BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

CODE EPREUVE :

283

CCIP_M2_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n, $(n \geqslant 1)$, à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ'.

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ *le nombre de racines réelles de* Q_ω.

1. Montrer que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p $(p \in]0,1[)$.
On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.

a) Déterminer la loi de X_0.

b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre 1/2.
On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0}, F_{Y_1} et F_Y, les fonctions de répartition de Y_0, Y_1 et Y, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right]$, où exp désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\left[1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right]$.

d) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II. Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. *On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.*

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P, la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P, R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1}. Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier k ($k \geqslant 2$), tel que $R_k = 0$. On note R_m, ($m \geqslant 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2R_2 - R_3 \\ \quad\vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1}R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_mR_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier j de $[\![0, m-1]\!]$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b) En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.

c) Soit j un entier de $[\![1, m-1]\!]$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j, alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ une t-liste ($t \geqslant 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p-liste ($p \leqslant t$) $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, \ldots, \widehat{s_p})$. On appelle *nombre de changements de signe de s*, le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \widehat{s_i}\widehat{s_{i+1}} < 0\}$. Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.

Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\widehat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x, on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m-liste $(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$-liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$.
On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P.

a) En étudiant les variations de P au voisinage de x_0, montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.

b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \ldots, R_m$, soit, il existe un entier j de $[\![1, m-1]\!]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).

c) Déduire des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0+h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4. a) Soit α une racine (réelle ou complexe) de P. Montrer que si $|\alpha| \geqslant 1$, alors $|\alpha|^n \leqslant |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. En déduire, pour toute racine α de P, l'inégalité : $|\alpha| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P.

5. On définit en Pascal

```
const n = ... ;
Type tab = array[1..n] of real ;
Var T : tab ;
```

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Function nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels (`T[1], T[2],..., T[n]`).
On tiendra compte du fait que le tableau `T` peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau `T` et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \cdots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note V^* le polynôme réciproque du polynôme V, défini par : $V^*(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \cdots + v_{m-1} X + v_m$. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n, normalisé, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$.
On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leqslant N_1(T(P)) + 2$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leqslant N_1(T^k(P)) + 2k$.

2. a) Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^*)$.

3. Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :
$Q_k(x) = 1 + a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \cdots + a_1\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}$. Montrer que $(T^k(P))^* = n^k Q_k$.

4. a) Établir, pour tout réel y de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1-y)e^y \leqslant 1$.

b) On **admet** la propriété suivante : soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \rho\}$. Soit U un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit μ un réel strictement positif tel que pour tout z de D_ρ, $|U(z)| \leqslant \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel : $\dfrac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\dfrac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $N_1(P) \leqslant 2k + \frac{n}{k}\ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

c) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\psi(x) = 2x + \dfrac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.

i) Étudier les variations de ψ.

ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leqslant 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

iii) En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))}$.

d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ, strictement positif.

Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \cdots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω. On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On définit la variable aléatoire L_n par : $L_n = 2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n.

2. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω, on a :

$$M_n(\omega) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

3. Soit h une fonction de classe C^2, concave sur $\mathbb{R}^+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.

a) Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a : $h(x) \leqslant h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

b) En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leqslant h(E(W))$.

4. a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \dfrac{a^k}{k!}$ est convergente.

5. a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

b) Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à $1/2$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

*** FIN ***

Partie I . Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires.

Q1 N est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ et $N(\Omega) \subset \{0,1,2\}$.

Pour montrer que N est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ il suffit de montrer que $N^{-1}(\{0\})$, $N^{-1}(\{1\})$ et $N^{-1}(\{2\})$ sont des éléments de $\mathcal{A}$.

Posons $\Delta = X_1^2 - 4X_0$.

X_1 et X_0 sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc il en est de même pour X_1^2 et $-4X_0$.

