Partie I Le plus petit des plus grands et les plus grands des plus petits.

(Q1) $u(A) = \min\{\max\{-2,3\}, \max\{1,-1\}\} = \min\{3,1\} = 1$.
$v(A) = \max\{\min\{-2,1\}, \min\{3,-1\}\} = \max\{-2,-1\} = -1$.

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$u(A) = 1$ et $v(A) = -1$.

$u(A) = \min\{\max\{-1,6,-2\}, \max\{0,1,0\}, \max\{-2,3,-1\}\}$.

$u(A) = \min\{6,1,3\} = 1$.

$v(A) = \max\{\min\{-1,0,-2\}, \min\{6,1,3\}, \min\{-2,0,-1\}\}$.

$v(A) = \max\{-2,1,-2\} = 1$.

$u(A) = v(A) = 1$.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(Q2) a) $j_0 \in [\![1,p]\!]$ et $i_0 \in [\![1,n]\!]$.

$$s_{j_0} = \min_i a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq \max_j a_{i_0 j} = t_{i_0}.$$

$\forall j_0 \in [\![1,p]\!], \ \forall i_0 \in [\![1,n]\!], \quad s_{j_0} \leq t_{i_0}$.

b) $v(A) = \max_j \min_i a_{ij}$ donc $\exists j_0 \in [\![1,p]\!], \ v(A) = \min_i a_{ij_0} = s_{j_0}$.

$u(A) = \min_i \max_j a_{ij}$ donc $\exists i_0 \in [\![1,n]\!], \ u(A) = \max_j a_{i_0 j} = t_{i_0}$.

Ainsi $v(A) = s_{j_0} \leq t_{i_0} \leq u(A)$. $\quad v(A) \leq u(A)$.

(Q3) Voici un programme complet. Il donne $u(A)$ et $v(A)$ à partir de A.
Il contient une procédure EntreMatrice qui permet la saisie de A.
J'ai également ajouté dans la déclaration des fonctions demandées les dimensions de la matrice.

```
Program hec2002M1;

uses crt;
const MaxLigne=10;MaxCol=10;
type matrice = array[1..Maxligne,1..MaxCol] of real;

var n,p:integer; A:matrice;


procedure EntreMatrice(n,p:integer;var A:matrice);

var i,j:integer;

begin
for i:=1 to n do
    begin
    for j:=1 to p do
        begin
        write('Donner le coeff. de la ligne ',i,' et de la colonne ',j,'  ');
        readln(A[i,j]);
        end;

    writeln;
    end;
end;
```

```
function Max_ligne(p,i:integer;A:matrice):real;


var j:integer;m:real;

begin
m:=A[i,1];
for j:=2 to p do if m<A[i,j] then m:=A[i,j];
Max_ligne:=m;
end;
```

```
function MinMax(n,p:integer;A:matrice):real;

var i:integer;s,u:real;

begin
s:=Max_ligne(p,1,A);
for i:=2 to n do
    begin
    u:=Max_ligne(p,i,A);
    if u<s then s:=u;
    end;
MinMax:=s;
end;
```

```
function Min_col(n,j:integer;A:matrice):real;


var i:integer;m:real;

begin
m:=A[1,j];
for i:=2 to n do if m>A[i,j] then m:=A[i,j];

Min_col:=m;
end;
```

```
function MaxMin(n,p:integer;A:matrice):real;

var j:integer;s,u:real;

begin
s:=Min_col(n,1,A);
for j:=2 to p do
    begin
    u:=Min_col(n,j,A);
    if u>s then s:=u;
    end;
MaxMin:=s;
end;


begin

Write('Donner n. n=');readln(n);
Write('Donner p. p=');readln(p);
EntreMatrice(n,p,A);
writeln('MinMax=',MinMax(n,p,A),'    MaxMin=',MaxMin(n,p,A))

end.
```

```
Donner n. n=2
Donner p. p=2
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 1  -2
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 2  3

Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 1  1
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 2  -1

MinMax= 1.0000000000E+00   MaxMin=-1.0000000000E+00
```

```
Donner n. n=3
Donner p. p=3
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 1  -1
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 2  6
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 3  -2

Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 1  0
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 2  1
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 3  0

Donner le coeff. de la ligne 3 et de la colonne 1  -2
Donner le coeff. de la ligne 3 et de la colonne 2  3
Donner le coeff. de la ligne 3 et de la colonne 3  -1

MinMax= 1.0000000000E+00   MaxMin= 1.0000000000E+00
```

Partie II Le minimum des maxima et le maximum des minima.

Q1 a) Soit $(x,y)\in[0,1]^2$. $h(x,y)={}^tXAY=(x\ \ 1-x)\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\1-y\end{pmatrix}=(x\ \ 1-x)\begin{pmatrix}-5y+3\\2y-1\end{pmatrix}$.

$h(x,y)=x(-5y+3)+(1-x)(2y-1)=-7xy+4x+2y-1$.

$\forall(x,y)\in[0,1]^2,\ h(x,y)=-7xy+4x+2y-1$.

---

b) Soit $x\in[0,1]$. Posons $\forall y\in[0,1],\ \varphi_x(y)=h(x,y)$.

$\forall y\in[0,1],\ \varphi_x(y)=(2-7x)y+4x-1$.

φ_x est une fonction affine sur $[0,1]$, strictement croissante si $2-7x>0$, strictement décroissante si $2-7x<0$ et constante si $2-7x=0$.

Ainsi $\lambda(x)=\max\limits_{y\in[0,1]}\varphi_x(y)=\begin{cases}\varphi_x(1) \text{ si } 2-7x>0 & (\text{ou } x<2/7)\\ \varphi_x(0) \text{ si } 2-7x<0 & (\text{ou } x>2/7)\\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1) \text{ si } 2-7x=0 & (\text{ou } x=\frac{2}{7})\end{cases}$

$\varphi_x(1)=1-3x$ et $\varphi_x(0)=4x-1$. Si $2-7x=0$ $\varphi_x(0)=\varphi_x(1)=1-3x=4x-1=\frac{1}{7}$.

