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| > \varepsilon\,\right]\right) = 0$$

3) On note M un majorant de $|f|$ sur $[0,+\infty[$. non nul

   a) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement :

$$A_n = \left[\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

   et $\mathbf{1}_{A_n}$ son indicatrice. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left|f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\,\mathbf{1}_{A_n} + 2M\left(1 - \mathbf{1}_{A_n}\right)$$

   b) En déduire l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\Big(f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big) = f(x)$$

4) a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) \mathrm{e}^{-nt/x}\, \mathrm{d}t$$

puis l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\,(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,x^n} \Big(L(f)\Big)^{(n-1)}\Big(\frac{n}{x}\Big)$$

b) Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifient $L(f) = L(g)$ alors f et g sont égales.

c) Montrer, plus précisement, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifient $L(f)(x) = L(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a,+\infty[$ (où a est positif ou nul) alors f et g sont encore égales.

Partie IV Étude du régime permanent d'une file d'attente

Un certain jour des clients arrivent dans une poste ne possédant qu'un seul guichet. Un client qui arrive dans la poste soit se fait servir tout de suite si le guichet est libre, soit prend place dans la file d'attente si le guichet est occupé, se fait servir dès que tous ses prédécesseurs dans la file ont été servis et quitte aussitôt la poste. On modélise cette situation en notant, pour tout entier naturel n non nul, T_n l'instant (aléatoire) d'arrivée dans la poste du n-ième client, U_n sa durée d'attente (aléatoire) dans la file ($U_n = 0$ si le guichet est libre), S_n la durée (aléatoire) de son service au guichet et $W_n = U_n + S_n$ la durée de présence dans la poste.

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$ et on a alors $T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$.

On fait les hypothèses suivantes :

i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ sont indépendantes ;

ii) les variables aléatoires $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre μ (d'espérance égale à $\dfrac{1}{\mu}$) ;

iii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ sont **strictement** positives et ont toutes la même densité égale sur $]0,+\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ (d'espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$) ;

iv) l'espérance commune des Δ_i est supérieure à celle des S_i c'est-à-dire : $\mu > \lambda$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note F_n la fonction de répartition de U_n et G_n celle de W_n. On **admet** que F_n et G_n sont continues sur $[0,+\infty[$.

Dans les trois premières questions de cette partie on considère un entier n au moins égal à 2, un réel x positif ou nul et un réel h strictement positif.

1) Justifier les égalités : $U_n = 0$ si $W_{n-1} - \Delta_n < 0$ et $U_n = W_{n-1} - \Delta_n$ sinon.

2) Justifier l'indépendance des variables aléatoires W_{n-1} et Δ_n.

3) a) Pour tout entier naturel k, justifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} \leqslant x + (k+1)h\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

puis l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\, \mathrm{d}s$$

b) Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} \leqslant x + kh\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

puis l'inégalité :

$$\mathrm{e}^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\, \mathrm{d}s \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

c) En déduire l'encadrement :

$$e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\, ds \leqslant F_n(x) \leqslant e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\, ds$$

4) Soit x un réel positif ou nul. En utilisant l'encadrement précédent, établir l'égalité :

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\, ds$$

En raisonnant de la même façon on montrerait et on **admettra** l'égalité :

$$G_n(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F_{n-1}(x-s)\, ds$$

5) On fait désormais, et jusqu'à la fin du problème, l'hypothèse que les fonctions F_n et G_n sont indépendantes de n et on note F et G les fonctions vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $F = F_n$ et $G = G_n$. *On dit alors qu'on étudie la file d'attente en régime permanent.*

a) Pour tout réel x positif ou nul, établir l'égalité :

$$F(x) = \lambda e^{\lambda x}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, G(t)\, dt - \int_0^x e^{-\lambda t}\, G(t)\, dt\Big)$$

b) En déduire, pour tout réel x positif ou nul, l'égalité :

$$e^{-\lambda x} F(x) = F(0) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\, G(t)\, dt$$

6) a) Montrer que la fonction $H : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}\, G(t)\, dt$ est de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, établir l'égalité : $xL(H)(x) = L(G)(x+\lambda)$.

b) Montrer que pour tout réel x vérifiant $x > \lambda$, on a l'égalité :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{x-\lambda} - \frac{\lambda}{x-\lambda} L(G)(x)$$

7) Montrer que la fonction G est de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Pour tout réel x strictement positif, établir successivement les égalités :

$$G'(x) = -\mu G(x) + \mu F(x) \quad \text{et} \quad L(G)(x) = \frac{\mu}{x+\mu} L(F)(x)$$

8) a) Pour tout réel x vérifiant $x > \lambda$, justifier l'égalité :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x+\mu-\lambda}\right)$$

b) Pour tout réel x positif ou nul, en déduire l'égalité :

$$F(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\mu - \lambda\, e^{-(\mu-\lambda)x}\right)$$

c) Justifier que la fonction F admet la limite 1 en $+\infty$ et en déduire, pour tout réel x positif ou nul, l'égalité :

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)x}$$

9) a) Montrer que, en régime permanent, le temps passé dans la poste suit une loi exponentielle de paramètre égal à $\mu - \lambda$.

b) On suppose qu'un autre jour les arrivées des clients sont en moyenne deux fois plus fréquentes et la durée de service deux fois plus rapide. Que deviennent, en régime permanent, le temps moyen passé dans la poste par un client et la probabilité d'être servi tout de suite ?

Partie I Définition de l'application L.

(Q1) a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\hat{E}$ des fonctions continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

- $E \subset \hat{E}$ par définition.
- Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_0(t)=0$. f_0 est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f_0(t)dt$ est absolument convergente (car $t \mapsto e^{-xt} f_0(t)$ est nulle sur $[0,+\infty[$!).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$. Montrons que $\lambda f + g \in E$
  - $\lambda f+g$ est continue sur $[0,+\infty[$ car f et g sont continues sur $[0,+\infty[$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
    $\forall t \in [0,+\infty[$, $|e^{-xt}(\lambda f+g)(t)| = e^{-xt}|\lambda f(t)+g(t)| \leq e^{-xt}(|\lambda||f(t)|+|g(t)|)$.

f et g sont dans E donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt}|f(t)|dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-xt}|g(t)|dt$ convergent

Alors $\int_0^{+\infty} e^{-xt}(|\lambda||f(t)|+|g(t)|)dt$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} |e^{-xt}(\lambda f+g)(t)|dt$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-xt}(\lambda f+g)(t)dt$ est absolument convergente. Finalement $\lambda f+g \in E$.

