(Q1) a) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans $\mathcal{B}$.

→ L'ensemble des valeurs propres de f_M est $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$

→ Pour tout i dans $[\![1,q]\!]$ le sous-espace propre $SEP(f_M, \lambda_i)$ de f_M associé à la valeur propre λ_i est de dimension n_i.

→ $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{q} SEP(f_M, \lambda_i)$ car f_M est diagonalisable.

Pour tout i dans $[\![1,q]\!]$ considérons une base $\mathcal{B}_i$ de $SEP(f_M, \lambda_i)$.

Alors $\mathcal{B}' =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_q$" est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de f_M dans $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale par blocs $D = \begin{pmatrix} D_1 & & (0) \\ & D_2 & \\ (0) & & \ddots & D_q \end{pmatrix}$ où pour tout i dans $[\![1,q]\!]$ $D_i = \lambda_i I_{n_i}$ où I_{n_i} est la matrice identité de $M_{n_i}(\mathbb{R})$.

M et D sont semblables car ce sont deux matrices de f_M.

Ainsi $tr(M) = tr(D)$. Or $tr(D) = \sum_{i=1}^{q} tr(D_i) = \sum_{i=1}^{q} tr(\lambda_i I_{n_i}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, tr(I_{n_i})$

Or $\forall i \in [\![1,q]\!]$, $tr(I_{n_i}) = n_i$. Donc $tr(M) = tr(D) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i n_i$.

Finalement : $tr(M) = \sum_{i=1}^{q} n_i \lambda_i$.

b) Reprenons les notations de a). M et D sont semblables donc il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{R})$ telle que : $D = P^{-1} M P$.

Alors $D^2 = (P^{-1} M P)^2 = P^{-1} M^2 P$. Par conséquent M^2 et D^2 sont semblables.

Ainsi $tr(M^2) = tr(D^2)$. Or $D^2 = \begin{pmatrix} D_1^2 & & (0) \\ & D_2^2 & \\ (0) & & \ddots & D_q^2 \end{pmatrix}$.

Donc $tr(M^2) = tr(D^2) = \sum_{i=1}^{q} tr(D_i^2) = \sum_{i=1}^{q} tr(\lambda_i^2 I_{n_i}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2 \, tr(I_{n_i})$.

$tr(M^2) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2 n_i = \sum_{i=1}^{q} n_i \lambda_i^2$.

Posons ${}^t\Pi\Pi = (\alpha_{i,j})$ et ${}^t\Pi = (m'_{i,j})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m'_{i,j} = m_{j,i}$ et $\alpha_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} m'_{i,\ell} m_{\ell,j}$.

$$tr({}^t\Pi\Pi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m'_{j,\ell} m_{\ell,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell,j} m_{\ell,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell,j}^2$$

On peut encore écrire : $tr({}^t\Pi\Pi) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$.

Rappelons que Π est symétrique alors ${}^t\Pi = \Pi$. Ce qui précède permet alors de dire que : $tr({}^t\Pi\Pi) = tr(\Pi^2) = \sum_{i=1}^{n} n_i \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$.

Q2 a) On suppose que Z est définie par $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_{1,1}(\omega) & \dots & Z_{1,r}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n,1}(\omega) & \dots & Z_{n,r}(\omega) \end{pmatrix}$

où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$, $Z_{i,j}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Dans la suite on s'autorisera à écrire $Z = (Z_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le r}}$.

Z possède une espérance ce qui signifie que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$, $E(Z_{i,j})$ existe.

Posons $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le n}}$. Notons que $AZ \in \Pi_r(\mathbb{R})$

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (AZ)(\omega) = A\, Z(\omega) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} Z_{\ell,j}(\omega) \right)_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r}}$$

Posons encore : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $Z'_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} Z_{\ell,j}$

1) $\forall \omega \in \Omega$, $(AZ)(\omega) = (Z'_{i,j}(\omega))_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r}}$

2) Pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $Z'_{i,j}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ comme combinaison linéaire de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

3) Pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $Z'_{i,j}$ possède une espérance comme combinaison linéaire de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ qui possèdent une espérance.

4) $\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $E(Z'_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} E(Z_{k,j})$ par linéarité de l'espérance.

Ainsi peut-on dire que → AZ est une matrice aléatoire qui possède une espérance.

→ $E(AZ)$ est la matrice $\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, E(Z_{\ell,j})\right)_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}}$ de $M_r(\mathbb{R})$.

Or $A\,E(Z) = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le n}} \times \left(E(Z_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le r}} = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, E(Z_{\ell,j})\right)_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}}$.

Ainsi <u>AZ possède une (matrice) espérance et $E(AZ) = A\,E(Z)$.</u>

<u>Remarque</u>.. Le résultat reste acquis si $A \in M_{s,n}(\mathbb{R})$ où $s \in \mathbb{N}^*$... nous en aurons besoin !

Nous posons $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le q}}$. Z est toujours $(Z_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le r}}$.

$\forall \omega\in\Omega,\ (ZB)(\omega) = Z(\omega)B = (Z_{i,j}(\omega))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le r}}\,(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le q}} = \left(\sum_{\ell=1}^{r} Z_{i,\ell}(\omega)\, b_{\ell,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$

Posons $\forall i\in [\![1,n]\!], \forall j\in[\![1,q]\!],\ Z''_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{r} b_{\ell,j} Z_{i,\ell}$. $ZB = (Z''_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$

Alors 1) $\forall\omega\in\Omega,\ (ZB)(\omega) = (Z''_{i,j}(\omega))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$.

2) Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, $Z''_{i,j}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui possède une espérance comme combinaison linéaire de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui possèdent une espérance.

3) $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ E(Z''_{i,j}) = \sum_{\ell=1}^{r} b_{\ell,j} E(Z_{i,\ell}) = \sum_{\ell=1}^{r} E(Z_{i,\ell})\, b_{\ell,j}$.