Δ est alors une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comme somme de deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ainsi $\Delta^{-1}(]-\infty, 0[)$, $\Delta^{-1}(\{0\})$ et $\Delta^{-1}(]0,+\infty[)$ sont des éléments de $\mathcal{A}$.

Or $N^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega \mid \Delta(\omega) < 0\} = \Delta^{-1}(]-\infty, 0[)$; de même $N^{-1}(\{1\}) = \Delta^{-1}(\{0\})$ et $N^{-1}(\{2\}) = \Delta^{-1}(]0,+\infty[)$. Alors $N^{-1}(\{0\})$, $N^{-1}(\{1\})$ et $N^{-1}(\{2\})$ sont des éléments de $\mathcal{A}$.

Ceci achève de montrer que $\underline{N \text{ est une variable aléatoire sur } (\Omega, \mathcal{A}, P)}$.

Q2 a) $X_0(\Omega) = \{-1, 1\}$. $P(X_0 = -1) = P(2Z - 1 = -1) = P(Z = 0) = 1 - p$.

$P(X_0 = 1) = P(2Z - 1 = 1) = P(Z = 1) = p$.

$\underline{X_0(\Omega) = \{-1, 1\}.\quad P(X_0 = 1) = p \text{ et } P(X_0 = -1) = 1 - p.}$

b) $\Delta = X_1^2 - 4X_0 = 1 - 4X_0$. Si X_0 prend la valeur 1, Δ prend la valeur -3 et N prend la valeur 0. Si X_0 prend la valeur -1, Δ prend la valeur 5 et N prend la valeur 2.

$N(\Omega) = \{0, 2\}$. $P(N = 0) = P(X_0 = 1) = p$ et $P(N = 2) = P(X_0 = -1) = 1 - p$.

$E(N) = 2P(N = 2) = 2P(X_0 = -1) = 2(1 - p)$.

$\underline{N(\Omega) = \{0, 2\}.\quad P(N = 0) = p \text{ et } P(N = 2) = 1 - p.\quad E(N) = 2(1 - p).}$

(Q3) Notons F la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$. $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/2} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

- $Y_1(\Omega)=\mathbb{R}_+$

Ainsi $\forall x\in\,]-\infty,0[,\ F_{Y_1}(x)=0$

$\forall x\in[0,+\infty[,\ F_{Y_1}(x)=P(Y_1\leq x)=P(X_1^2\leq x)=P(-\sqrt{x}\leq X_1\leq\sqrt{x})=F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})=F(\sqrt{x})$

$\forall x\in[0,+\infty[,\ F_{Y_1}(x)=F(\sqrt{x})=1-e^{-\sqrt{x}/2}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{Y_1}(x)=\begin{cases}1-e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\quad \text{ou}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{Y_1}(x)=\begin{cases}1-e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Observons que $\forall x\in\,]-\infty,0]$, $F_{Y_1}(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $F_{Y_1}(x)=1-e^{-\sqrt{x}/2}$.

Rappelons que $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Alors F_{Y_1} est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$, et de classe C^1 sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi Y_1 est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in\,]-\infty,0[,\ F'_{Y_1}(x)=0$ et $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ F'_{Y_1}(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/2}$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

f_1 est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_1} sur $\mathbb{R}-\{0\}$.

Ainsi f_1 est une densité de Y_1.

- $Y_0(\Omega) =]-\infty, 0]$.

  Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $F_{Y_0}(x) = 1$.

  $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_0}(x) = P(Y_0 \leq x) = P(-4X_0 \leq x) = P(X_0 \geq -\frac{x}{4}) = 1 - P(X_0 < -\frac{x}{4})$.

  $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_0}(x) = 1 - P(X_0 \underline{\underline{\leq}} -\frac{x}{4}) = 1 - (1 - e^{-(-\frac{x}{4})/2}) = e^{x/8}$.

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_0}(x) = \begin{cases} e^{x/8} \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Notons que $\forall x \in]-\infty, 0\underline{]}$, $F_{Y_0}(x) = e^{x/8}$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $F_{Y_0}(x) = 1$.