Ceci achève de prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\hat{E}$.

<u>E est un espace vectoriel réel.</u>

b) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$. Montrons que f appartient à E. Il nous faut prouver que pour tout réel x strictement positif $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ est absolument convergente. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

f est bornée sur $[0,+\infty[$. $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leq |e^{-xt} f(t)| \leq M e^{-xt}$ (*)

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A e^{-xt}dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-xt}\right]_0^A = \frac{1}{x}(1-e^{-xA})$ et $\lim_{A\to+\infty} e^{-xA} = 0$.

Ainsi $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$; $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge et vaut $\frac{1}{x}$ (**)

(*) et (**) et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} |e^{-xt} f(t)| dt$ converge. $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est ainsi absolument convergente. f est bien un élément de E.

E contient les fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$.

(Q2) a) • L est une application de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(f,g) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(\lambda f + g)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} (\lambda f + g)(t) dt \overset{\text{toutes les intégrales convergent}}{=} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(\lambda f + g)(x) = \lambda L(f)(x) + L(g)(x)$. $L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g)$.

L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

b) Rappelons que, pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ existe et vaut $\frac{1}{x}$.

Soit $\lambda \in [0,+\infty[$. Montrons que $\mathcal{E}_\lambda$ appartient à E.

On peut aussi remarquer que $\mathcal{E}_\lambda$ est continue et bornée sur $[0,+\infty[$...

- $\mathcal{E}_\lambda$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|e^{-xt} \mathcal{E}_\lambda(t)| = e^{-xt} e^{-\lambda t} = e^{-(x+\lambda)t}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \lambda > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} dt$ existe et vaut $\frac{1}{x+\lambda}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} |e^{-xt} \mathcal{E}_\lambda(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \mathcal{E}_\lambda(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{x+\lambda}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \mathcal{E}_\lambda(t) dt$ est absolument convergente. Ceci achève de prouver que $\mathcal{E}_\lambda$ appartient à E.

$\forall \lambda \in [0,+\infty[$, $\mathcal{E}_\lambda \in E$ et $\forall \lambda \in [0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(\mathcal{E}_\lambda)(x) = \frac{1}{x+\lambda}$.

c) $\lambda \in [0,+\infty[$ et $f \in E$. Montrons que $\mathcal{E}_\lambda f$ appartient à E.

- $\mathcal{E}_\lambda f$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x+\lambda > 0$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} f(t)\,dt$ est absolument convergente,

donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt}(\mathcal{E}_\lambda f)(t)\,dt$ est absolument convergente.

Ceci achève de prouver que $\mathcal{E}_\lambda f$ appartient à E.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(\mathcal{E}_\lambda f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} f(t)\,dt = L(f)(x+\lambda)$.

$\forall \lambda \in [0,+\infty[$, $\mathcal{E}_\lambda f \in E$ et $\forall \lambda \in [0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(\mathcal{E}_\lambda f)(x) = L(f)(x+\lambda)$.

Q3 H est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ donc H' est continue sur $[0,+\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} H'(t)\,dt$ est absolument convergente.

Remarquons que : $\forall t \in [0,+\infty[$, $H'(t) \geq 0$ car H est croissante sur $[0,+\infty[$.

Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[$, $e^{-xt} H'(t) \geq 0$. Alors pour montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} H'(t)\,dt$ est absolument convergente il suffit alors de montrer qu'elle est convergente.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Une intégration par parties simple donne :

$$\int_0^A e^{-xt} H'(t)\,dt = \left[e^{-xt} H(t)\right]_0^A - \int_0^A (-x) e^{-xt} H(t)\,dt = e^{-xA} H(A) - H(0) + x\int_0^A e^{-xt} H(t)\,dt.$$

Montrons que : $\lim\limits_{A \to +\infty} (e^{-xA} H(A)) = 0$.

H est bornée sur $[0,+\infty[$. $\exists \hat{n} \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $|H(t)| \leq \hat{n}$

Alors $0 \leq |e^{-xA} H(A)| \leq \hat{n} e^{-xA}$. $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-xA} = 0$ ($x>0$) et le théorème d'encadrement

donne $\lim\limits_{A \to +\infty} (e^{-xA} H(A)) = 0$.

Rappelons que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} H(t)\,dt$ existe car $H \in E$.

Alors $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-xt} H'(t)\,dt = 0 - H(0) + x\int_0^{+\infty} e^{-xt} H(t)\,dt$. $\int_0^{+\infty} e^{-xt} H'(t)\,dt$ converge

et vaut $-H(0) + x\int_0^{+\infty} e^{-xt} H(t)\,dt$. Ceci achève de prouver que $\underline{H' \in E}$.

De plus $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x)}$.

Q4 $f\in E$ et $n\in\mathbb{N}$. Posons $\forall t\in[0,+\infty[$, $P_n(t)=t^n$. Montrons que $P_n f\in E$.

- f et P_n sont continues sur $[0,+\infty[$ donc $P_n f$ l'est aussi.
- Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(P_n(t)e^{-\frac{x}{2}t}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t^n e^{-\frac{x}{2}t}\right)\underset{x>0}{=}0$ croissance comparée.

Alors $\exists A\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall t\in[A,+\infty[$, $|t^n e^{-\frac{x}{2}t}|\leqslant 1$.

$\forall t\in[A,+\infty[$, $|e^{-xt}(fP_n)(t)|=|e^{-\frac{x}{2}t}P_n(t)e^{-\frac{x}{2}t}f(t)|\leqslant|e^{-\frac{x}{2}t}f(t)|$

$\frac{x}{2}>0$ donc $\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}t}f(t)|\,dt$ converge car f appartient à E.

Ce qui précède et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_0^{+\infty}|e^{-xt}(fP_n)(t)|\,dt$ pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty}e^{-xt}(fP_n)(t)\,dt$ est absolument convergente.

Ceci achève de prouver que $fP_n\in E$.

<u>Si f est élément de E, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $t\mapsto t^n f(t)$ appartient à E.</u>

Partie II Dérivabilité de la fonction $L(f)$.

$x\in\mathbb{R}_+^*$ et $f\in E$.