Ainsi peut-on dire que
- ZB est une matrice aléatoire ayant n lignes et q colonnes
- ZB possède une (matrice) espérance
- $E(ZB) = \left(E(Z''_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}} = \left(\sum_{\ell=1}^{r} E(Z_{i,\ell})\, b_{\ell,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}} = E(Z)B$

Ainsi <u>ZB possède une (matrice) espérance et $E(ZB) = E(Z)B$.</u>

b) Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une (matrice) espérance

$Z=(Z_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq r}}$ où, pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$, Z_{ij} est une variable

aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ qui possède une espérance.

Posons $\forall (i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,n]\!]$, $\hat{Z}_{i,j}=Z_{j,i}$

${}^tZ=(\hat{Z}_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n}}$ et pour tout $(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,n]\!]$, $\hat{Z}_{i,j}=Z_{j,i}$ est une

variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ qui possède une espérance.

Alors ${}^tZ$ est une matrice aléatoire à r lignes et n colonnes qui possède

une (matrice) espérance.

$E({}^tZ)=(E(\hat{Z}_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n}}=(E(Z_{j,i}))_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n}}={}^tE(Z)$.

Si Z est une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une (matrice) espérance alors ${}^tZ$ est une matrice aléatoire à r lignes et n colonnes ayant une (matrice) espérance et $E({}^tZ)={}^tE(Z)$ ... ce qui répond largement à la question !

Reprenons les notations et les hypothèses précédentes en supposant que $r=n$. Z est alors une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes.

$tr(Z)=\sum_{i=1}^n Z_{i,i}$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $Z_{i,i}$ est une variable aléatoire

sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ qui possède une espérance.

Alors $E(tr(Z))$ existe et vaut $\sum_{i=1}^n E(Z_{i,i})$.

Rappelons que $E(Z)$ existe et que $E(Z)=(E(Z_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Alors $tr(E(Z))=\sum_{i=1}^n E(Z_{i,i})=E(tr(Z))$.

Si Z est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes qui possède une (matrice) espérance, $E(tr(Z))$ existe et $E(tr(Z))=tr(E(Z))$.

(Q3) Notons que les formules qui suivent sont assez simples à établir mais il convient de justifier l'existence des variances et des espérances qui interviennent.

$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}$ possède une (matrice) espérance et une matrice-covariance

$V(Y)=E\left((Y-E(Y))\,{}^t(Y-E(Y))\right)$. Avant de commencer détaillons un peu cela.

$$Y-E(Y)=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}E(Y_1)\\ \vdots\\ E(Y_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_1-E(Y_1)\\ \vdots\\ Y_n-E(Y_n)\end{pmatrix} \text{ donc } {}^t(Y-E(Y))=(Y_1-E(Y_1)\ \cdots\ Y_n-E(Y_n)).$$

Alors $(Y-E(Y))\,{}^t(Y-E(Y))$ est la matrice aléatoire $\left((Y_i-E(Y_i))(Y_j-E(Y_j))\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

$V(Y)$ existe donc l'espérance de cette matrice aléatoire existe.

Cela signifie que $E\left((Y_i-E(Y_i))(Y_j-E(Y_j))\right)$ existe pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

Par conséquent $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)$ existe. En particulier pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $V(Y_i)=\mathrm{cov}(Y_i,Y_i)$ existe.

Notons encore que : $V(Y)=E\left((Y-E(Y))\,{}^t(Y-E(Y))\right)=\left(\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ ce qui n'est pas un scoop.

a) $Y\,{}^tY$ est la matrice aléatoire $(Y_iY_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $E(Y_iY_j)$ existe car Y_i et Y_j possèdent une variance donc un moment d'ordre 2. Alors $Y\,{}^tY$ possède une (matrice) espérance qui est

$\left(E(Y_iY_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $E(Y_i)$ existe donc $Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}$ et ${}^tY=(Y_1\cdots Y_n)$ sont deux matrices aléatoires qui possèdent une (matrice) espérance.

Notons que $E(Y)=\begin{pmatrix}E(Y_1)\\ \vdots\\ E(Y_n)\end{pmatrix}$ et $E({}^tY)=(E(Y_1)\cdots E(Y_n))$.

Alors $E(Y)E({}^tY)=\begin{pmatrix}E(Y_1)\\ \vdots\\ E(Y_n)\end{pmatrix}(E(Y_1)\cdots E(Y_n))=\left(E(Y_i)E(Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$.

Ainsi $E(Y\,{}^tY)-E(Y)E({}^tY)=\left(E(Y_iY_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}-\left(E(Y_i)E(Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$

$E(Y\,{}^tY)-E(Y)E({}^tY)=\left(E(Y_iY_j)-E(Y_i)E(Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=\left(\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=V(Y)$.

$V(Y) = E(Y\,{}^tY) - E(Y)\,E({}^tY)$.

<u>Remarque utile</u> ! notons que l'existence de $E(Y\,{}^tY)$ assure l'existence de $V(Y)$. En effet l'existence de $E(Y\,{}^tY)$ donne l'existence de $E(Y_iY_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, qui donne l'existence $E(Y_i^2)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, qui donne l'existence de $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ donc l'existence de $V(Y)$.

<u>b)</u> Montrons que $V(BY)$ existe. Il suffit de prouver l'existence de $E(BY\,{}^t(BY))$.

$Y\,{}^tY$ est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes ayant une espérance (car $V(Y)$ existe) et ${}^tB \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ donc $Y\,{}^tY\,{}^tB$ est une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une espérance d'après Q2 a).

Comme $B \in M_{r,n}(\mathbb{R})$, toujours d'après Q2 a), $B\,Y\,{}^tY\,{}^tB$ est une matrice aléatoire à r lignes et à r colonnes ayant une espérance.

Ainsi $BY\,{}^t(BY) = BY\,{}^tY\,{}^tB$ possède une espérance.

Mieux Q2 a) nous permet de dire que $E(Y\,{}^tY\,{}^tB) = E(Y\,{}^tY)\,{}^tB$ et que

$E(B\,Y\,{}^tY\,{}^tB) = B\,E(Y\,{}^tY\,{}^tB)$.