F_{Y_0} est donc de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0,+\infty[$. Cela suffit pour dire que F_{Y_0} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi <u>Y_0 est une variable aléatoire à densité</u>.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_{Y_0}(x) = \frac{1}{8} e^{x/8}$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $F'_{Y}(x) = 0$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} e^{x/8} \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

f_0 est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_0} sur $\mathbb{R}^*$ donc <u>f_0 est une densité de Y_0</u>.

Q4 a) $t \mapsto -\frac{1}{2}(\frac{t}{4} + \sqrt{t})$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi

$t \mapsto e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par produit <u>g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$</u>

- $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq g(t) \leq t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{8}} = 8^{1/2}\,\Gamma(1/2)\ \dfrac{t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{8}}}{8^{1/2}\,\Gamma(1/2)}$.

  $-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}) \leq -\frac{1}{2}\,\frac{t}{4}$

- le cours nous apprend que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2-1} e^{-t/8}}{8^{1/2}\Gamma(1/2)}\,dt$ converge et vaut 1 (loi gamma de paramètres 8 et 1/2).

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives et les deux points précédents donnent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

b) Y_1 est une variable aléatoire de densité f_1 bornée.
Y_0 est une variable aléatoire de densité f_0 (bornée).
Y_1 et Y_0 sont indépendantes.

Alors 1) $Y = Y_1 + Y_0$ est une variable aléatoire à densité.
2) $f_Y : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x-t)\,dt$ en est une densité.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_Y(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}/2} f_{Y_0}(x-t)\,dt$

1er cas... $x \in]-\infty, 0[$. Alors $\forall t \in [0, +\infty[$, $x - t < 0$

Ainsi $f_Y(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}/2} \frac{1}{8} e^{\frac{x-t}{8}}\,dt = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \frac{t}{4}\right)} dt$

$f_Y(x) = \dfrac{1}{32} e^{x/8} \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

2ème cas... $x \in [0, +\infty[$. Si $t \in [x, +\infty[$, $x - t \leq 0$ et si $t \in]x, +\infty[$, $x - t > 0$.

Alors $f_Y(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}/2} \frac{1}{8} e^{\frac{x-t}{8}}\,dt = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t)\,dt$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32} e^{x/8} \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{1}{32} e^{x/8} \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\,dt & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

. f_Y est une densité de Y.

Q5 a) Pour $\forall t\in]0,+\infty[$, $\varphi(t)=\sqrt{t}$.

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}+\sqrt{t}\right)}dt=\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\,2\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\varphi(t))^2}{4}+t\right)}dt.$$

Pour $\forall u\in]0,+\infty[$, $h(u)=2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4}+u\right)}$

- h est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\,h(\varphi(t))\,dt$ converge.
- φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u)=+\infty$.

Ainsi φ est de classe C^1, est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty}\varphi'(t)h(\varphi(t))dt$ et $\int_0^{+\infty}h(u)du$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

Or $\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\,h(\varphi(t))dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty}h(u)du$ converge et vaut $\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\,h(\varphi(t))dt=\int_0^{+\infty}g(t)dt$.

Alors $\int_0^{+\infty}g(t)dt=\int_0^{+\infty}2\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4}+u\right)}du$.

<u>Le changement de variable $u=\sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty}g(t)dt$ est légitime.</u>

b) $$\int_0^{+\infty}g(t)dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4}+u\right)}du=2e^{1/2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4}+u+1\right)}du$$

$$\int_0^{+\infty}g(t)dt=2e^{1/2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+1\right)^2}du$$

$u\to\frac{u}{2}+1$ définit une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ de classe C^1. Ceci légitime le changement de variable $v=\frac{u}{2}+1$ dans la dernière intégrale.