Alors $\forall x\in[0,1],\ \lambda(x)=\max\limits_{y\in[0,1]}h(x,y)=\begin{cases}1-3x & \text{si } x\in[0,\frac{2}{7}[\\ 4x-1 & \text{si } x\in]\frac{2}{7},1]\\ \frac{1}{7} & \text{si } x=\frac{2}{7}\end{cases}$

Remarque.. Observons que $\forall x\in[0,\frac{2}{7}],\ \lambda(x)=1-3x$ et

$\forall x\in[\frac{2}{7},1],\ \lambda(x)=4x-1$.

c) $\forall x\in[0,2/7],\ \lambda(x)=1-3x$ et $\forall x\in[2/7,1],\ \lambda(x)=4x-1$.

λ est une fonction affine et strictement décroissante sur $[0,2/7]$.

———————————————— croissante sur $[2/7,1]$.

Alors $\forall x\in[0,\frac{2}{7}[,\ \lambda(x)>\lambda(2/7)=\frac{1}{7}$ et $\forall x\in]\frac{2}{7},1],\ \lambda(x)>\lambda(2/7)=\frac{1}{7}$.

Alors $\forall x \in [0,1]-\{2/7\}$, $\lambda(x) > \lambda(2/7)$.
Ainsi λ possède un minimum sur $[0,1]$, qui vaut $\frac{1}{7}$ et qui est atteint uniquement en $2/7$.

$\min_{x\in[0,1]} \lambda(x) = \frac{1}{7}$. $\underline{\underline{\alpha(A) = \min_{X\in K_2}\left(\max_{Y\in K_2} \left({}^tX A Y\right)\right) = \frac{1}{7}}}$.

Remarque.. $\forall y \in [0,1]$, $h(\frac{2}{7}, y) = \frac{1}{7}$

d) Soit $y \in [0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, $\psi_y(x) = h(x,y) = (4-7y)x + 2y - 1$.

ψ_y est affine sur $[0,1]$, strictement croissante si $4-7y>0$, strictement décroissante si $4-7y<0$ et constante si $4-7y=0$.

Dans tous les cas ψ_y possède un minimum sur $[0,1]$. Posons $\mu(y) = \min_{x\in[0,1]} \psi_y(x)$.

$$\mu(y) = \begin{cases} \psi_y(0) \text{ si } 4-7y>0 \text{ (ou } y<4/7) \\ \psi_y(1) \text{ si } 4-7y<0 \text{ (ou } y>4/7) \\ \psi_y(0)=\psi_y(1) \text{ si } 4-7y=0 \text{ (ou } y=4/7) \end{cases}$$

$\psi_y(0) = 2y-1$, $\psi_y(1) = 3-5y$. Si $y = \frac{4}{7}$, $\psi_y(0) = \psi_y(1) = 2y-1 = 3-5y = \frac{1}{7}$.

$$\forall y\in[0,1],\ \mu(y) = \min_{x\in[0,1]} h(x,y) = \begin{cases} 2y-1 & \text{si } y \in [0, \frac{4}{7}[\\ 3-5y & \text{si } y \in]\frac{4}{7}, 1] \\ \frac{1}{7} & \text{si } y = \frac{4}{7} \end{cases}.$$

Notons que $\forall y \in [0, \frac{4}{7}\underline{]}$, $\mu(y) = 2y-1$ et $\forall y \in \underline{[}\frac{4}{7}, 1]$, $\mu(y) = 3-5y$.

μ est affine et strictement croissante sur $[0, \frac{4}{7}]$; $\forall y \in [0, \frac{4}{7}[$, $\mu(y) < \mu(\frac{4}{7}) = \frac{1}{7}$.
μ est affine et strictement décroissante sur $[\frac{4}{7}, 1]$; $\forall y \in]\frac{4}{7}, 1]$, $\mu(y) < \mu(\frac{4}{7}) = \frac{1}{7}$.
Alors $\forall y \in [0,1] - \{\frac{4}{7}\}$, $\mu(y) < \mu(\frac{4}{7}) = \frac{1}{7}$
μ possède un maximum sur $[0,1]$ qui vaut $1/7$ et qui est atteint uniquement en $\frac{4}{7}$.

Ainsi $\max_{y\in[0,1]} (\min_{x\in[0,1]} h(x,y))$ existe et vaut $1/7$.   Remarque.. $\forall x \in [0,1]$, $h(x, \frac{4}{7}) = \frac{1}{7}$.

Finalement $p(A) = \max_{Y\in K_2} \left(\min_{X\in K_2} {}^tXAY\right)$ existe et vaut $1/7$.

Q2 a) Lemme : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ et $\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Si $a\leq b$: $\max\{a,b\} = b$ et $|a-b| \overset{a-b\leq 0}{=} b-a$ donc $\max\{a,b\} = b = \frac{1}{2}(a+b+b-a) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

Si $a\geq b$: $\max\{a,b\} = a$ et $|a-b| \overset{a-b\geq 0}{=} a-b$ donc $\max\{a,b\} = a = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

$\min\{a,b\} \overset{!!}{=} -\max\{-a,-b\} \overset{\text{d'après ce qui précède}}{=} -\left(\frac{1}{2}(-a-b+|-a-(-b)|)\right) = \frac{1}{2}(a+b-|-a+b|)$;

$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$! ceci achève la démonstration du lemme.

Alors $\forall x\in K_n$, $h(x) = \max(g_1(x), g_2(x)) = \max\{g_1(x), g_2(x)\} = \frac{1}{2}[g_1(x)+g_2(x)+|g_1(x)-g_2(x)|]$

$\forall x\in K_n$, $h(x) = \frac{1}{2}[(g_1+g_2)(x) - (|g_1-g_2|)(x)] = \frac{g_1+g_2+|g_1-g_2|}{2}(x)$.

$$h = \max(g_1, g_2) = \frac{g_1+g_2+|g_1-g_2|}{2}.$$

(*) g_1 et g_2 sont continues sur K_n donc g_1-g_2 est continue sur K_n ; $|g_1-g_2|$ également.

Alors $h = \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}|g_1-g_2|$ est continue sur K_n comme combinaison linéaire de trois fonctions numériques continues sur K_n.

h est continue sur K_n.

(*) Il est clair qu'à partir d'ici, pour être conforme au programme on confond l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ avec l'élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, OK ??

b) Lemme

> Si $l\in\mathbb{N}^*$ et si $(a_1,\dots,a_{l+1})\in\mathbb{R}^{l+1}$:
>
> $\max(a_1,\dots,a_{l+1}) = \max\ (\max(a_1,\dots,a_l),\ a_{l+1})$.