Alors $E(BY\,{}^t(BY)) = E(BY\,{}^tY\,{}^tB) = B\,E(Y\,{}^tY)\,{}^tB$.

$BY\,{}^t(BY)$ possède une (matrice) espérance donc BY possède une matrice de variance-covariance.

De plus $V(BY) = E(BY\,{}^t(BY)) - E(BY)\,E({}^t(BY)) = B\,E(Y\,{}^tY)\,{}^tB - E(BY)\,E({}^t(BY))$.

→ ${}^t(BY) = {}^tY\,{}^tB$.

→ ${}^tY$ est une matrice aléatoire ayant 1 ligne et n colonnes qui possède une (matrice) espérance qui vaut ${}^tE(Y)$ d'après notre extrapolation de Q2 <u>b)</u> et le fait que $E(Y)$ existe.

→ ${}^tB \in M_{n,r}(\mathbb{R})$

Alors Q2 <u>a)</u> nous permet de dire que ${}^t(BY) = {}^tY\,{}^tB$ possède une (matrice) espérance qui vaut $E({}^tY)\,{}^tB$.

Ainsi $E({}^t(BY)) = E({}^tY)\,{}^tB$.

Notre extrapolation de Q 2 b) nous permet alors de dire que $BY = {}^t({}^t(BY))$ possède une (matrice) espérance qui vaut ${}^tE({}^t(BY))$

Ainsi $E(BY) = {}^tE({}^t(BY)) = {}^t\left(E({}^tY)\,{}^tB\right) = B\,{}^tE({}^tY) = B\,{}^t({}^tE(Y)) = B\,E(Y)$

Donc $E(BY) = B\,E(Y)$!! ce que le Q 2 a) du texte nous autorise pas à dire immédiatement vu le type des matrices...

Finalement $V(BY) = E(BY\,{}^t(BY)) - E(BY)\,E({}^t(BY)) = B\,E(Y\,{}^tY)\,{}^tB - B\,E(Y)\,E({}^tY)\,{}^tB$

$V(BY) = B\left(E(Y\,{}^tY) - E(Y)\,E({}^tY)\right){}^tB = B\,V(Y)\,{}^tB$.

Si $B \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, $V(BY)$ existe et $V(BY) = B\,V(Y)\,{}^tB$.

c) Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.

$${}^tYAY = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,Y_iY_j$$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E(Y_iY_j)$ existe donc $E({}^tYAY)$ existe et

vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,E(Y_iY_j)$

$$A\,E(Y\,{}^tY) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \times \left(E(Y_iY_j)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,E(Y_kY_j)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}.$$

Alors $tr(A\,E(Y\,{}^tY)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,E(Y_kY_i)$ ou $tr(A\,E(Y\,{}^tY)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,E(Y_jY_i)$

ou encore $tr(A\,E(Y\,{}^tY)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,E(Y_iY_j) = E({}^tYAY)$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E({}^tYAY)$ existe et $E({}^tYAY) = tr(A\,E(Y\,{}^tY))$.

Proposons une seconde version qui utilise davantage ce qui précède + quelques extrapolations...

$tr({}^tYAY) = tr(AY{}^tY)$ (propriété de la trace explicitée...)

$Y{}^tY$ est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes ayant une espérance.

Comme $A \in M_n(\mathbb{R})$, Q2 a) montre que $E(AY{}^tY)$ existe et vaut $AE(Y{}^tY)$.

Alors $E(tr(AY{}^tY))$ et vaut $tr(E(AY{}^tY))$ d'après Q2 b)

Ainsi $E(tr({}^tYAY))$ existe et vaut $tr(E(AY{}^tY))$.

Or $E(AY{}^tY) = AE(Y{}^tY)$; ainsi $E(tr({}^tYAY))$ existe et vaut $tr(AE(Y{}^tY))$.

Ne reste plus qu'à observer que $tr({}^tYAY) = {}^tYAY$ car ${}^tYAY$ est une matrice aléatoire à 1 ligne et 1 colonne.

Ainsi $E({}^tYAY)$ existe et vaut $tr(AE(Y{}^tY))$.

Montrons la seconde égalité.

$E({}^tYAY) = tr(AE(Y{}^tY))$ et $E(Y{}^tY) = V(Y) + E(Y)E({}^tY) = J + E(Y){}^tE(Y) = J + m{}^tm$

Alors $E({}^tYAY) = tr(A(J + m{}^tm)) = tr(AJ + Am{}^tm) = tr(AJ) + tr(Am{}^tm)$.

Or $tr(Am{}^tm) = tr((Am){}^tm) = tr({}^tm(Am)) = tr({}^tmAm) = {}^tmAm$

${}^tmAm$ est une matrice carrée à 1 ligne et 1 colonne.

Ainsi $\underline{\underline{E({}^tYAY) = tr(AJ) + {}^tmAm}}$.

PARTIE II. Le modèle linéaire.

A. Quelques résultats algébrique

Q1 a) $X \in \mathcal{M}_{\ell}(\mathbb{R})$ donc ${}^tX \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})$. Alors $H = X\,{}^tX \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})$.

De plus ${}^tH = {}^t({}^tXX) = {}^tX\,{}^t({}^tX) = {}^tXX = H$; H est symétrique.

H = ${}^tXX$ est une matrice symétrique carrée de $\mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})$.

b) Soit $t = (t_1, \dots, t_\ell) \in \operatorname{Ker} h$. $h(t) = 0_{\mathbb{R}^\ell}$; $H\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_\ell \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $Ht = 0_{\mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})}$ (on accepte ici comme dans toute la suite l'identification proposée).

Alors ${}^tXXt = 0_{\mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tt\,{}^tXXt = 0_{\mathbb{R}}$; ${}^t(Xt)Xt = 0$.

$\|Xt\| = 0$; ainsi $Xt = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $f(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi $t \in \operatorname{Ker} f$.