Alors $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 2e^{x/2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2}du = 2\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2}2dv$

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}dv.$$

$\forall x\in]-\infty,0[,\ f_Y(x) = \frac{1}{32}e^{x/8}\int_0^{+\infty} g(t)dt$ et $\forall x\in[0,+\infty[,\ f_Y(x) = \frac{1}{32}e^{x/8}\int_x^{+\infty} g(t)dt$

Donc $\forall x\in]-\infty,0]$, $f_Y(x) = \frac{1}{32}e^{x/8}\int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{32}e^{x/8}4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}dv$

$\forall x\in]-\infty,0]$, $f_Y(x) = \frac{1}{8}e^{x/8}\sqrt{e}\sqrt{2\pi}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}dv$

$\forall x\in]-\infty,0]$, $f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\int_1^{+\infty}\varphi(v)dv = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\left(1-\int_{-\infty}^{1}\varphi(v)dv\right)$

$$\forall x\in]-\infty,0],\ f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}(1-\phi(1)).$$

c) Soit $x\in[0,+\infty[$. Le changement de variable $u=\sqrt{t}$ (que l'on légitime de la même manière que dans b)) permet d'obtenir :

$$\int_x^{+\infty} g(t)dt = \int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})}dt = 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{4}+u)}du = 2\sqrt{e}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2}du.$$

Un second changement de variable $v=\frac{u}{2}+1$ donne alors :

$$\int_x^{+\infty} g(t)dt = 2\sqrt{e}\int_{\frac{\sqrt{x}}{2}+1}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}2dv = 4\sqrt{2\pi e}\int_{\frac{\sqrt{x}}{2}+1}^{+\infty}\varphi(v)dv = 4\sqrt{2\pi}e\left(1-\phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right)$$

Alors $f_Y(x) = \frac{1}{32}e^{x/8}\int_x^{+\infty} g(t)dt = \frac{\sqrt{2\pi e}}{4}e^{x/8}\left[1-\phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right]$

$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right].$

d) $\Pi(\Omega) = \{0,1,2\}$. $\quad Y = X_1^2 - 4X_0$.

- $P(\Pi=1) = P(Y=0) = 0$ car Y est une variable aléatoire à densité.

- $P(\Pi=0) = P(Y<0) = \int_{-\infty}^{0} f_Y(x)dx = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}(1-\phi(1)) \int_{-\infty}^{0} e^{x/8}dx$.

$P(\Pi=0) = \sqrt{2\pi e}\,(1-\phi(1)) \int_{-\infty}^{0} f_0(x)dx = \sqrt{2\pi e}\,(1-\phi(1))$ car $\int_{-\infty}^{0} f_0(x)dx = 1$.

- Alors $P(\Pi=2) = 1 - 0 - \sqrt{2\pi e}\,(1-\phi(1))$.

Ainsi $P(\Pi=0) = \sqrt{2\pi e}\,(1-\phi(1))$, $P(\Pi=1)=0$ et $P(\Pi=2) = 1-\sqrt{2\pi e}\,(1-\phi(1))$

$E(\Pi) = 0P(\Pi=0) + 1P(\Pi=1) + 2P(\Pi=2) = 2P(\Pi=2)$.

$E(\Pi) = 2\left(1-\sqrt{2\pi e}\,(1-\phi(1))\right)$.

Remarque.. $P(\Pi=0) \simeq 0,6559$. $P(\Pi=2) \simeq 0,3441$.

Une version 2 de II Q5 b) mise ici pour économiser une feuille.

```
Function nbchgs(n:integer;T:tab):integer;

var j,c,k:integer;d:boolean;

begin

j:=0;c:=0;

repeat
j:=j+1;
until  (T[j]<>0) or (j=n);


if j<n then begin
            d:=(T[j]>0);
            for k:=j+1 to n do
            if d=(T[k]<0) then begin
                                   c:=c+1;d:=(T[k]>0);
                                   end;

            end;

nbchgs:=c;
end;
```

PARTIE II

Q1 Raisonnons par l'absurde et supposons que $\forall \ell \in [\![2,+\infty[\![$, $R_\ell \neq 0$.