Q1 a) $u: t\mapsto e^t$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor Lagrange donne alors :

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $|u(b)-u(a)-(b-a)u'(a)|\leqslant\frac{|b-a|^2}{2!}\max\limits_{t\in[a,b]}|u''(t)|$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $u'(t)=u''(t)=e^t$.

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $|e^b-e^a-(b-a)e^a|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\max\limits_{t\in[a,b]}e^t=\frac{(b-a)^2}{2}e^{\max(a,b)}$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\left|e^{-(x+h)t}-e^{-xt}-(-(x+h)t-(-xt))e^{-xt}\right|\leqslant\frac{(-(x+h)t-(-xt))^2}{2}e^{\max(-(x+h)t,-xt)}$

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ |e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + (ht)e^{-xt}| \leq \frac{h^2t^2}{2} e^{\max(-xt-ht,\, -xt)}$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Remarque que $e^{\max(-xt-ht,\,-xt)} \leq e^{-xt/2}$; il suffit de prouver que : $\max(-xt-ht, -xt) \leq -xt/2$ ou que : $\begin{cases} -xt-ht \leq -xt/2 \\ \text{et} \\ -xt \leq -xt/2 \end{cases}$.

$xt \geq 0$ donc $xt/2 \leq xt$ ou $-xt \leq -xt/2$.

$|h| < \frac{x}{2}$. Alors on a largement $-h \leq \frac{x}{2}$; $-ht \leq \frac{xt}{2}$ car $t \geq 0$.

Alors $-xt-ht \leq -xt + xt/2 = -xt/2$.

On a donc $\max(-xt-ht, -xt) \leq -xt/2$. Alors $e^{\max(-xt-ht,\,-xt)} \leq e^{-xt/2}$

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ |e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}| \leq \frac{h^2t^2}{2} e^{-xt/2}$.

b) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left|\int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t)\right) dt\right| \leq \int_0^T \left|\frac{1}{h}\left(e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right) f(t)\right| dt$$

$$\leq \int_0^T \frac{1}{|h|} |e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}|\,|f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_0^T \frac{1}{|h|} \frac{h^2t^2}{2} e^{-xt/2} |f(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{|h|}{2} \int_0^T t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt$$

$t \mapsto t^2 f(t)$ appartient à E donc $\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-xt/2}\,dt = \int_0^{+\infty} |t^2 f(t) e^{-xt/2}|\,dt$ est convergente car $\frac{x}{2}$ est strictement positif. De plus $t \mapsto t^2 |f(t)| e^{-xt/2}$ est une fonction positive sur $[0, +\infty[$.

Alors $\int_0^T t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2}\,dt$.

Finalement :

$$\forall T\in\mathbb{R}_+^*,\ \left|\int_0^T\left(\frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{h}f(t)+t\,e^{-xt}f(t)\right)dt\right|\leq\frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty}t^2|f(t)|e^{-xt/2}\,dt.$$

c) $\forall t\in[0,+\infty[$, $\left(\frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{h}f(t)+t\,e^{-xt}f(t)\right)=\frac{1}{h}e^{-(x+h)t}f(t)-\frac{1}{h}e^{-xt}f(t)+te^{-xt}f(t)$.

f et $t\mapsto tf(t)$ étant des éléments de E, $\int_0^{+\infty}e^{-(x+h)t}f(t)$, $\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}f(t)dt$ sont trois intégrales (absolument) convergentes.

Ainsi $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{h}f(t)+t\,e^{-xt}f(t)\right)dt$ existe et vaut :

$\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-(x+h)t}f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)dt+\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}f(t)dt$ ou encore

$\frac{1}{h}\left(L(f)(x+h)-L(f)(x)\right)+\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}f(t)dt$

En faisant tendre T vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue dans b) il vient :

$$\left|\frac{L(f)(x+h)-L(f)(x)}{h}-\left(-\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}f(t)\,dt\right)\right|\leq\frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty}t^2|f(t)|e^{-xt/2}\,dt.$$

et ceci pour tout réel h non nul vérifiant $|h|<\frac{x}{2}$.

$\lim_{h\to0}\frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty}t^2|f(t)|e^{-xt/2}dt=0$. Le théorème d'encadrement donne alors : $\lim_{h\to0}\frac{L(f)(x+h)-L(f)(x)}{h}=-\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}f(t)dt$

Ainsi $L(f)$ est dérivable en x et $(L(f))'(x)=-\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}f(t)dt$ et ceci pour tout réel x strictement positif.

d) Rappelons que nous avons posé $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $P_k(t) = t^k$ et que nous avons montré que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k f \in E$.

Montrons alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $L(f)$ est k fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(L(f))^{(k)}(x) = (-1)^k L(P_k f)(x)$. Une petite récurrence s'impose.

- La propriété est vraie pour $k=1$ d'après c) ... et même pour $k=0$.
- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$L(f)$ est k fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k L(P_k f)(x)$.

Comme $P_k f$ appartient à E, $L(P_k f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(P_k f)'(x) = -\int_0^{+\infty} t (P_k f)(t) e^{-xt}\,dt = -L(P_{k+1} f)(x)$.

Ainsi $L(f)^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(L(f)^{(k)}\right)'(x) = (-1)^k\left(-L(P_{k+1} f)(x)\right) = (-1)^{k+1} L(P_{k+1} f)(x)$.

Alors $L(f)$ est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f)^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} L(P_{k+1} f)(x)$. Ainsi s'achève la récurrence.

Alors → $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$.

→ $\forall k \in \mathbb{N}^{(*)}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-xt}\,dt$.

Partie III Injectivité de l'application $L : f \mapsto L(f)$.

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$ donc S_n suit une loi gamma de paramètres x et n.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{e^{-t/x}\, t^{n-1}}{x^n (n-1)!} & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}$. $\hat{\varphi}_n$ est une densité de S_n.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. S_n est une variable aléatoire à densité admettant $\hat{\varphi}_n$ pour densité donc $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} S_n$ est une variable aléatoire à densité admettant $\varphi_n : t \mapsto \frac{1}{\left|\frac{1}{n}\right|} \hat{\varphi}_n\left(\frac{t-0}{\frac{1}{n}}\right)$ pour densité.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ \left(\frac{n}{x}\right)^n \dfrac{e^{-\frac{n}{x}t}\, t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}$. φ_n est une densité de $\frac{S_n}{n}$.