Le théorème du rang permet d'écrire que $k = \dim \mathbb{R}^k = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Ker} f + k$

Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f = 0$; $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^\ell}\}$. Par conséquent $t = 0_{\mathbb{R}^\ell}$.

Ceci achève de prouver que $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^\ell}\}$.

f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^\ell$ et $\dim \mathbb{R}^\ell = k < +\infty$ donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^\ell$. Ce qui permet de dire que :

H est inversible.

Q2 Utilisons le théorème fondamental relatif à la méthode des moindres carrés.

$y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{rg} X = k$.

Alors → $\min\limits_{\alpha \in \mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})} \|X\alpha - y\|$ existe

→ $\exists !\, \hat{\alpha} \in \mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$, $\|X\hat{\alpha} - y\| = \min\limits_{\alpha \in \mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})} \|X\alpha - y\|$

→ ${}^tXX$ est inversible et $\hat{\alpha} = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tXy = H^{-1}\,{}^tX$

Les identifications proposées nous permettent d'écrire que :

1°.. $\min_{\alpha\in\mathbb{R}^k}\|X\alpha-y\|$ existe

2°.. $\exists!\ \hat\alpha\in\mathbb{R}^k,\ \|X\hat\alpha-y\|=\min_{\alpha\in\mathbb{R}^k}\|X\alpha-y\|$

3°.. $\hat\alpha=H^{-1}\,{}^tXy$.

Ainsi $\min_{\alpha\in\mathbb{R}^k}\|y-X\alpha\|$ existe, $\exists!\ \hat\alpha\in\mathbb{R}^k,\ \|y-X\hat\alpha\|=\min_{\alpha\in\mathbb{R}^k}\|y-X\alpha\|$ et $\hat\alpha=H^{-1}\,{}^tXy$.

Remarque.. Il est préférable d'écrire $\hat\alpha=\begin{pmatrix}\hat\alpha_1\\ \vdots\\ \hat\alpha_k\end{pmatrix}$ que $\hat\alpha=\begin{pmatrix}\hat\alpha_1\\ \vdots\\ \hat\alpha_n\end{pmatrix}$.

Q3 a) $p(y)$ est la projection orthogonale de y sur $\mathrm{Im} f$.

Ainsi $p(y)$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|y-p(y)\|=\min_{\alpha\in\mathbb{R}^k}\|y-f(\alpha)\|$.

Donc $\|y-p(y)\|=\min_{\alpha\in\mathbb{R}^k}\|y-X\alpha\|$.

$p(y)\in\mathrm{Im} f$; $\exists\gamma\in\mathbb{R}^k,\ p(y)=X\gamma$. Alors $\|y-X\gamma\|=\min_{\alpha\in\mathbb{R}^k}\|y-X\alpha\|$

D'après Q2 : $\gamma=\hat\alpha$. Ainsi $p(y)=X\hat\alpha$.

$p(y)=X\hat\alpha$.

Alors $p(y)=XH^{-1}\,{}^tXy$. Notons que ceci vaut pour tout $y\in\mathbb{R}^n$.

Notons $\tilde p$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $XH^{-1}\,{}^tX$. $\forall y\in\mathbb{R}^n,\ p(y)=\tilde p(y)$. Alors $p=\tilde p$.

p et $\tilde p$ ont la même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $P=XH^{-1}\,{}^tX$.

$p^2=p$ car p est une projection donc $P^2=P$.

${}^tP={}^t(XH^{-1}\,{}^tX)={}^t({}^tX)\,{}^t(H^{-1})\,{}^tX=X({}^tH)^{-1}\,{}^tX\overset{H \text{ est symétrique}}{=}XH^{-1}\,{}^tX=P$

Finalement : $P=P^2={}^tP$ ... ce qui n'est pas un scoop car P est la matrice d'une projection orthogonale (donc d'un endomorphisme symétrique) dans une base orthonormale

b) $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\, p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, p$ car p est un projecteur orthogonal.

$\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, f$ par définition de p. Ainsi $\dim \mathrm{Im}\, p = \mathrm{rg}\, f = k > 0$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}\, p = n - \dim \mathrm{Im}\, p = n - k > 0$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (z_1, \dots, z_k)$ une base de $\mathrm{Im}\, p$ et $(z_{k+1}, \dots, z_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, p$.

Alors 1) $\mathcal{B} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ car $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$;

2) $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p(z_i) = z_i$ et $\forall i \in [\![k+1, n]\!]$, $p(z_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $P' = \begin{pmatrix} I_k & 0_{\mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})} & 0_{\mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R})} \end{pmatrix}$

Ainsi $tr(P') = tr(I_k) = k = \dim \mathrm{Im}\, p$.

Donc $tr(P') = k = rg(p) = rg(P)$.

Or P et P' sont semblables car ce sont deux matrices de p.

Ainsi $tr(P) = tr(P') = k = rg(P)$.

$\underline{tr(P) = rg(P) = k.}$

c) Pour tout i dans $[\![1, k]\!]$ notons $C_i(X)$ la $i^{\text{ème}}$ colonne de X.

Notons $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$ ... ou de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

$\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) = X e_i = f(e_i)$.

$\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) = 0 \Rightarrow f(e_i) = 0 \Rightarrow e_i \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow e_i = 0$!!

Ainsi $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) \neq 0$. De plus $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) \in \mathrm{Im}\, p$.

Alors $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $C_i(X) \neq 0$ et $p(C_i(X)) = C_i(X)$ ou $P C_i(X) = C_i(X)$.

<u>Les colonnes de X sont des vecteurs propres de la matrice P associés à la valeur propre 1</u>

Remarque... $(C_1(X), C_2(X), \dots, C_k(X))$ est une famille de cardinal k qui engendre $\mathrm{Im}\, f$ qui est de dimension k. Ainsi $(C_1(X), \dots, C_k(X))$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ donc une famille libre de $\mathbb{R}^n$... mais pas plus

" base de vecteurs propres... " n'a donc pas beaucoup de sens !

d] $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,p \\ \dim \mathrm{Im}\,p = k \end{array}\right.$ Soit $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_k)$ une base orthonormée de $\mathrm{Im}\,p$ et $(\varepsilon'_{k+1}, \dots, \varepsilon'_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,p$.