$R_0 = P \neq 0$ et $R_1 = -P' \neq 0$ car $\deg P \geq 1$. Ainsi $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $R_\ell \neq 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. $R_{j+1} \neq 0$ donc $-R_{j+2}$ est le reste dans la division de R_j par R_{j+1} ;

ainsi $\deg(-R_{j+2}) = \deg R_{j+2} < \deg R_{j+1}$ ou $\deg R_{j+2} + 1 \leq \deg R_{j+1}$.

$\forall j \in \mathbb{N}$, $\deg R_{j+2} + 1 \leq \deg R_{j+1}$ ou $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\deg R_{j+1} + 1 \leq \deg R_j$.

Cette inégalité vaut encore pour $j=0$ car $\deg R_1 + 1 = \deg(-P') + 1 = n-1+1 = n = \deg R_0$.

Finalement $\forall j \in \mathbb{N}$, $1 \leq \deg R_j - \deg R_{j+1}$.

$\forall r \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{r} 1 \leq \sum_{j=0}^{r} (\deg R_j - \deg R_{j+1}) = \deg R_0 - \deg R_{r+1} \overset{R_{r+1} \neq 0}{\leq} \deg R_0 = n$

Alors $\forall r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$! En particulier $n+1 \leq n$!!

Ainsi $\exists \ell \in [\![2,+\infty[\![$, $R_\ell = 0$.

Remarque.. $\{\ell \in [\![2,+\infty[\![\mid R_\ell = 0\}$ est une partie non vide de $[\![2,+\infty[\![$.
Cette partie possède un plus petit élément m'. $m' \geq 2$.
Posons $m = m'-1$. Alors $m \geq 1$ et $R_m \neq 0$.

$R_{m+1} = R_{m'} = 0$. Alors $\forall \ell \in [\![m+1,+\infty[\![$, $R_\ell = 0$ (récurrence simple).

Notons encore que $R_0 \neq 0$, $R_1 \neq 0$ et si $\ell \in [\![2,+\infty[\![\cap [\![0,m]\!]$, $R_\ell \neq 0$.

Ainsi $\forall \ell \in [\![0,m]\!]$, $R_\ell \neq 0$ et $\forall \ell \in [\![m+1,+\infty[\![$, $R_\ell = 0$.

Q2 a) Soit j un élément de $[\![0,m-1]\!]$ et soit x_0 un réel tels que :

$R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$.

Montrons à l'aide d'une récurrence descendante que $\forall k \in [\![0,j]\!]$, $R_k(x_0) = R_{k+1}(x_0)$.

→ la propriété est vraie pour $k = j$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1,j]\!]$ et montrons la pour $k-1$.

$0 \leq k-1 < j \leq m-1$ donc $R_{k-1} = R_k S_k - R_{k+1}$. Or par hypothèse de récurrence $R_k(x_0) = R_{k+1}(x_0) = 0$. Ainsi $R_{k-1}(x_0) = R_k(x_0) S_k(x_0) - R_{k+1}(x_0) = 0$. Alors $R_{k-1}(x_0) = R_k(x_0) = 0$ et la récurrence s'achève.

la propriété est en particulier vraie pour $k=0$. Ainsi $R_1(x_0)=R_0(x_0)=0$.

Alors $P'(x_0)=P(x_0)=0$ car $R_0=P$ et $R_1=-P'$.

Remarque.. Notons que ceci est impossible car toutes les racines réelles de P sont simples.

Par conséquent il n'existe pas d'élément j appartenant à $[\![0,m-1]\!]$ et de réel x_0 tels que $R_j(x_0)=R_{j+1}(x_0)=0$.

b) Supposons que R_m possède une racine réelle x_0.