Remarque.. $\frac{S_n}{n}$ suit une loi gamma de paramètres $\frac{x}{n}$ et n.

Q2 a) $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = x$.

Alors S_n possède une espérance qui vaut nx; $\frac{S_n}{n}$ possède une espérance qui vaut x.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $V(X_k)$ existe et vaut x^2

Comme $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes $V(S_n) = V(X_1 + \dots + X_n)$ existe et vaut nx^2.

Alors $V\left(\frac{S_n}{n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2} n x^2 = \frac{x^2}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors

$$p\left(\left|\frac{S_n}{n}-E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|>\alpha\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\alpha^2}.$$

$0 \leq p\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right) \leq \frac{x^2}{n\alpha^2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^2}{n\alpha^2}=0$.

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=0$, pour tout α dans $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Remarque</u>.. $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à x.

C'est un résultat de cours !! Loi faible des grands nombres.

<u>b)</u> Observons que si $(\varepsilon,\alpha)\in\mathbb{R}_+^{*2}$ et si $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\left\{\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|>\varepsilon\right\}\subset\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\} \Leftrightarrow \left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\alpha\right\}\subset\left\{\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\leq\varepsilon\right\}$$

" $A\subset B \Leftrightarrow \bar{B}\subset\bar{A}$ "

<u>Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.</u>

f est continue en x donc <u>il existe un réel α</u> strictement positif tel que :

$\forall y\in\mathbb{R}_+$, $|y-x|\leq\alpha \Rightarrow |f(y)-f(x)|\leq\varepsilon$. <u>Soit $n\in\mathbb{N}^*$.</u>

Soit $\omega\in\Omega$ tel que : $\left|\frac{S_n}{n}(\omega)-x\right|\leq\alpha$. $\frac{S_n}{n}(\omega)\in\mathbb{R}_+$ car $\frac{S_n}{n}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Alors $\left|f\left(\frac{S_n}{n}(\omega)\right)-f(x)\right|\leq\varepsilon$.

Ainsi l'événement $\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\alpha\right\}$ est contenu dans l'événement $\left\{\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\leq\varepsilon\right\}$

En passant au complémentaire on a : $\left\{\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|>\varepsilon\right\}\subset\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists\alpha\in\mathbb{R}_+^*, \forall n\in\mathbb{N}^*, \left\{\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|>\varepsilon\right\}\subset\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}$.

c) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\{ |f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| > \varepsilon \} \subset \{ |\frac{S_n}{n} - x| > \alpha \}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P(|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| > \varepsilon) \leq P(|\frac{S_n}{n} - x| > \alpha)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|\frac{S_n}{n} - x| > \alpha) = 0$ donc par encadrement il vient :

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| > \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque.. $(f(\frac{S_n}{n}))_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $f(x)$.

Ceci n'est pas une surprise car f est continue sur $[0, +\infty[$ et $(\frac{S_n}{n})_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine x...

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\omega \in \Omega$.

1er cas.. $\omega \in A_n$. Alors $|f(\frac{S_n}{n}(\omega)) - f(x)| \leq \varepsilon$.

De plus $(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}))(\omega) = \varepsilon 1_{A_n}(\omega) + 2M(1 - 1_{A_n}(\omega)) \overset{1_{A_n}(\omega) = 1}{=} \varepsilon$

Ainsi $|f(\frac{S_n}{n}(\omega)) - f(x)| \leq (\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}))(\omega)$.

2e cas.. $\omega \notin A_n$. $|f(\frac{S_n}{n}(\omega)) - f(x)| \leq |f(\frac{S_n}{n}(\omega))| + |f(x)| \leq 2M$.

De plus $(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}))(\omega) = 2M$ car $1_{A_n}(\omega) = 0$.

Ainsi $|f(\frac{S_n}{n}(\omega)) - f(x)| \leq (\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}))(\omega)$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $|f(\frac{S_n}{n}(\omega)) - f(x)| \leq (\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}))(\omega)$.

Alors $|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| \leq \varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n})$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

b] Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons encore : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{ |f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| \leq \varepsilon \}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| \leq \varepsilon \, 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n})$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1-1_{A_n})) \leq f(\frac{S_n}{n}) - f(x) \leq \varepsilon 1_{A_n} + 2M(1-1_{A_n})$. (•)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(1_{A_n}) = 0 \times p(1_{A_n}=0) + 1 \times p(1_{A_n}=1) = p(1_{A_n}=1) = p(A_n)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1-1_{A_n}))$ existe et vaut $\varepsilon E(1_{A_n}) + 2M - 2M E(1_{A_n})$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1-1_{A_n}))$ existe et vaut $\varepsilon p(A_n) + 2M(1-p(A_n))$. (••)

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(-(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1-1_{A_n})))$ existe et vaut $-(\varepsilon p(A_n) + 2M(1-p(A_n)))$. (•••)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $f(\frac{S_n}{n}) - f(x)$ possède une espérance ; il suffit de prouver que $f(\frac{S_n}{n})$ en possède une.

$\frac{S_n}{n}$ étant une variable à densité de densité φ_n continue sur $[0,+\infty[$ ($\forall t \in [0,+\infty[$, $\varphi_n(t) = (\frac{n}{x})^n \frac{e^{-\frac{n}{x}t} t^{n-1}}{(n-1)!}$) et nulle sur $]-\infty, 0[$ pour montrer que $f(\frac{S_n}{n})$ possède une espérance il suffit de prouver (d'après ii)) que $\int_0^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt$ est absolument convergente car f est continue sur $[0,+\infty[$.

Or $\forall t \in [0,+\infty[$, $f(t)\varphi_n(t) = (\frac{n}{x})^n \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} f(t) e^{-\frac{n}{x}t}$

f étant élément de E, $t \mapsto t^{n-1} f(t)$ est également un élément de E.

Alors $\int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-\frac{n}{x}t}\,dt$ est absolument convergente car $\frac{n}{x} > 0$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt$ est également absolument convergente.

$E(f(\frac{S_n}{n}))$ existe et vaut $(\frac{n}{x})^n \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-\frac{n}{x}t}\,dt$. (••••)

(•), (••), (•••), (••••) permettent alors d'écrire (grâce à 1) que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ -\left(\varepsilon\, p(A_n) + 2\Pi(1-p(A_n))\right) \leq E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) \leq \varepsilon\, p(A_n) + 2\Pi(1-p(A_n))$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon\, p(A_n) + 2\Pi\,(1 - p(A_n))$.