$\mathcal{B}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $M_{\mathcal{B}'}(p) = D = (d_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

où $d_{ij} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \in [\![1, k]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$ car $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p(\varepsilon'_i) = \varepsilon'_i$ et $\forall i \in [\![k+1, n]\!]$, $p(\varepsilon'_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Soit S la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}'$.

1°) S est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée ; ainsi S est inversible et $S^{-1} = {}^tS$.

2°) $S^{-1} P S = D$.

Alors $P = S D S^{-1} = S D\, {}^tS$.

<u>Reste une matrice orthogonale S de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P = S D\, {}^tS$, où</u>

<u>$D = (d_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est la matrice diagonale définie par $\left\{\begin{array}{l} d_{ij} = 1 \text{ si } i = j \in [\![1, k]\!] \\ d_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$.</u>

<u>Les k premières colonnes de S constituent une base orthonormée de $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,f$!!</u>

Q4 a] $\hat{u} = y - X\hat{\alpha} \underset{}{\overset{Q3\,a]}{=}} y - Py = (I_n - P)\,y$. $\hat{u} = \varphi y = \varphi(u + X\alpha) = \varphi u + \varphi X\alpha$

$X\alpha \in \mathrm{Im}\,p$ donc $PX\alpha = X\alpha$. Alors $\varphi X\alpha = (I_n - P)X\alpha = X\alpha - PX\alpha = 0$.

Finalement $\underline{\hat{u} = \varphi u}$. Notons aussi que $\underline{\hat{u} = \varphi y}$.

b] ${}^t\varphi = {}^t(I_n - P) = {}^tI_n - {}^tP = I_n - P = \varphi$.

$\varphi^2 = (I_n - P)^2 \underset{I_nP = PI_n}{=} I_n^2 - 2I_nP + P^2 = I_n - 2P + P = I_n - P = \varphi$.

$\underline{\varphi = \varphi^2 = {}^t\varphi}$ (normal car φ est la matrice dans une base orthonormée du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Ker}\,p$).

$tr(\varphi) = tr(I_n - P) = tr(I_n) - tr(P) = n - k$. $\underline{\underline{tr(\varphi) = n - k}}$.

b) $\hat{u} = \varphi u$ donc ${}^t\hat{u}\hat{u} = {}^t(\varphi u)\varphi u = {}^tu\,{}^t\varphi\varphi u = {}^tu\,\varphi^2 u = {}^tu\,\varphi u$.

$\underline{\underline{{}^t\hat{u}\hat{u} = {}^tu\,\varphi u}}$.

${}^ty\,\varphi y \underset{\uparrow}{=} {}^ty\,\hat{u} \underset{\uparrow}{=} {}^ty\,\varphi u = {}^t(u + X\alpha)\varphi u = {}^tu\,\varphi u + {}^t(X\alpha)\varphi u$

$\varphi y = \hat{u} = \varphi u$

Or ${}^t(X\alpha)\varphi u = \langle X\alpha, \varphi u\rangle = 0$ car $X\alpha \in \mathrm{Im}\,p$, $\varphi u \in \mathrm{Im}(Id_{\mathbb{R}^n} - p) \overset{\text{ok?}}{=} \mathrm{Ker}\,p$ et $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Ker}\,p$ sont orthogonaux.

Ainsi $\underline{\underline{{}^ty\,\varphi y = {}^tu\,\varphi u}}$.

(Q5) a) Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

- Supposons que A est positive. Alors $\forall z \in \mathbb{R}^n$, ${}^tz\,Az \geq 0$.
  Soit λ une valeur propre de A. $\exists\, z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $Az_0 = \lambda z_0$.
  Alors $0 \leq {}^tz_0 A z_0 = {}^tz_0(\lambda z_0) = \lambda\, {}^tz_0 z_0 = \lambda \|z_0\|^2$
  Ainsi $\|z_0\|^2$ et $\lambda\|z_0\|^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$.
  Les valeurs propres de A sont positives.

- Réciproquement supposons les valeurs propres de A positives.
  Montrons que A est positive.
  A est symétrique et $A \in M_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormée $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Notons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$.
  Soit $z \in \mathbb{R}^n$. $z = \sum_{i=1}^n \langle z, z_i\rangle z_i$. Donc $Az = \sum_{i=1}^n \langle z, z_i\rangle Az_i = \sum_{i=1}^n \langle z, z_i\rangle \lambda_i z_i$

$$\text{Alors } {}^tz\,Az = \langle z, Az\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ (z_1,z_2,\dots,z_n) \text{ est orthonormée}}}{=} \sum_{i=1}^n \langle z, z_i\rangle\langle z, z_i\rangle \lambda_i = \sum_{i=1}^n (\langle z, z_i\rangle)^2 \lambda_i \underset{\substack{\uparrow \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geq 0}}{\geq} 0$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R}^n$, ${}^tz\,Az \geq 0$. A est positive.

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est positive, c'est à dire $\forall z \in \mathbb{R}^n,\ {}^t z A z \geqslant 0$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) $L \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$ donc ${}^tL \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$. Alors ${}^tLL \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})$.

${}^t({}^tL\,L) = {}^tL\,{}^t({}^tL) = {}^tLL$; ${}^tLL$ est donc symétrique

$\forall z \in \mathbb{R}^\ell,\ {}^tz({}^tL\,L)z = {}^t(Lz)Lz = \|Lz\|^2 \geqslant 0$. $\forall z \in \mathbb{R}^\ell,\ {}^tz({}^tLL)z \geqslant 0$.

${}^tLL$ est une matrice symétrique réelle positive de $\mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})$.

B. Estimation des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ et σ^2

Q1 a) Rappelons que $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes, que $E(U) = 0_n$ et $V(U) = \sigma^2 I_n$.