$R_{m-1}(x_0)=S_m(x_0)R_m(x_0)=0$.

Alors $m-1\in[\![0,m-1]\!]$ et $R_{m-1}(x_0)=R_{(m-1)+1}(x_0)=0$. Ainsi $P(x_0)=P'(x_0)=0$

Alors x_0 est une racine réelle de P d'ordre au moins deux!

R_m n'a pas de racine réelle.

c) Soit $j\in[\![0,m-1]\!]$. Supposons que x_0 est une racine réelle de R_j.

$R_{j-1}(x_0)=S_j(x_0)R_j(x_0)-R_{j+1}(x_0)=-R_{j+1}(x_0)$.

De plus $R_{j+1}(x_0)\neq 0$ car $R_{j+1}(x_0)=0$ donne $R_j(x_0)=R_{j+1}(x_0)$ avec $j\in[\![0,m-1]\!]$ ce qui est impossible comme nous l'avons vu à la fin de a)

Ainsi $R_{j-1}(x_0)=-R_{j+1}(x_0)$ et $R_{j+1}(x_0)\neq 0$ donc $R_{j-1}(x_0)R_{j+1}(x_0)<0$.

Si $j\in[\![0,m-1]\!]$ et si x_0 est un zéro de R_j alors $R_{j-1}(x_0)R_{j+1}(x_0)<0$.

Q3 a) $x_0\in\mathbb{R}$ et $P(x_0)=0$. Ainsi $P'(x_0)\neq 0$ car les racines réelles de P sont simples.

Supposons par exemple que $P'(x_0)>0$ (même démarche ou changer P en $-P$... si $P'(x_0)<0$)

P' est continue en x_0 donc : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow|P'(x)-P'(x_0)|<\varepsilon$

En particulier $\exists\delta_1\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|P'(x)-P'(x_0)|<\dfrac{P'(x_0)}{2}$

$\forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$, $-\frac{P'(x_0)}{2} < P'(x) - P'(x_0) < \frac{P'(x_0)}{2}$.

$\forall x \in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$, $0 < \frac{P'(x_0)}{2} = P'(x_0) - \frac{P'(x_0)}{2} < P'(x)$.

Ainsi $\forall x \in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$, $0 < P'(x)$.

Soit $h \in]0, \delta_1[$. $[x_0-h, x_0+h] \subset]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$.

Donc $\forall x \in [x_0-h, x_0+h]$, $P'(x) > 0$. P est donc strictement croissante sur

$[x_0-h, x_0+h]$ et $P(x_0)=0$. Alors $P(x_0-h) < 0$ et $P(x_0+h) > 0$.

De plus $P'(x_0+h) > 0$ et $P'(x_0-h) > 0$.

Ainsi $P(x_0+h)\, P'(x_0+h) > 0$ et $P(x_0-h)\, P'(x_0-h) < 0$.

Alors $R_0(x_0+h) R_1(x_0+h) < 0$ et $R_0(x_0-h) R_1(x_0-h) > 0$ car $R_0 = P$ et $R_1 = -P'$.

Donc $C_1(x_0+h) = 1$ et $C_1(x_0-h) = 0$. Alors $C_1(x_0+h) - C_1(x_0-h) = 1$.

δ_1 est un élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $C_1(x_0+h) - C_1(x_0-h) = 1$ pour tout $h \in]0, \delta_1[$.

$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall h \in]0, \delta_1[$, $C_1(x_0+h) - C_1(x_0-h) = 1$.

b) Un petit rappel.. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Si f est continue en a et si $f(a) > 0$: $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) > 0$.

Si f est continue en a et si $f(a) < 0$: $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) < 0$.

La démonstration de ce résultat est analogue à celle qui nous a permis de montrer dans a) que si $P'(x_0) > 0$ $\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$, $P'(x) > 0$

1er Cas.. $m = 1$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $C_2(x)$ est le nombre de changements de signe dans la 1-liste $(R_1(x))$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $C_2(x) = 0$.