Posons $t=\max\ (\max(a_1,\dots,a_l),\ a_{l+1})$.

$t\geq a_{l+1}$ et $t\geq \max(a_1,\dots,a_l)$ donc $\forall i\in[\![1,l+1]\!],\ t\geq a_i$.

$\exists\, i_0\in[\![1,l]\!],\ a_{i_0}=\max(a_1,\dots,a_l)$.

$t=a_{i_0}$ ou $t=a_{l+1}$ donc $\exists i_1\in[\![1,l+1]\!],\ t=a_{i_1}$.

$t=a_{i_1}$ et $\forall i\in[\![1,l+1]\!],\ t\geq a_i$ donc $t=\max(a_1,\dots,a_{l+1})$.

ceci achève la démonstration du lemme.

Alors si k est un élément de $[\![1,p-1]\!]$:

$\forall x\in K_n,\ (\max(g_1,\dots,g_{k+1}))(x)=\max(g_1(x),\dots,g_{k+1}(x))=\max\ (\max(g_1(x),\dots,g_k(x)),\ g_{k+1}(x))$

$\forall x\in K_n,\ (\max(g_1,\dots,g_{k+1}))(x)=\max\ ((\max(g_1,\dots,g_k))(x),\ g_{k+1}(x))$

$\forall x\in K_n,\ (\max(g_1,\dots,g_{k+1}))(x)=\big(\max\ (\max(g_1,\dots,g_k),\ g_{k+1})\big)(x)$.

donc $\forall k\in[\![1,p-1]\!],\ \max(g_1,\dots,g_{k+1})=\max(\max(g_1,\dots,g_k),\ g_{k+1})$.

Montrons alors par récurrence que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $\max(g_1,\dots,g_k)$ est continue sur K_n.

→ C'est clair pour $k=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $[\![1,p-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$\max(g_1,\dots,g_k)$ est continue sur K_n ainsi que g_{k+1}.

D'après a) $\max(\max(g_1,\dots,g_k),\ g_{k+1})$ est continue sur K_n.

D'après le lemme précédent $\max(\max(g_1,\dots,g_k),\ g_{k+1})=\max(g_1,\dots,g_{k+1})$.

Ainsi $\max(g_1,\dots,g_{k+1})$ est continue sur K_n et la récurrence s'achève.

La propriété est en particulier vraie pour $k = p$.

Alors $g = \max(g_1, \dots, g_p)$ est continue sur K_n.

Q3 a) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ un élément de K_p.

$f(X,Y) = {}^tX A Y = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \times \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j \right)$ ... en ayant posé $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$f(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{p} \left(y_j \times \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)$

$f(X,Y) = \sum_{j=1}^{p} y_j \varphi_j(X)$.

$\forall j \in [\![1, p]\!]$, $y_j \geq 0$ et $\varphi_j(X) \leq \lambda(X)$.

donc $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $y_j \varphi_j(X) \leq y_j \lambda(X)$.

Alors $f(X,Y) = \sum_{j=1}^{p} y_j \varphi_j(X) \leq \sum_{j=1}^{p} y_j \lambda(X) = \lambda(X) \sum_{j=1}^{p} y_j \overset{Y \in K_p}{=} \lambda(X)$.

Ainsi $\forall Y \in K_p$, $f(X,Y) \leq \lambda(X)$.

b) $\lambda(X) = \max_{j \in [\![1,p]\!]} \varphi_j(X)$. Alors $\exists j_0 \in [\![1, p]\!]$, $\lambda(X) = \varphi_{j_0}(X)$.

Notons Y_X (!!) le $j_0^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$Y_X = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $t_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j_0 \\ 1 & \text{si } i = j_0 \end{cases}$.

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $t_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$ donc $Y_X \in K_p$.

De plus $f(X, Y_X) = {}^tX A Y_X = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij} t_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i j_0} = \varphi_{j_0}(X) = \lambda(X)$.

Donc $Y_X \in K_p$ et $f(X, Y_X) = \lambda(X)$.

$\exists Y_X \in K_p, \quad f(X, Y_X) = \lambda(X).$

c) $\forall Y \in K_p, \quad f(X,Y) \leq \lambda(X)$ et $\exists Y_X \in K_p, \ f(X, Y_X) = \lambda(X)$

Donc $\forall Y \in K_p, f(X,Y) \leq f(X, Y_X) = \lambda(X)$ avec $Y_X \in K_p$.

Alors $\lambda(X) = \max\limits_{Y \in K_p} f(X,Y)$.

Q4 a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de K_n.

$\forall i \in [\![1,n]\!], \ x_i \geq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!], \ 0 \leq x_i \leq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$; $\forall i \in [\![1,n]\!], \ x_i^2 \leq 1$.

Ainsi $\|X\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$.

$\forall X \in K_n, \ \|X\| \leq \sqrt{n}$. K_n est borné.

b) Avec ce que l'on admet K_n est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

⚠ Il est clair que plus que jamais on confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$...

$\forall j \in [\![1,p]\!], \ \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n, \ \varphi_j(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$

Ainsi pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, φ_j est la restriction à K_n d'une fonction polynomiale.

Par conséquent, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, φ_j est continue sur K_n.

Alors $\lambda = \max(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est continue sur K_n qui est un fermé borné.

Alors λ possède un minimum sur K_n. $v(A) = \min\limits_{X \in K_n} \max\limits_{Y \in K_p} {}^tXAY$ existe.

<u>Exercice</u> – Montrer que $\beta(A) = \max\limits_{Y\in K_p} \min\limits_{X\in K_n} {}^tXAY$ existe.

(Q5) a) Soit $(X',Y)\in K_n\times K_p$.

$$\lambda(X') = \max_{Z\in K_p} f(X',Z) \geqslant f(X',Y) \geqslant \min_{X\in K_n} f(X,Y).$$

$$\forall (X',Y)\in K_n\times K_p,\quad \min_{X\in K_n} f(X,Y) \leq \lambda(X')$$

b) Soit $Y\in K_p$. $\forall X'\in K_n$, $\min\limits_{X\in K_n} f(X,Y) \leq \lambda(X')$ donc

$$\min_{X\in K_n} f(X,Y) \leqslant \min_{X'\in K_n} \lambda(X') = \alpha(A).$$

Ainsi $\forall Y\in K_p$, $\min\limits_{X\in K_n} f(X,Y) \leqslant \alpha(A)$ donc $\max\limits_{Y\in K_p} \min\limits_{X\in K_n} f(X,Y) \leqslant \alpha(A)$

Alors $\beta(A) \leqslant \alpha(A)$.