Alors → $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(U_i)$ existe et vaut 0

→ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(U_i, U_j)$ existe et vaut σ^2 si $i=j$, 0 si $i \neq j$.

$X\alpha \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X\alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Alors $Y = X\alpha + U = \begin{pmatrix} U_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ U_n + \beta_n \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède : → pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $E(U_i + \beta_i)$ existe et vaut β_i

→ pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(U_i+\beta_i, U_j+\beta_j)$ existe et vaut $\mathrm{cov}(U_i, U_j)$ donc σ^2 si $i=j$ et 0 si $i \neq j$.

Ainsi Y possède une (matrice) espérance qui est $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ donc $X\alpha$ et Y possède une matrice de variance-covariance qui est $\sigma^2 I_n$.

Par conséquent $E(Y)$ et $V(Y)$ existent, $E(Y) = X\alpha$ et $V(Y) = \sigma^2 I_n$.

$H^{-1}\,{}^tX \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$ et Y est une matrice aléatoire à n lignes et 1 colonne qui possède une espérance.

D'après I Q 2 a) (... adapté), $H^{-1}\,{}^tX\,Y$ est une matrice aléatoire à ℓ lignes et 1 colonne qui possède une (matrice) espérance égale à $H^{-1}\,{}^tX\,E(Y)$.

Ainsi $\hat{G} = H^{-1}\,{}^tX\,Y$ possède une matrice espérance égale à $H^{-1}\,{}^tX\,X\alpha$.

Or $H^{-1}\,{}^tX X \alpha = H^{-1} H \alpha = \alpha$.

Donc $E(\hat{G})$ existe et vaut α.

b) Posons $B = H^{-1}\,{}^tX$. $B \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$ et Y est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ qui possède une matrice de variance-covariance qui vaut $\sigma^2 I_n$.

D'après Q3 b), BY possède une matrice de variance-covariance qui vaut $B\,V(Y)\,{}^tB$

Ainsi $\hat{G} = H^{-1}\,{}^tX\,Y = BY$ possède une matrice de vaut $B\,V(Y)\,{}^tB$.

$V(\hat{G}) = B\,V(Y)\,{}^tB = H^{-1}\,{}^tX\,\sigma^2 I_n\,{}^t(H^{-1}\,{}^tX) = \sigma^2 H^{-1}\,{}^tX X ({}^tH)^{-1} = \sigma^2 H^{-1} H H^{-1} = \sigma^2 H^{-1}$.

$\hat{G}$ possède une matrice de variance-covariance et $V(\hat{G}) = \sigma^2 H^{-1}$!

Q2 a) ${}^tB \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$ et Y est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ qui possède une (matrice) espérance valant $X\alpha$.

Alors ${}^tB\,Y$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^\ell$ qui possède une (matrice) espérance valant ${}^tB X \alpha$.

On veut donc trouver une condition sur B pour que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^\ell$, ${}^tB X \alpha = \alpha$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^\ell$, ${}^tBX\alpha = \alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}^\ell$, $({}^tBX - I_\ell)\alpha = 0_{\mathbb{R}^\ell} \Leftrightarrow {}^tBX - I_\ell = 0_{\mathcal{M}_\ell(\mathbb{R})}$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^\ell$, ${}^tBX\alpha = \alpha \Leftrightarrow {}^tBX = I_\ell$.

Si B est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$ $\hat{C} = {}^tBY$ est un estimateur sans biais de α si et seulement si ${}^tBX = I_\ell$ ou ${}^tXB = I_\ell$

⚠ On est prié de ne pas parler d'inversibilité... $B \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$!!

<u>Remarque</u>.. $\hat{G} = H^{-1}\,{}^tX\,Y = {}^t(X\,{}^tH^{-1})Y = {}^t(XH^{-1})Y$ car H^{-1} est symétrique dans la mesure où H est symétrique.

Notons alors que $XH^{-1} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et que ${}^t(XH^{-1})X = {}^tH^{-1}\,{}^tXX = H^{-1}H = I_k$

de toute évidence XH^{-1} n'est pas nulle car ${}^t(XH^{-1})X = I_k$.

<u>b)</u> ${}^tF = {}^tB - H^{-1}\,{}^tX$ donc ${}^tFX = {}^tBX - H^{-1}\,{}^tXX = I_k - I_k = 0_{\mathcal{M}_k(\mathbb{R})}$.

${}^tBX = I_k$ car B vérifie la condition de a)

$${}^tFX = 0_{\mathcal{M}_k(\mathbb{R})}.$$

$\hat{C} = {}^tBY$ et $V(Y)$ existe et vaut $\sigma^2 I_n$.

Alors $V(\hat{C})$ existe et vaut ${}^tB\,V(Y)\,{}^t({}^tB)$ d'après I Q3 b.

Ainsi $V(\hat{C}) = {}^tB\sigma^2 I_n\,B = \sigma^2\,{}^tBB$. $\underline{V(\hat{C}) = \sigma^2\,{}^tBB}$.

donc $V(\hat{C}) - V(\hat{G}) = \sigma^2({}^tBB - H^{-1})$.

Notons que $\sigma^2({}^tBB - H^{-1})$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ car ${}^tBB$ et H^{-1} sont deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Il en est de même de ${}^tBB - H^{-1}$.

Pour montrer que $V(\hat{C}) - V(\hat{G})$ est positive il suffit de montrer que ${}^tBB - H^{-1}$ est positive car $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme cela, rien que pour rire, calculons ${}^tFF$.

${}^tF = {}^tB - H^{-1}\,{}^tX$ donc $F = B - {}^t({}^tX)\,{}^t(H^{-1}) = B - XH^{-1}$.

Alors ${}^tFF = {}^tF(B - XH^{-1}) = {}^tFB - {}^tFXH^{-1} \underset{{}^tFX = 0_{\mathcal{M}_k(\mathbb{R})}}{=} {}^tFB = ({}^tB - H^{-1}\,{}^tX)B = {}^tBB - H^{-1}\,{}^tXB \underset{{}^tXB = I_k}{=} {}^tBB - H^{-1}$!!