Rappelons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{A_n}) = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - P(A_n)) = 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \geq n_0 \Rightarrow |1 - P(A_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2(\Pi+1)}$

pour le cas où $\Pi = 0$!

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ 2\Pi(1 - P(A_n)) = 2\Pi\,|1 - P(A_n)| \leq \dfrac{2\Pi\,\varepsilon}{2(\Pi+1)} < \varepsilon$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| < \varepsilon\, p(A_n) + \varepsilon \leq 2\varepsilon \qquad (\, p(A_n) \leq 1 \,!)$

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| < 2\varepsilon$.

Nous avons donc prouvé que :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \geq n_0 \Rightarrow \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| < 2\varepsilon$.

Ceci suffit pour affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x)$.

Q4 a) D'après (••••) de Q3 b) nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \left(\frac{n}{x}\right)^n \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t)\, e^{-\frac{n}{x}t}\, dt$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{(n-1)!\, x^n} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t)\, e^{-\frac{n}{x}t}\, dt = f(x)$.

Rappelons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-xt}\, dt$.

Il vient alors sans difficulté $\underline{\underline{f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)!\, x^n} \left(L(f)\right)^{(n-1)}\left(\dfrac{n}{x}\right)}}$.

b) Soient f et g deux fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$ qui vérifient $L(f) = L(g)$. Rappelons que f et g ~~sont~~ dans E.

$L(f) = L(g)$ donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $L(f)^{(k)} = L(g)^{(k)}$.

Alors $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)!\, x^n} L(f)^{(n-1)}\left(\dfrac{n}{x}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)!\, x^n} L(g)^{(n-1)}\left(\dfrac{n}{x}\right) = g(x)$ et

ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = g(x)}}$.

f et g sont continues en 0 donc $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$.

Finalement $\underline{\underline{\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = g(x)}}$.

c) Soient f et g deux fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$ telles que :

$\exists a \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in]a,+\infty[$, $L(f)(x) = L(g)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f)(x+a) = L(g)(x+a)$.

D'après I Q 2 c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(\varepsilon_a f)(x) = L(\varepsilon_a g)(x)$. $L(\varepsilon_a f) = L(\varepsilon_a g)$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $|\varepsilon_a(t)| = e^{-at} \leq 1$; ε_a est bornée et continue sur $[0,+\infty[$.
$\varepsilon_a f$ (resp. $\varepsilon_a g$) est continue et bornée sur $[0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$. $L(\varepsilon_a f) = L(\varepsilon_a g)$ donne alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $\varepsilon_a(x) f(x) = \varepsilon_a(x) g(x)$ (c)). Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = g(x)}}$.

PARTIE IV Etude du régime permanent d'une file d'attente.

(Q1) Il s'agit en fait de prouver que : $\forall \omega \in \Omega$; $U_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) < 0 \\ (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$. soit $\omega \in \Omega$.

<u>1ᵉʳ cas.</u>– Supposons $(W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) < 0$.

Alors $W_{n-1}(\omega) < \Delta_n(\omega)$. Ainsi le temps passé dans la poste par le $(n-1)$-ième client est strictement inférieur au temps écoulé entre son arrivée et l'arrivée du n-ième client. Alors le temps d'attente du n-ième client est nul. $U_n(\omega) = 0$.

<u>2ᵉ cas.</u>– Supposons $(W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) \geq 0$. Le temps passé dans la poste par le $(n-1)$-ième client est supérieur ou égal au temps écoulé entre son arrivée et l'arrivée du n-ième client. Le temps d'attente du n-ième client est alors égale au temps de service du $(n-1)$-ème client moins le temps écoulé entre les arrivées du $(n-1)$-ème client et du n-ième client.

Ainsi $U_n(\omega) = W_{n-1}(\omega) - \Delta_n(\omega)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega, U_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) < 0 \\ (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$.

Ou encore $\underline{U_n = \max(0, W_{n-1} - \Delta_n)}$.

(Q2) Intuitivement c'est clair ! W_{n-1} dépend ou est fonction de $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ et $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ sont indépendantes alors <u>W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes !</u>

Le mot "justifier" indique que l'on n'attendait pas davantage le jour du concours.

Allons un peu plus loin en montrant par récurrence que, pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, W_{n-1} est une fonction de $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$.

Montrons donc que pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$ il existe un élément ψ_{n-1} de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n-2}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}^{2n-2}$ dans $\mathbb{R}$ tel que : $W_{n-1} = \psi_{n-1}(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, \dots, S_{n-1})$.

- $W_1 = U_1 + S_1 = S_1$. Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi_1(x,y) = y$.

  Alors ψ_1 est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $W_1 = S_1 = \psi_1(\Delta_1, S_1)$.

  La propriété est donc vraie pour $n = 2$ (oui deux !).

- Supposons la propriété vraie pour $n \in [\![2,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

Alors il existe une application ψ_{n-1} de $\mathbb{R}^{2n-2}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $W_{n-1} = \psi_{n-1}(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, \dots, S_{n-1})$.

$W_n = V_n + S_n$. $\forall \omega \in \Omega$, $W_n(\omega) = U_n(\omega) + S_n(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega) \text{ si } W_{n-1}(\omega) < \Delta_n(\omega) \\ W_{n-1}(\omega) - \Delta_n(\omega) + S_n(\omega) \text{ si } W_{n-1}(\omega) \geqslant \Delta_n(\omega). \end{cases}$

Posons alors pour tout $(\delta_1, \dots, \delta_n, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\psi_n(\delta_1, \dots, \delta_n, s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} s_n \ \underline{\text{si}} \ \psi_{n-1}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, s_1, \dots, s_{n-1}) < \delta_n \\ \psi_{n-1}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, s_1, \dots, s_{n-1}) - \delta_n + s_n \ \underline{\text{si}} \ \psi_{n-1}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, s_1, \dots, s_{n-1}) \geqslant \delta_n \end{cases}$$

Alors ψ_n est une application de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ et $W_n = \psi_n(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, S_1, S_2, \dots, S_n)$

ceci achève la récurrence.