(Q6) a) Posons $\forall Y\in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $\phi(Y) = \|Y\|$. Montrons que ϕ est continue sur $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

$\forall Y_0\in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $\forall Y\in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $|\phi(Y)-\phi(Y_0)| = |\|Y\|-\|Y_0\|| \leqslant \|Y-Y_0\|$.

Or $\forall Y_0\in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{Y\to Y_0} \|Y-Y_0\| = 0$ donc par encadrement : $\forall Y_0\in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{Y\to Y_0} \phi(Y) = \phi(Y_0)$

Ainsi ϕ est continue à tout point de $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{C}$ est un fermé borné de $M_{p,1}(\mathbb{R})$, ϕ possède un minimum sur $\mathcal{C}$.

Alors $\exists W\in\mathcal{C}$, $\forall Y\in\mathcal{C}$, $\phi(W) \leqslant \phi(Y)$.

Ainsi $\exists W\in\mathcal{C}$, $\forall Y\in\mathcal{C}$, $\|W\| \leqslant \|Y\|$.

b) Soit $m\in]0,1[$. $W\in\mathcal{C}$, $Y\in\mathcal{C}$, $m\in$ "$[0,1]$" et $\mathcal{C}$ est convexe donc

$$Y_m = (1-m)W + mY \in \mathcal{C}.$$

Alors $\|W\|^2 \leqslant \|Y_m\|^2 = (1-m)^2\|W\|^2 + 2(1-m)m\langle W,Y\rangle + m^2\|Y\|^2$.

Par conséquent : $2(1-m)m\langle W,Y\rangle \geqslant (1-(1-m)^2)\|W\|^2 - m^2\|Y\|^2$.

$2(1-m)m\langle W,Y\rangle \geqslant (1+1-m)(1-1+m)\|W\|^2 - m^2\|Y\|^2 = m\left[(2-m)\|W\|^2 - m\|Y\|^2\right]$.

Or $m\in\,]0,1[$ donc $2(1-m)m>0$.

Il vient alors : $\langle W,Y\rangle \geqslant \dfrac{m}{2(1-m)m}\left[(2-m)\|W\|^2 - m\|Y\|^2\right] = \dfrac{2-m}{2(1-m)}\|W\|^2 - \dfrac{m}{2(1-m)}\|Y\|^2$.

$$\forall Y\in\mathscr{C},\ \forall m\in\,]0,1[,\quad \langle W,Y\rangle \geqslant \frac{2-m}{2(1-m)}\|W\|^2 - \frac{m}{2(1-m)}\|Y\|^2.$$

- Y est toujours un élément de $\mathscr{C}$.

$\forall m\in\,]0,1[,\quad \langle W,Y\rangle \geqslant \dfrac{2-m}{2(1-m)}\|W\|^2 - \dfrac{m}{2(1-m)}\|Y\|^2$.

En faisant tendre m vers 0 (par valeurs supérieures) on obtient : $\langle W,Y\rangle \geqslant \|W\|^2$.

car $\lim\limits_{m\to 0^+}\dfrac{2-m}{2(1-m)} = 1$ et $\lim\limits_{m\to 0^+}\dfrac{m}{2(1-m)} = 0$.

$$\forall Y\in\mathscr{C},\quad \|W\|^2 \leqslant \langle W,Y\rangle.$$

Q7 a) Soit m un élément de $[0,1]$ et soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$ deux éléments de K_n.

Posons $T = mX+(1-m)X'$. $T=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}$ avec $\forall i\in[\![1,n]\!],\ t_i = mx_i+(1-m)x'_i$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i\geqslant 0$ et $x'_i\geqslant 0$ donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $t_i = mx_i+(1-m)x'_i\geqslant 0$ car m et $(1-m)$ sont positifs.

De plus $\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i = m\sum_{i=1}^n x_i + (1-m)\sum_{i=1}^n x'_i = m+(1-m) = 1$.

Ceci achève de prouver que $T = mX+(1-m)X'$ appartient à K_n.

$\forall m\in[0,1],\ \forall X\in K_n,\ \forall X'\in K_n,\ mX+(1-m)X'\in K_n$. K_n est convexe.

b) $\mathcal{G}$ est clairement une partie de E_p.

→ Montrons que $\mathcal{G}$ est convexe.

Soit $\lambda \in [0,1]$ et soit $(U,U') \in \mathcal{G}^2$. Montrons que $\lambda U + (1-\lambda)U' \in \mathcal{G}$.

$\exists (m,X,Y) \in [0,1] \times K_n \times K_p$, $U = m\,{}^tAX + (1-m)Y$.

$\exists (m',X',Y') \in [0,1] \times K_n \times K_p$, $U' = m'\,{}^tAX' + (1-m')Y'$.

Ainsi $\lambda U + (1-\lambda)U' = {}^tA[\lambda m X + (1-\lambda)m' X'] + \lambda(1-m)Y + (1-\lambda)(1-m')Y'$.

Posons $\gamma = \lambda m + (1-\lambda)m'$. Alors $\lambda(1-m) + (1-\lambda)(1-m') = \lambda - \lambda m + 1 - m' - \lambda + \lambda m' = 1-\gamma$.

$\lambda \in [0,1]$, $m \in [0,1]$, $m' \in [0,1]$ donc $\lambda \geq 0$, $1-\lambda \geq 0$, $m \geq 0$, $m' \geq 0$.

Alors $\gamma \geq 0$. Notons que $\gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda m = (1-\lambda)m' = 0$.

On a également $1-\gamma = \lambda(1-m) + (1-\lambda)(1-m') \geq 0$ car $\lambda \geq 0$, $1-\lambda \geq 0$, $1-m \geq 0$, $1-m' \geq 0$.

Notons également que $\gamma = 1 \Leftrightarrow 1-\gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-m) = (1-\lambda)(1-m') = 0$.

Ainsi $\gamma \in [0,1]$, $\gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda m = (1-\lambda)m' = 0$ et $\gamma = 1 \Leftrightarrow \lambda(1-m) = (1-\lambda)(1-m') = 0$.

Envisageons alors trois cas.

1er cas. $\gamma \in]0,1[$.