Ainsi ${}^tBB - H^{-1} = {}^tFF$ avec $F \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$

d'après II A Q5 <u>b)</u> ${}^tFF$ est symétrique réelle et surtout positive.

Ainsi ${}^tBB - H^{-1}$ est positive, $\sigma^2({}^tBB - H^{-1})$ aussi.

$$V(\hat{C}) - V(\hat{G}) \text{ est positive.}$$

Q3 a) $\hat{U} = Y - X\hat{\beta} = Y - XH^{-1}\,{}^tXY = Y - PY = QY = Q(X\alpha + U) = QX\alpha + QU$.

Or $PX\alpha = X\alpha$ donc $QX\alpha = 0$. Ainsi $\underline{\hat{U} = QU}$.

car $PX\alpha = XH^{-1}\,{}^tXX\alpha = XH^{-1}H\alpha = X\alpha$.

b) $E(\hat{U}) = Q\,E(U)$ ($E(\hat{U})$ existe car $E(U)$ existe) et $E(U) = 0$.

Ainsi $\underline{E(\hat{U}) = 0}$.

$V(U)$ existe et $\hat{U} = QU$ donc $\underline{V(\hat{U})\text{ existe}}$ et vaut : $Q\,V(U)\,{}^tQ$

d'après I Q3 b). Rappelons que $V(U) = \sigma^2 I_n$.

Ainsi $V(\hat{U}) = Q\sigma^2 I_n\,{}^tQ = \sigma^2 Q\,{}^tQ \underset{{}^tQ = Q}{=} \sigma^2 Q^2 \underset{Q^2 = Q}{=} \sigma^2 Q$. $\underline{V(\hat{U}) = \sigma^2 Q}$.

Supposons $(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n)$ indépendantes. Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow cov(\hat{U}_i, \hat{U}_j) = 0$

Ainsi $V(\hat{U}) = Diag(V(\hat{U}_1), \dots, V(\hat{U}_n))$.

De plus $\forall i \in [\![1,n]\!], V(\hat{U}_i) > 0$

Alors $rg\, V(\hat{U}) = n$. Or $V(\hat{U}) = \sigma^2 Q$ et $rg\, Q = n - k < n$.

D'où la contradiction.

$\underline{\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

c) $\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{pmatrix}$ donc ${}^t\hat{U}\hat{U} = (\hat{U}_1 \cdots \hat{U}_n)\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{pmatrix}$; $\underline{{}^t\hat{U}\hat{U} = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2}$.

${}^t\hat{U}\hat{U} = {}^t(QU)QU = {}^tU\,{}^tQQU = {}^tUQ^2U = {}^tUQU$; $\underline{{}^t\hat{U}\hat{U} = {}^tUQU}$.

${}^tYQY = {}^tYQ(X\alpha + U) = {}^tYQX\alpha + {}^tYQU \underset{QX\alpha = 0}{=} {}^tYQU = {}^t(X\alpha + U)QU = {}^t\alpha\,{}^tXQU + {}^tUQU$.

Or ${}^t\alpha\,{}^tXQU \underset{Q = {}^tQ}{=} {}^t\alpha\,{}^tX\,{}^tQU = {}^t(QX\alpha)U \underset{QX\alpha = 0}{=} 0$. Alors $\underline{{}^tYQY = {}^tUQU}$

Finalement : $\underline{\underline{{}^t\hat{U}\hat{U} = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = {}^tUQU = {}^tYQU.}}$

d) $E(U)$ existe et vaut 0, $V(U)$ existe et vaut $\sigma^2 I_n$.

D'après I Q3 c) $E({}^tUQU)$ existe et vaut : $tr(QV(U)) + {}^tE(U)QE(U)$.

Donc $\underline{\underline{E({}^t\hat{U}\hat{U})\text{ existe}}}$ et vaut : $tr(Q\sigma^2 I_n) + 0 = \sigma^2 tr(Q) = \sigma^2(n-k)$.

$\underline{\underline{E({}^t\hat{U}\hat{U}) = \sigma^2(n-k).}}$

$E({}^t\hat{U}\hat{U})$ existe et vaut $\sigma^2(n-k)$ donc $E(\Delta_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n-k}\sigma^2(n-k) = \sigma^2$

$\underline{\underline{\Delta_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.}}$

C. Etude d'une suite d'estimateurs.

(Q1) Posons $QU = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$ et $Q = (q_{ij})$.

Alors ${}^tUQU = \sum_{i=1}^{n} U_i T_i = \sum_{i=1}^{n} U_i \sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_i U_j$

Ainsi $\underline{\underline{{}^tUQU = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_i U_j .}}$

(Q2) $({}^tUQU)^2 = ({}^tUQU)({}^tUQU) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} U_i U_j \times \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{kl} U_k U_l$

$({}^tUQU)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{ij} q_{kl} U_i U_j U_k U_l$

"En envisageant plusieurs cas nous allons montrer que $U_iU_jU_kU_l$ possède une espérance et la calculer".

Soit $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$. card $\{i,j,k,l\} \in [\![1,4]\!]$!

1^er Cas.. card $\{i,j,k,\ell\}=4$.

U_i, U_j, U_k, U_ℓ sont quatre variables aléatoires indépendantes ayant une espérance nulle. Alors $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut $E(U_i)E(U_j)E(U_k)E(U_\ell)$ donc 0 !

2^e Cas.. card $\{i,j,k,\ell\}=3$

$\exists(s_1,s_2,s_3)\in[\![1,n]\!]^3$, tel que $\begin{cases}\{i,j,k,\ell\}=\{s_1,s_2,s_3\} \text{ et}\\ U_iU_jU_kU_\ell = U_{s_1}^2\,U_{s_2}\,U_{s_3}.\end{cases}$

$U_{s_1}, U_{s_2}, U_{s_3}$ sont indépendantes donc $U_{s_1}^2$, U_{s_2} et U_{s_3} sont indépendantes et possèdent une espérance. Alors $E(U_{s_1}^2U_{s_2}U_{s_3})$ existe et vaut $E(U_{s_1}^2)E(U_{s_2})E(U_{s_3})$ donc vaut 0. $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut 0.