Reprenons alors n dans $[\![2,+\infty[\![$. Il existe $\psi_{n-1} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n-2}, \mathbb{R})$ telle que :

$\psi_{n-1}(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, \dots, S_{n-1}) = W_{n-1}$.

Or $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ sont indépendantes.

Donc $\psi_{n-1}(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, \dots, S_{n-1})$ et Δ_n sont indépendantes.

Alors $\underline{\underline{W_{n-1} \text{ et } \Delta_n \text{ sont indépendantes}}}$.

Q3 a) $k \in \mathbb{N}$. Pour simplifier posons $A = \{W_{n-1} - \Delta_n \leq x\}$, $B = \{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\}$ et $C = \{W_{n-1} \leq x + (k+1)h\}$.

Il s'agit de montrer que $P(A \cap B) \leq P(C \cap B)$. La croissance de P indique que pour obtenir ce résultat il suffit de prouver que $A \cap B \subset C \cap B$.

Pour obtenir $A \cap B \subset C \cap B$ il suffit de prouver que $A \cap B \subset C$ car $A \cap B \subset B$.

Soit $\omega \in A \cap B$. $(W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) \leq x$ et $kh \leq \Delta_n(\omega) < (k+1)h$.

Alors $W_{n-1}(\omega) \leq x + \Delta_n(\omega) < x + (k+1)h$; $W_{n-1}(\omega) < x + (k+1)h$;

en particulier $W_{n-1}(\omega) \leq x + (k+1)h$; alors $\omega \in C$.

Ainsi $A \cap B \subset C$. Comme $A \cap B \subset B$: $A \cap B \subset C \cap B$.

Par conséquent $P(A \cap B) \leq P(C \cap B)$.

$\forall k \in \mathbb{N}, P(\{W_{n-1} - \Delta_n \leq x\} \cap \{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\}) \leq P(\{W_{n-1} \leq x + (k+1)h\} \cap \{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\})$.

W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes donc $P(C \cap B) = P(C)\,P(B)$.

$P(C) = P(W_{n-1} \leq x + (k+1)h) = G_{n-1}(x + (k+1)h)$

$$P(B) = P(kh \leq \Delta_n < (k+1)h) \underset{\Delta_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}{=} 1 - e^{-\lambda(k+1)h} - (1 - e^{-\lambda kh}) = e^{-\lambda kh}(1 - e^{-\lambda h}).$$

G_{n-1} est croissante sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition de W_{n-1}.

Alors $\forall s \in [(k+1)h, (k+2)h]$, $G_{n-1}(x+s) \geq G_{n-1}(x + (k+1)h)$.

$$\forall s \in [(k+1)h, (k+2)h],\quad \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) \geq \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + (k+1)h).$$

En intégrant il vient : $\displaystyle\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds \geq G_{n-1}(x+(k+1)h) \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s}\,ds$.

Or $\displaystyle\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s}\,ds = \left[-e^{-\lambda s}\right]_{(k+1)h}^{(k+2)h} = e^{-\lambda(k+1)h}(1 - e^{-\lambda h})$.

Alors $\displaystyle \underline{\underline{e^{\lambda h}}} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds \geq e^{\lambda h} G_{n-1}(x+(k+1)h)\, e^{-\lambda(k+1)h}(1 - e^{-\lambda h})$.

Ceci donne encore :

$$e^{\lambda h}\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s}\, G_{n-1}(x+s)\,ds \geq e^{-\lambda k h}(1-e^{-\lambda h})\, G_{n-1}(x+(k+1)h) = P(B)P(C) = P(B\cap C).$$

Finalement : $P(\{W_{n-1}-\Delta_n \leq x\}\cap\{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\}) \leq e^{\lambda h}\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s}\, G_{n-1}(x+s)\,ds$.

---

b) Même démarche que dans a). Posons $A'=\{W_{n-1}\leq x+kh\}$, $B'=\{kh\leq \Delta_n<(k+1)h\}$ et $C'=\{W_{n-1}-\Delta_n\leq x\}$.

Soit $\omega\in A'\cap B'$ $W_{n-1}(\omega)\leq x+kh$ et $kh\leq \Delta_n(\omega)<(k+1)h$.

Alors $W_{n-1}(\omega)-\Delta_n(\omega)\leq x+kh-kh=x$; $\omega\in C'$.

Ainsi $A'\cap B'\subset C'$. Comme $A'\cap B'\subset B'$: $A'\cap B'\subset C'\cap B'$.

Alors $P(A'\cap B')\leq P(C'\cap B')$. Par conséquent :

$P(\{W_{n-1}\leq x+kh\}\cap\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\})\leq P(\{W_{n-1}-\Delta_n\leq x\}\cap\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\})$.

W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes donc $P(A'\cap B')=P(A')P(B')$.

$P(A')=P(W_{n-1}\leq x+kh)=G_{n-1}(x+kh)$.

$P(B')=P(kh\leq\Delta_n<(k+1)h)=e^{-\lambda kh}(1-e^{-\lambda h})$.

$\forall s\in[(k-1)h,kh]$, $G_{n-1}(x+s)\leq G_{n-1}(x+kh)$ car G_{n-1} est croissante.

$\forall s\in[(k-1)h,kh]$, $\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\leq\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+kh)$.

En intégrant il vient : $\int_{(k-1)h}^{kh}\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds\leq G_{n-1}(x+kh)\int_{(k-1)h}^{kh}\lambda e^{-\lambda s}\,ds$.

Alors $e^{-\lambda h}\int_{(k-1)h}^{kh}\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds\leq e^{-\lambda h}G_{n-1}(x+kh)\,(e^{-\lambda(k-1)h}-e^{-\lambda kh})$

$$\leq \underbrace{e^{-\lambda h}e^{-\lambda(k-1)h}}_{e^{-\lambda kh}}(1-e^{-\lambda h})\,G_{n-1}(x+kh) = P(B')P(A')$$

Alors $e^{-\lambda h}\int_{(k-1)h}^{kh}\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,dx \leq P(B')P(A') = P(A'\cap B') \leq P(C'\cap B')$. Ainsi :

$$e^{-\lambda h}\int_{(k-1)h}^{kh}\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,dx \leq P(\{W_{n-1}-\Delta_n \leq x\}\cap\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\}).$$

---

c) $s \mapsto G_{n-1}(x+s)$ est continue et bornée sur $[0,+\infty[$ (G_{n-1} prend ses valeurs dans $[0,1]$). Par conséquent $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds$ est absolument convergente donc convergente car λ est strictement positif (I Q 1 b)).