Alors $\lambda U + (1-\lambda)U' = \gamma\,{}^tA\left[\frac{\lambda m}{\gamma}X + \frac{(1-\lambda)m'}{\gamma}X'\right] + (1-\gamma)\left[\frac{\lambda(1-m)}{1-\gamma}Y + \frac{(1-\lambda)(1-m')}{1-\gamma}Y'\right]$

Posons $R = \frac{\lambda m}{\gamma}X + \frac{(1-\lambda)m'}{\gamma}X'$ et $S = \frac{\lambda(1-m)}{1-\gamma}Y + \frac{(1-\lambda)(1-m')}{1-\gamma}Y'$

Comme $\gamma \in [0,1]$, pour montrer que $\lambda U + (1-\lambda)U'$ $(= \gamma\,{}^tAR + (1-\gamma)S)$ appartient à $\mathcal{G}$ il suffit de prouver que $R \in K_n$ et $S \in K_p$.

Nous avons montré que K_n est convexe... pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$ donc K_p est aussi convexe !

$\gamma = \lambda m + (1-\lambda)m'$ donc $R = \frac{\lambda m}{\gamma}X + \left(1 - \frac{\lambda m}{\gamma}\right)X'$.

$\lambda \geq 0$, $m \geq 0$, $\gamma \geq 0$ donc $\frac{\lambda m}{\gamma} \geq 0$.

$1 - \frac{\lambda m}{\gamma} = \frac{(1-\lambda)m'}{\gamma} \geq 0$ car $1-\lambda \geq 0$, $m' \geq 0$, $\gamma \geq 0$; $\frac{\lambda m}{\gamma} \leq 1$.

Alors $\frac{\lambda m}{\gamma} \in [0,1]$, $X \in K_n$, $X' \in K_n$ et ainsi $R = \frac{\lambda m}{\gamma}X + \left(1 - \frac{\lambda m}{\gamma}\right)X' \in K_n$ car K_n est convexe.

$S = \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma} Y + \frac{(1-\lambda)(1-\mu')}{1-\gamma} Y'$ et $\lambda(1-\mu) + (1-\lambda)(1-\mu') = 1-\gamma$

Ainsi $S = \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma} Y + \left(1 - \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma}\right) Y'$

$\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma} \geq 0$ car $\lambda \geq 0$, $1-\gamma \geq 0$, $1-\mu \geq 0$.

$1 - \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma} = \frac{(1-\lambda)(1-\mu')}{1-\gamma} \geq 0$ car $1-\lambda \geq 0$, $1-\mu' \geq 0$, $1-\gamma \geq 0$.

Ainsi $\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma} \in [0,1]$, $Y \in K_p$, $Y' \in K_p$ donc $S = \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma} Y + \left(1 - \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\gamma}\right) Y'$ appartient à K_p car K_p est convexe. Ceci achève de montrer que $\lambda U + (1-\lambda) U' \in \mathcal{C}$ ... dans le cas où $\gamma \in]0,1[$.

<u>2e Cas</u>.. $\gamma = 0$. Alors $\lambda \mu = (1-\lambda)\mu' = 0$.

Ainsi $\lambda U + (1-\lambda) U' = \lambda(1-\mu) Y + (1-\lambda)(1-\mu') Y' = \lambda Y + (1-\lambda) Y'$.

$\lambda \in [0,1]$, $Y \in K_p$, $Y' \in K_p$ donc $\lambda Y + (1-\lambda) Y' \in K_p$ car K_p est convexe.

ou un élément qcq de K_n !!

$\lambda U + (1-\lambda) U' = 0 \, {}^tA X + (1-0)(\lambda Y + (1-\lambda) Y')$ avec $0 \in [0,1]$ (!), $X \in K_n$ (!)

et $\lambda Y + (1-\lambda) Y' \in K_p$. Par conséquent $\lambda U + (1-\lambda) U' \in \mathcal{C}$.

<u>3e Cas</u>.. $\gamma = 1$. Alors $\lambda(1-\mu) = (1-\lambda)(1-\mu') = 0$.

$\lambda U + (1-\lambda) U' = {}^tA(\lambda \mu X + (1-\lambda)\mu' X') = {}^tA(\lambda X + (1-\lambda) X')$.

$\lambda \in [0,1]$, $X \in K_n$ et $X' \in K_n$ donc $\lambda X + (1-\lambda) X' \in K_n$ car K_n est convexe.

Alors $\lambda U + (1-\lambda) U' = 1 \times {}^tA(\lambda X + (1-\lambda) X') + (1-1) Y$ ← ou un él. qcq. de K_p avec

$1 \in [0,1]$, $\lambda X + (1-\lambda) X' \in K_n$ et $Y \in K_p$. Ainsi $\lambda U + (1-\lambda) U' \in \mathcal{C}$.

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall U \in \mathcal{C}$, $\forall U' \in \mathcal{C}$, $\lambda U + (1-\lambda) U' \in \mathcal{C}$. <u>$\mathcal{C}$ est convexe.</u>

→ Montrons que $\mathcal{C}$ est borné. Posons $C = \underset{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}{\max} |a_{ij}|$.

Soit U un élément de $\mathcal{C}$. $\exists (m,X,Y)\in[0,1]\times K_n\times K_p$, $U = m\,{}^tAX + (1-m)Y$.

$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}$. Alors $U=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_p\end{pmatrix}$ avec $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $u_i = m\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j + (1-m)y_i$

Soit $i\in[\![1,p]\!]$.

$$|u_i| \leq |m|\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}||x_j| + |1-m||y_i| \underset{m\in[0,1],\,X\in K_n,\,Y\in K_p}{=} m\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|x_j + (1-m)y_i$$

$$|u_i| \leq m\sum_{j=1}^{n} C x_j + (1-m)\times 1 = mC\times 1 + (1-m) = mC + (1-m).$$

$y_i\leq 1$, $1-m\geq 0$,
$|a_{ij}|\leq C$, $m\geq 0$, $x_j\geq 0$

Alors $\|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} u_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(mC+(1-m))^2} = (mC+1-m)\sqrt{p}$.

$\forall U\in\mathcal{C}$, $\|U\|\leq (mC+(1-m))\sqrt{p}$. $\mathcal{C}$ est borné.