3^e Cas.. card $\{i,j,k,\ell\}=2$

a) $\exists(s_1,s_2)\in[\![1,n]\!]^2$, tel que $\begin{cases}\{i,j,k,\ell\}=\{s_1,s_2\}\\ U_iU_jU_kU_\ell = U_{s_1}^2\,U_{s_2}^2\end{cases}$

$U_{s_1}^2$ et $U_{s_2}^2$ sont indépendantes et possèdent une espérance alors $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut $E(U_{s_1}^2)E(U_{s_2}^2)=\sigma^2\times\sigma^2=\sigma^4$

$(\forall s\in[\![1,n]\!],\ E(U_s^2)=V(U_s)+(E(U_s))^2=\sigma^2+0=\sigma^2)$.

b) $\exists(s_1,s_2)\in[\![1,n]\!]^2$, tel que $\begin{cases}\{i,j,k,\ell\}=\{s_1,s_2\}\\ U_iU_jU_kU_\ell = U_{s_1}^3\,U_{s_2}.\end{cases}$

$U_{s_1}^3$ et U_{s_2} sont indépendantes et possèdent une espérance. $E(U_{s_1}^3U_{s_2})$ existe et vaut $E(U_{s_1}^3)E(U_{s_2})$ donc 0.

$E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut 0.

4^e Cas card $\{i,j,k,\ell\}=1$. $i=j=k=\ell$. $U_iU_jU_kU_\ell=U_i^4$ et U_i^4 possède une espérance qui vaut $3\sigma^4$. $E(U_iU_jU_kU_\ell)$ existe et vaut $3\sigma^4$.

Finalement $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, $E(U_iU_jU_kU_l)$ existe.

Ainsi $E(({}^tU\varphi U)^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ij} q_{kl} \; E(U_iU_jU_kU_l)$.

Nous avons aussi vu que si $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, $E(U_iU_jU_kU_l)$ est

non nul que si : $((i=j)$ et $(k=l))$ ou $((i=k)$ et $(j=l))$ ou $((i=l)$ et $(j=k))$.

Soit $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$.

Si $i \neq j$ $\quad E(U_iU_jU_kU_l) = \begin{cases} \sigma^4 & \text{si } (k=i \text{ et } l=j) \text{ ou } (k=j \text{ et } l=i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\boxed{{}^t\varphi=\varphi}$

Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ij}q_{kl} E(U_iU_jU_kU_l) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \sigma^4 q_{ij}[q_{ij}+q_{ji}] = 2\sigma^4 \times \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n q_{ij}^2$

Si $i=j$ $\quad E(U_iU_jU_kU_l) = E(U_i^2U_kU_l) = \begin{cases} 3\sigma^4 & \text{si } k=l=i \\ \sigma^4 & \text{si } k=l\neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ii}q_{kl} E(U_i^2U_kU_l) = \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 \times 3\sigma^4 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n q_{ii}q_{kk}\times\sigma^4$

$$= \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 \times 2\sigma^4 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n q_{ii}\, q_{kk}\, \sigma^4$$

$$= \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 \times 2\sigma^4 + \sum_{i=1}^n q_{ii} \sum_{k=1}^n q_{ll}\; \sigma^4$$

$$= 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 + (\mathrm{tr}(\varphi))^2\sigma^4$$

Alors $E(({}^tU\varphi U)^2) = \sigma^4\left[2\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n q_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^n q_{ii}^2 + (\mathrm{tr}(\varphi))^2\right]$

$E(({}^tU\varphi U)^2) = \sigma^4\Big[2\underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^2}_{=\mathrm{tr}({}^t\varphi\varphi)=\mathrm{tr}(\varphi^2)} + \mathrm{tr}(\varphi)^2\Big] = \sigma^4[2\,\mathrm{tr}(\varphi^2) + (\mathrm{tr}(\varphi))^2]$

$$E\left(({}^tU\varphi U)^2\right) = \sigma^4\left[(tr(\varphi))^2 + 2\,tr(\varphi^2)\right].$$

$tr(\varphi) = n-\ell$ et $tr(\varphi^2) = tr\,\varphi = n-k$.

Ainsi $E\left(({}^tU\varphi U)^2\right) = \sigma^4\left[(n-\ell)^2 + 2(n-\ell)\right] = \sigma^4(n-k)(n-k+2)$.

$$E\left(({}^tU\varphi U)^2\right) = \sigma^4(n-k)(n-k+2).$$

Q3 $V(\Delta_n) = V\left(\frac{{}^t\hat{U}\hat{U}}{n-\ell}\right) = \frac{1}{(n-\ell)^2}V({}^t\hat{U}\hat{U}) = \frac{1}{(n-\ell)^2}\left[E\left(({}^t\hat{U}\hat{U})^2\right) - \left(E({}^t\hat{U}\hat{U})\right)^2\right]$

$V(\Delta_n) = \frac{1}{(n-k)^2}\left[E\left(({}^tU\varphi U)^2\right) - \left(\sigma^2(n-k)\right)^2\right] = \frac{1}{(n-k)^2}\left[\sigma^4(n-k)(n-\ell+2) - \sigma^4(n-k)^2\right]$

$V(\Delta_n) = \frac{\sigma^4}{n-k}\left[n-k+2-(n-k)\right] = \frac{2\sigma^4}{n-k}$. $\quad V(\Delta_n) = \frac{2\sigma^4}{n-k}$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq P(|\Delta_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) = P(|\Delta_n - E(\Delta_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\Delta_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2\sigma^4}{(n-k)\varepsilon^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Le théorème d'encadrement donne alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\Delta_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) = 0$.

$(\Delta_n)_{n\geq \ell+1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à σ^2.

La suite d'estimateurs $(\Delta_n)_{n\geq \ell+1}$ de σ^2 est convergente.