Ceci donne encore la convergence de $\int_h^{+\infty} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,dx$.

$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds = \lim_{3\mapsto+\infty}\int_0^{3} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds$. En particulier :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds = \lim_{N\mapsto+\infty}\int_0^{Nh} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds = \lim_{N\mapsto+\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)h}^{kh} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds$$

De même $\int_h^{+\infty} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds = \lim_{N\mapsto+\infty}\sum_{k=0}^{N}\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\,ds$.

$(\{W_{n-1}-\Delta_n\leq x\}\cap\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints donc :

$$P\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(\{W_{n-1}-\Delta_n\leq x\}\cap\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\})\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty}P(\{W_{n-1}-\Delta_n\leq x\}\cap\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\})$$

$(\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet (ou quasi-complet) d'événements donc

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{W_{n-1}-\Delta_n\leq x\}\cap\{kh\leq\Delta_n<(k+1)h\}) = \{W_{n-1}-\Delta_n\leq x\}.$$

Ainsi $P(W_{n-1}-\Delta_n \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{W_{n-1}-\Delta_n \leq x\} \cap \{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\})$

Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} P(\{W_{n-1}-\Delta_n \leq x\} \cap \{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\}) \leq \sum_{k=0}^{N} e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient :

$$P(W_{n-1}-\Delta_n \leq x) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{N} P(\{W_{n-1}-\Delta_n \leq x\} \cap \{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\}) \geq \sum_{k=1}^{N} P(\{W_{n-1}-\Delta_n \leq x\} \cap \{kh \leq \Delta_n < (k+1)h\})$$

$$\geq \sum_{k=1}^{N} e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient :

$$P(W_{n-1}-\Delta_n \leq x) \geq e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds.$$

Rappelons que $U_n = \max(0, W_{n-1}-\Delta_n)$.

Alors $P(U_n \leq x) = P(W_{n-1}-\Delta_n \leq x)$ car x est positif.

Donc $F_n(x) = P(W_{n-1}-\Delta_n \leq x)$. Finalement :

$$e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds \leq F_n(x) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Q4 $\lim_{h \to 0^+} e^{-\lambda h} = \lim_{h \to 0^+} e^{\lambda h} = 1$ et $\lim_{h \to 0^+} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,ds.$

En faisant tendre h vers 0 par valeur supérieure dans l'encadrement de c) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s}\, G_{n-1}(x+s)\,ds \le F_n(x) \le \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s}\, G_{n-1}(x+s)\,ds .$$

Finalement :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad F_n(x)=\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s}\, G_{n-1}(x+s)\,ds .$$

Q5 a) $F(x)=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda s}\, G(x+s)\,ds \underset{t=x+s}{=} \int_x^{+\infty}\lambda e^{-\lambda(t-x)}\, G(t)\,dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad F(x)=\lambda e^{\lambda x}\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\,G(t)\,dt=\lambda e^{\lambda x}\left(\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}G(t)\,dt-\int_0^{x}e^{-\lambda t}G(t)\,dt\right).$$

b) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. $\quad e^{-\lambda x}F(x)=\lambda\left(\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}G(t)\,dt-\int_0^{x}e^{-\lambda t}G(t)\,dt\right).$

Ceci donne pour $x=0$: $F(0)=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}G(t)\,dt$. Ainsi :

$$e^{-\lambda x}F(x)=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}G(t)\,dt-\lambda\int_0^{x}e^{-\lambda t}G(t)\,dt=F(0)-\lambda\int_0^{x}e^{-\lambda t}G(t)\,dt .$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad e^{-\lambda x}F(x)=F(0)-\lambda\int_0^{x}e^{-\lambda t}G(t)\,dt .$$

Q6 a) Par hypothèse G est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $H : x\mapsto \int_0^x e^{-\lambda t}G(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme primitive d'une fonction continue : $t\mapsto e^{-\lambda t}G(t)$).

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $H'(x)=e^{-\lambda x}G(x)\geq 0$. H' est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

Alors H est de classe C^1 et croissante sur $[0,+\infty[$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad |H(x)|=\left|\int_0^x e^{-\lambda t}G(t)\,dt\right|=\int_0^x e^{-\lambda t}G(t)\,dt\le\int_0^x e^{-\lambda t}\,dt=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda x})\le\frac{1}{\lambda}$$

$\forall t\in\mathbb{R},\ G(t)\in[0,1]$

H est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

H est de classe C^1, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$.

D'après I Q3 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(H')(x) = -H(0) + x\,L(H)(x) = x\,L(H)(x)$.
$\uparrow$ $H(0)=0$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $H'(t) = e^{-\lambda t} G(t)$; $H' = \varepsilon_\lambda G$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(H')(x) = L(\varepsilon_\lambda G)(x) = L(G)(x+\lambda)$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x\,L(H)(x) = L(H')(x) = L(G)(x+\lambda)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x\,L(H)(x) = L(G)(x+\lambda)$.

b) Soit x un élément de $]\lambda, +\infty[$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-\lambda t}F(t) = F(0) - \lambda H(t)$; en multipliant par $e^{\lambda t}e^{-xt}$ il vient :

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} F(t) = e^{-(x-\lambda)t} F(0) - \lambda e^{-(x-\lambda)t} H(t)$.

En intégrant entre 0 et ∞ on obtient :

$$L(F)(x) = F(0)\frac{1}{x-\lambda} - \lambda L(H)(x-\lambda) = \frac{1}{x-\lambda} - \frac{\lambda}{x-\lambda}(x-\lambda)\,L(H)(x-\lambda).$$

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{x-\lambda} - \frac{\lambda}{x-\lambda} L(G)(x-\lambda+\lambda).$$

$$\forall x \in]\lambda, +\infty[,\quad L(F)(x) = \frac{F(0)}{x-\lambda} - \frac{\lambda}{x-\lambda} L(G)(x).$$

Q7 $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $G(x) = \int_0^x \gamma e^{-\gamma s} F(x-s)\,ds$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad G(x) \underset{t=x-s}{=} \int_x^0 \gamma e^{-\gamma(x-t)} F(t)(-dt) = \int_0^x \gamma e^{-\gamma x} e^{\gamma t} F(t)\,dt.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad G(x) = \gamma e^{-\gamma x}\int_0^x e^{\gamma t} F(t)\,dt.$$

$t \mapsto e^{\gamma t}F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \mapsto \int_0^x e^{\gamma t}F(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. G est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

G étant une fonction de répartition, G est croissante et bornée sur $[0,+\infty[$.