Finalement <u>$\mathcal{C}$ est une partie convexe et bornée de E_p.</u>

Avec ce que l'on admet <u>$\mathcal{C}$ est une partie convexe, fermée et bornée de E_p.</u>

Q8 a) $0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\in\mathcal{C}$ donc $\exists (m_0,X_0,Y_0)\in[0,1]\times K_n\times K_p$, $0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = m_0\,{}^tAX_0 + (1-m_0)Y_0$

1er cas : $m_0\neq 0$. Alors ${}^tAX_0 = -\dfrac{1-m_0}{m_0}Y_0$. Posons $\mu = -\dfrac{1-m_0}{m_0}$.

${}^tAX_0 = \mu Y_0$ et $\mu = -\dfrac{1-m_0}{m_0}\leq 0$ car $m_0\in\,]0,1]$.

2e cas : $m_0 = 0$. Alors $0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = Y_0$ donc $0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\in K_p$!!

ceci est impossible.

Ainsi <u>$\exists (\mu,X_0,Y_0)\in\mathbb{R}\times K_n\times K_p$, ${}^tAX_0 = \mu Y_0$ et $\mu\leq 0$.</u>

b) $\forall Y \in K_p$, ${}^tX_0AY = {}^t({}^tY\,{}^tA\,X_0) = {}^t({}^tY \mu Y_0) = \mu\,{}^tY_0 Y$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_p \end{pmatrix}$ un élément de K_p. $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_p^0 \end{pmatrix}$.

Ainsi : ${}^tX_0AY = \mu\,{}^tY_0Y = \mu \sum_{i=1}^{p} y_i^0 y_i \leqslant 0$ car $\mu \leqslant 0$ et

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $y_i^0 \geqslant 0$ et $y_i \geqslant 0$.

$\forall Y \in K_p$, ${}^tX_0AY \leqslant 0$.

c) $\forall Y \in K_p$, ${}^tX_0AY \leqslant 0$; $\max\limits_{Y \in K_p} {}^tX_0AY \leqslant 0$; $\lambda(X_0) \leqslant 0$.

Alors $\alpha(A) = \min\limits_{X \in K_n} \lambda(X) \leqslant \lambda(X_0) \leqslant 0$. $\alpha(A) \leqslant 0$.

(Q9) a) $\mathcal{C}$ est une partie convexe, bornée et fermée de K_p donc, d'après Q6, $\exists W \in \mathcal{C}$, $\forall U \in \mathcal{C}$, $\langle W, U \rangle \geqslant \|W\|^2$.

$W \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$ car $0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \notin \mathcal{C}$. Donc $\|W\|^2 > 0$.

Alors $\forall U \in \mathcal{C}$, $\langle W, U \rangle > 0$.

Or : $\forall m \in [0,1]$, $\forall X \in K_n$, $\forall Y \in K_p$, $\langle m\,{}^tAX + (1-m)Y, W \rangle > 0$.

$\forall m \in [0,1]$, $\forall X \in K_n$, $\forall Y \in K_p$, ${}^t(m\,{}^tAX + (1-m)Y)W > 0$.

$\forall m \in [0,1]$, $\forall X \in K_n$, $\forall Y \in K_p$, $(m\,{}^tX\,A + (1-m){}^tY)W > 0$.

Finalement : $\forall m \in [0,1]$, $\forall X \in K_n$, $\forall Y \in K_p$, $m\,{}^tX\,AW + (1-m)\,{}^tYW > 0$.

b) En particulier $\forall X \in K_n$, $\forall Y \in K_p$, $0\,{}^tXAW + (1-0)\,{}^tYW > 0$.

Alors $\forall Y \in K_p$, ${}^tYW > 0$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Notons Y_i le $i^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$Y_i = \begin{pmatrix} y_1^i \\ | \\ y_p^i \end{pmatrix}$ avec $y_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$. Alors $Y_i \in K_p$.

Ainsi ${}^tY_i W > 0$. $\sum_{j=1}^{p} y_j^i w_j > 0$; $w_i = \sum_{j=1}^{p} y_j^i w_j > 0$.

Finalement $\forall i \in [\![1,p]\!],\ w_i > 0$.

c) $\forall u \in [0,1], \forall X \in K_n, \forall Y \in K_p,\ u\,{}^tXAW + (1-u)\,{}^tYW > 0$.

Donc $\forall X \in K_n, \forall Y \in K_p,\ 1\,{}^tXAW + (1-1)\,{}^tYW > 0$.

Alors $\forall X \in K_n,\ {}^tXAW > 0$.

d) $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$ et $\forall i \in [\![1,p]\!],\ w_i > 0$. Posons $t = \sum_{i=1}^{p} w_i$; $t > 0$.

Posons alors $\forall i \in [\![1,p]\!],\ w'_i = \frac{1}{t} w_i$ et $W' = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_p \end{pmatrix}$. $W' = \frac{1}{t} W$.

$\forall X \in K_n,\ {}^tXAW' = \frac{1}{t}\,{}^tXAW > 0$ car $\forall X \in K_n, {}^tXAW > 0$ et $1/t > 0$.

De plus $\forall i \in [\![1,p]\!],\ w'_i = \frac{1}{t} w_i \underset{\substack{1/t>0 \\ w_i>0}}{>} 0$ et $\sum_{i=1}^{p} w'_i = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{p} w_i = \frac{1}{t}\, t = 1$.

Alors $W' \in K_p$ et $\forall X \in K_n,\ {}^tXAW' > 0$.

Donc $\exists W' \in K_p, \forall X \in K_n,\ {}^tXAW' > 0$.

e) $\forall X \in K_n,\ {}^tXAW' > 0$. Ainsi $\min_{X \in K_n} {}^tXAW' > 0$.

Alors $\beta(A) = \max_{Y \in K_p} \min_{X \in K_n} {}^tXAY \geq \min_{X \in K_n} {}^tXAW' > 0$.

$\beta(A) > 0$.

Q10 a) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in K_p$.

${}^tXBY = {}^tX(A - \beta(A) J)Y = {}^tXAY - \beta(A)\,{}^tXJY$.

$$ {}^tXJY = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{p} 1\times y_j\right) \underset{\underset{Y\in K_p}{\uparrow}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{\underset{X\in K_n}{\uparrow}}{=} 1 \text{ ; ainsi } \underline{{}^tXBY = {}^tXAY - \beta(A)}. $$

Alors $\alpha(B) = \min\limits_{X\in K_n}\max\limits_{Y\in K_p} {}^tXBY = \min\limits_{X\in K_n}\max\limits_{Y\in K_p}({}^tXAY-\beta(A)) = \min\limits_{X\in K_n}\left(\max\limits_{Y\in K_p}{}^tXAY-\beta(A)\right)$

$\alpha(B) = \min\limits_{X\in K_n}\max\limits_{Y\in K_p} {}^tXAY - \beta(A) = \alpha(A)-\beta(A)$; $\underline{\underline{\alpha(B)=\alpha(A)-\beta(A)}}$.

En dtiant de même : $\beta(B) = \max\limits_{Y\in K_p}\min\limits_{X\in K_n} {}^tXAY - \beta(A) = \beta(A)-\beta(A) = 0$; $\underline{\underline{\beta(B)=0}}$.

<u>b)</u> $\beta(B)=0$ donc $O_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$ appartient à

$\hat{\mathcal{C}} = \{u\,{}^tBX+(1-u)Y,\ X\in K_n, Y\in K_p, u\in[0,1]\}$ (d'après Q9 e)).

Q8 e) montre alors que $\alpha(B)\leq 0$. Ce qui donne $\alpha(A)-\beta(A)\leq 0$

ou encore $\alpha(A)\leq\beta(A)$. Or Q5 <u>b)</u> nous a donné $\beta(A)\leq\alpha(A)$.

Ainsi $\underline{\underline{\alpha(A)=\beta(A)}}$.

Partie III Point-selle et point critique.

Q1 $\alpha(A)=\beta(A)$ donc $\min\limits_{X\in K_n}\max\limits_{Y\in K_p} f(X,Y) = \max\limits_{Y\in K_p}\min\limits_{X\in K_n} f(X,Y)$

Ainsi $\exists \hat{X}_0\in K_n, \exists\hat{Y}_0\in K_p$, $\max\limits_{Y\in K_p} f(\hat{X}_0,Y) = \min\limits_{X\in K_n}\max\limits_{Y\in K_p} f(X,Y) = \max\limits_{Y\in K_p}\min\limits_{X\in K_n} f(X,Y) = \min\limits_{X\in K_n} f(X,\hat{Y}_0)$

Alors $\alpha(A)=\beta(A)=\max\limits_{Y\in K_p} f(\hat{X}_0,Y) = \min\limits_{X\in K_n} f(X,\hat{Y}_0)$.

$\forall Y\in K_p$, $\alpha(A)=\beta(A)\geq f(\hat{X}_0,Y)$ et $\forall X\in K_n$, $\alpha(A)=\beta(A)\leq f(X,\hat{Y}_0)$.

$\forall X \in K_n, \forall Y \in K_p, \quad f(\hat{X}_0, Y) \leq \alpha(A) = \beta(A) \leq f(X, \hat{Y}_0)$.

En particulier $\quad f(\hat{X}_0, \hat{Y}_0) \leq \alpha(A) = \beta(A) = f(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$; $f(\hat{X}_0, \hat{Y}_0) = \alpha(A) = \beta(A)$.

Alors $\forall X \in K_n, \forall Y \in K_p, \quad f(\hat{X}_0, Y) \leq f(\hat{X}_0, \hat{Y}_0) \leq f(X, \hat{Y}_0)$, $\hat{X}_0 \in K_n$ et $\hat{Y}_0 \in K_p$.

Ainsi <u>f possède un point selle.</u>

Supposons que (X_0, Y_0) est un point-selle pour f. Montrons que $f(X_0, Y_0) = \alpha(A)$.

$X_0 \in K_n, Y_0 \in K_p$ et $\forall (X, Y) \in K_n \times K_p, \quad f(X_0, Y) \leq f(X_0, Y_0) \leq f(X, Y_0)$

Alors $\quad \max\limits_{Y \in K_p} f(X_0, Y) \leq f(X_0, Y_0)$ et $\quad f(X_0, Y_0) \leq \min\limits_{X \in K_n} f(X, Y_0)$.

Ainsi $\quad \alpha(A) = \min\limits_{X \in K_n} \max\limits_{Y \in K_p} f(X, Y) \leq \max\limits_{Y \in K_p} f(X_0, Y) \leq f(X_0, Y_0)$ et

$f(X_0, Y_0) \leq \min\limits_{X \in K_n} f(X, Y_0) \leq \max\limits_{Y \in K_p} \min\limits_{X \in K_n} f(X, Y_0) = \beta(A) = \alpha(A)$.

Alors $\alpha(A) \leq f(X_0, Y_0) \leq \alpha(A)$; $\quad f(X_0, Y_0) = \alpha(A)$.

<u>Si (X_0, Y_0) est un point-selle pour f alors $f(X_0, Y_0) = \alpha(A) = \beta(A)$.</u>

Q2 <u>a)</u> Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\quad g(x, y) = (x \;\; 1-x) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$.

$$g(x, y) = (x \;\; 1-x) \begin{pmatrix} (a-b)y + b \\ (c-d)y + d \end{pmatrix} = (a-b)xy + bx + (c-d)y(1-x) + d(1-x).$$

<u>$g(x, y) = (a-b-c+d)xy + (b-d)x + (c-d)y + d$.</u>

g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car g est une fonction polynômiale.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (a-b-c+d)y + b - d$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (a-b-c+d)x + c - d$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-b-c+d)\,y = d-b \\ \text{et} \\ (a-b-c+d)\,x = d-c\end{cases}$ (1)

Si $a-b-c+d\neq 0$, (1) admet une solution et une seule : $\left(\dfrac{d-c}{a-b-c+d}, \dfrac{d-b}{a-b-c+d}\right)$.

Si $a-b-c+d=0$, l'ensemble des solutions de (1) est $\mathbb{R}^2$ si $d-b=d-c=0$ et $\emptyset$ dans le cas contraire

Alors (1) admet une solution et une seule ssi $a-b-c+d\neq 0$.

g admet un point critique et un seul si et seulement si $a+d-b-c\neq 0$.

Dans ce cas le point critique de g est $\left(\dfrac{d-c}{a+d-b-c}, \dfrac{d-b}{a+d-b-c}\right)$.

b) • $a-b$ et $d-c$ sont de même signe et non tous nuls donc leur somme n'est pas nulle ; $a+d-b-c\neq 0$.

Alors g admet un unique point critique (x_0,y_0) ; $x_0=\dfrac{d-c}{a+d-b-c}$ et

$y_0=\dfrac{d-b}{a+d-b-c}$.