G étant de classe $\mathcal{B}'$ sur $[0,+\infty[$, G est au moins dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*_+$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ G(x)=\mu e^{-\mu x}\int_0^x e^{\mu t}F(t)dt$;

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ G'(x)=-\mu\left(\mu e^{-\mu x}\int_0^x e^{\mu t}F(t)dt\right)+\mu e^{-\mu x}e^{\mu x}F(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ G'(x)=-\mu\, G(x)+\mu F(x)$.

G est de classe $\mathcal{B}'$, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Alors G appartient à E

et $\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ L(G')(x)=-G(0)+x\,L(G)(x)\underset{G(0)=0}{=}x\,L(G)(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ x\,L(G)(x)=L(G')(x)=L(-\mu G+\mu F)(x)\underset{L \text{ est linéaire}}{=}-\mu L(G)(x)+\mu L(F)(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ L(G)(x)=\dfrac{\mu}{x+\mu}L(F)(x)$.

Q8 a) Soit $x\in]\lambda,+\infty[$. $L(F)(x)=\dfrac{F(0)}{x-\lambda}-\dfrac{\lambda}{x-\lambda}L(G)(x)$.

$L(F)(x)=\dfrac{F(0)}{x-\lambda}-\dfrac{\lambda}{x-\lambda}\ \dfrac{\mu}{x+\mu}L(F)(x)$.

$[(x-\lambda)(x+\mu)+\lambda\mu]\,L(F)(x)=(x+\mu)F(0)$

$[x(x-\lambda+\mu)]\,L(F)(x)=(x+\mu)F(0)$; $L(F)(x)=\dfrac{x+\mu}{x(x-\lambda+\mu)}F(0)$

$L(F)(x)=\dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\dfrac{(x+\mu)(\mu-\lambda)}{x(x-\lambda+\mu)}\right]=\dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}\ \dfrac{\mu(x+\mu-\lambda)-\lambda x}{x(x-\lambda+\mu)}$.

Ainsi $\forall x\in]\lambda,+\infty[,\quad L(F)(x)=\dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\dfrac{\mu}{x}-\dfrac{\lambda}{x-\lambda+\mu}\right)$.

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\hat{F}(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right)$. Montrons que $F = \hat{F}$.

Pour cela, et d'après III Q 4 c) il suffit de montrer que F et $\hat{F}$ sont continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et que $\exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in]a,+\infty[, L(F)(x) = L(\hat{F})(x)$.

- Par hypothèse F est continue sur $[0,+\infty[$ et F est bornée sur $[0,+\infty[$ car F est une fonction de répartition.
- $\hat{F}$ est clairement continue sur $[0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[, \ |\hat{F}(x)| = \left|\frac{F(0)}{\mu-\lambda}\right| \left|\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right| \underset{\mu-\lambda>0}{\leqslant} \frac{|F(0)|}{\mu-\lambda}\left[|\mu| + |\lambda e^{-(\mu-\lambda)x}|\right].$$

$$\forall x \in [0,+\infty[, \ |\hat{F}(x)| \underset{\begin{cases}\mu>0\\ \lambda>0\end{cases}}{\leqslant} \frac{|F(0)|}{\mu-\lambda}\left[\mu + \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right] \underset{\mu-\lambda>0}{\leqslant} \frac{|F(0)|}{\mu-\lambda}[\mu+\lambda].$$

Ainsi $\hat{F}$ est continue et bornée sur $[0,+\infty[$. En particulier $\hat{F} \in E$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$L(\hat{F})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\left[\frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)t}\right)\right] dt$$

$$L(\hat{F})(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\int_0^{+\infty}\left(\mu e^{-xt} - \lambda e^{-(x+\mu-\lambda)t}\right) dt\right].$$

$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{x}$. $\int_0^{+\infty} e^{-(x+\mu-\lambda)t}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{x+\mu-\lambda}$.

Alors $L(\hat{F})(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\mu\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - \lambda\int_0^{+\infty} e^{-(x+\mu-\lambda)t}\,dt\right] = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x+\mu-\lambda}\right]$.

Par conséquent 1) F et $\hat{F}$ sont continues et bornées sur $[0,+\infty[$
2) $\forall x \in]\lambda,+\infty[, L(F)(x) = L(\hat{F})(x)$ d'après a).

III Q4c) donne alors $F = \hat{F}$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right]$.

c) F est une fonction de répartition donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Ainsi $1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{F(0)}{\mu-\lambda} \left(\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right)\right) = \frac{F(0)\mu}{\mu-\lambda}$.

Alors $\frac{F(0)}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu}$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \frac{1}{\mu}\left(\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right)$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $F(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)x}$.

Q9 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$G(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F(x-s)\,ds$ d'après Q4.

$G(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)(x-s)}\right) ds = \mu \int_0^x e^{-\mu s} ds - e^{-(\mu-\lambda)x} \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds$

$G(x) = \left[-e^{-\mu s}\right]_0^x - e^{-(\mu-\lambda)x}\left[-e^{-\lambda s}\right]_0^x = 1 - e^{-\mu x} + e^{-(\mu-\lambda)x} e^{-\lambda x} - e^{-(\mu-\lambda)x}$.

$G(x) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $G(x) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)x}$. En particulier $G(0) = 0$. Comme G est une fonction de répartition : $\forall x \in]-\infty, 0[$, $0 \leq G(x) \leq G(0) = 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 1 - e^{-(\mu-\lambda)x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$.

Ainsi, en régime permanent, le temps passé dans la poste suit une loi exponentielle de paramètre égal à $\mu - \lambda$.

b) Tout revient à remplacer λ et μ par 2λ et 2μ dans ce qui précède.

Le temps moyen passé dans la poste est $\frac{1}{2\mu - 2\lambda}$: il est donc divisé par 2.

La probabilité d'être servi tout de suite est $F(0) = 1 - \frac{2\lambda}{2\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$; elle ne change donc pas.