Posons $\varepsilon=\begin{cases}1 & \text{si } a-b\geq 0\\ -1 & \text{si } a-b<0\end{cases}$ et $\varepsilon'=\begin{cases}1 & \text{si } a-c\geq 0\\ -1 & \text{si } d-b<0\end{cases}$.

Alors $a-b=\varepsilon|a-b|$; $d-c=\varepsilon|d-c|$, $a-c=\varepsilon'|a-c|$ et $d-b=\varepsilon'|d-b|$ car $a-b$ et $d-c$ ont même signe ainsi que $a-c$ et $d-b$.

$$x_0=\frac{\varepsilon|d-c|}{\varepsilon|a-b|+\varepsilon|d-c|}=\frac{|d-c|}{|a-b|+|d-c|}\ ;\ x_0\geq 0.$$

$$1-x_0=\frac{|a-b|}{|a-b|+|d-c|}\geq 0\ ;\ 1-x_0\geq 0\ ;\ x_0\leq 1.$$

Ainsi $x_0\in[0,1]$. En remarquant que $y_0=\dfrac{|d-b|}{|a-b|+|a-c|}$ on montre de même que $y_0\in[0,1]$.

g admet un unique point critique (x_0,y_0) et $(x_0,y_0)\in[0,1]^2$.

- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$g(x,y)-g(x_0,y_0)=(a-b-c+d)(xy-x_0y_0)+(b-d)(x-x_0)+(c-d)(y-y_0).$$

Or $b-d=-(a-b-c+d)y_0$ et $c-d=-(a-b-c+d)x_0$.

Alors $g(x,y)-g(x_0,y_0)=(a-b-c+d)(xy-x_0y_0-y_0(x-x_0)-x_0(y-y_0))$.

$g(x,y)-g(x_0,y_0)=(a+d-b-c)(xy-x_0y_0-y_0x+y_0x_0-x_0y+x_0y_0)$.

$g(x,y)-g(x_0,y_0)=(a+d-b-c)(xy-xy_0-x_0y+x_0y_0)$.

$g(x,y)-g(x_0,y_0)=(a+d-b-c)(x(y-y_0)-x_0(y-y_0))=(a+d-b-c)(x-x_0)(y-y_0)$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=g(x_0,y_0)+(a+d-b-c)(x-x_0)(y-y_0)$. (*)

- Posons $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\1-x_0\end{pmatrix}$ et $Y_0=\begin{pmatrix}y_0\\1-y_0\end{pmatrix}$. $X_0\in K_2$ et $Y_0\in K_2$ car $x_0\in[0,1]$ et $y_0\in[0,1]$.

Soit $(X,Y)\in K_2$. $X=\begin{pmatrix}x\\1-x\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y\\1-y\end{pmatrix}$ avec $(x,y)\in[0,1]^2$.

$f(X_0,Y_0)-f(X_0,Y)=g(x_0,y_0)-g(x_0,y)=0$ d'après (*)

$f(X,Y_0)-f(X_0,Y_0)=g(x,y_0)-g(x_0,y_0)=0$ toujours d'après (*).

Ainsi $\forall (X,Y)\in K_2^2,\ f(X_0,Y)=f(X_0,Y_0)=f(X,Y_0)$.

Alors $\forall (X,Y)\in K_2^2,\ f(X_0,Y)\leq f(X_0,Y_0)\leq f(X,Y_0)$!!

(X_0,Y_0) est un point-selle pour f. N'oublions pas que : $\forall (X,Y)\in K_2^2,\ f(X_0,Y)=f(X_0,Y_0)=f(X,Y_0)$.

- $\alpha(A)=f(X_0,Y_0)=g(x_0,y_0)=(a+d-b-c)x_0y_0+(b-d)x_0+(c-d)y_0+d$

$$\alpha(A)=(a+d-b-c)\frac{(d-c)(d-b)}{(a+d-b-c)^2}+\frac{(b-d)(d-c)}{a+d-b-c}+\frac{(c-d)(d-b)}{a+d-b-c}+d.$$

$$\alpha(A) = \frac{1}{a+d-b-c}\left((d-c)(d-b) + \underbrace{(b-d)(d-c) + (c-d)(d-b)}_{=0} + d(a+d-b-c)\right).$$

$$\alpha(A) = \frac{1}{a+d-b-c}\left((c-d)(d-b) + d(a+d-b-c)\right) = \frac{1}{a+d-b-c}\left(cd - cb - d^2 + db + da + d^2 - db - dc\right).$$

$$\alpha(A) = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}.$$

Partie IV Application à une étude de la concurrence

Q1 Notons S'_1 (resp. S'_2) l'événement Secador choisit S_1 (resp. S_2).
Notons P'_1 (resp. P'_2) l'événement Primus choisit P_1 (resp. P_2).

$P(S'_1) = y$, $P(S'_2) = 1-y$, $P(P'_1) = x$, $P(P'_2) = 1-x$.

$V_{xy}(\Omega) = \{-2, -1, 1, 3\}$.

Indépendance entre les choix de Primus et de Secador.

$P(V_{xy} = -2) = P(P'_1 \cap S'_1) = P(P'_1)P(S'_1) = xy$.

$P(V_{xy} = -1) = P(P'_2 \cap S'_2) = P(P'_2)P(S'_2) = (1-x)(1-y)$.

De même $P(V_{xy} = 1) = (1-x)y$ et $P(V_{xy} = 3) = x(1-y)$.

Ainsi $E(V_{xy}) = -2xy - (1-x)(1-y) + (1-x)y + 3x(1-y)$.

$$E(V_{xy}) = -7xy + 4x + 2y - 1 = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

Q2 Ici nous pouvons nous appuyer sur II Q1 ou sur III.

Utilisons III. En prenant $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $a = -2$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = -1$

on a $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $E(V_{xy}) = g(x,y) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}\right)$.

$a + d - b - c = -7$

$a - b = -5$ et $d - c = -2$; $a-b$ et $d-c$ sont de même signe strictement non nuls.

$a - c = -3$ et $d - b = -4$; $a-c$ et $d-b$ ——————— .

Posons $x_0 = \frac{d-c}{[illegible]} = \frac{2}{[illegible]}$ et $y_0 = \frac{d-b}{[illegible]} = \frac{4}{[illegible]}$.