Si $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall h \in]0, \delta_1[$, $C_2(x_0+h) = 0 = C_2(x_0-h)$.

Ainsi $\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall h \in]0, \delta_1[$, $C_2(x_0+h) = C_2(x_0-h)$,

<u>2ième cas.. $m \geq 2$</u>

1] $\forall j \in [\![1, m-1]\!]$, $R_j(x_0) \neq 0$

mieux $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $R_j(x_0) \neq 0$ car $R_m(x_0) \neq 0$.

Alors $\forall j \in [\![1, m-1]\!]$, $R_j(x_0) R_{j+1}(x_0) \neq 0$.

Soit $j \in [\![1, m-1]\!]$, $\exists \eta_j \in \mathbb{R}_+^*$, $(\forall x \in]x_0-\eta_j, x_0+\eta_j[,\ R_j(x) R_{j+1}(x) > 0)$ ou

$(\forall x \in]x_0-\eta_j, x_0+\eta_j[,\ R_j(x) R_{j+1}(x) < 0)$.

Posons $S_2 = \inf(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1})$. $S_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $j \in [\![1, m-1]\!]$:

ou $(\forall x \in]x_0-S_2, x_0+S_2[,\ R_j(x) R_{j+1}(x) > 0)$ ou $(\forall x \in]x_0-S_2, x_0+S_2[,\ R_j(x) R_{j+1}(x) < 0)$

Alors si $h \in]0, S_2[$, pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$: ou $(R_j(x_0-h) R_{j+1}(x_0-h) > 0$ et $R_j(x_0+h) R_{j+1}(x_0+h) > 0)$

ou $(R_j(x_0-h) R_{j+1}(x_0-h) < 0$ et $R_j(x_0+h) R_{j+1}(x_0+h) < 0)$.

En clair si $h \in]0, S_2[$, $R_j(x_0-h) R_{j+1}(x_0-h)$ et $R_j(x_0+h) R_{j+1}(x_0+h)$

sont <u>non nuls et de même signe</u> pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$.

Donc si $h \in]0, S_2[$ le nombre de changements de signe de $(R_1(x_0-h), \dots, R_m(x_0-h))$

est le même que le nombre de changements de signe de $(R_1(x_0+h), \dots, R_m(x_0+h))$.

Ainsi si $h \in]0, S_2[$, $C_1(x_0-h) = C_1(x_0+h)$.

$\exists S_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall h \in]0, S_2[$, $C_1(x_0-h) = C_1(x_0+h)$.

2] $\exists j \in [\![1, m-1]\!]$, $R_j(x_0) = 0$.

Posons alors $J = \{ j \in [\![1, m]\!] \mid R_j(x_0) = 0 \}$.

J n'est pas vide et J ne contient ni 1 ni m ($R_1(x_0) = -P'(x_0) \neq 0$ et $R_m(x_0) \neq 0$)

Alors J n'est pas vide et $J \subset [\![2, m-1]\!]$.

- Soit $j \in [\![1, m]\!] - J$. $R_j(x_0) \neq 0$. Alors $\exists \eta_j \in \mathbb{R}_+^*$ tel que R_j

soit ou strictement positif ou strictement négatif sur $]x_0-\eta_j, x_0+\eta_j[$.

Soit $j \in J$. $2 \leq j \leq m-1$. $R_j(x_0) = 0$ donc $(R_{j-1} R_{j+1})(x_0) < 0$.

Comme $R_{j-1} R_{j+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$: il existe un réel $\hat{\eta}_j$ strictement positif tel que $\forall x \in]x_0-\hat{\eta}_j, x_0+\hat{\eta}_j[$, $(R_{j-1} R_{j+1})(x) < 0$.

Comme $R_j(x_0) = 0$: $\exists\, \check{\eta}_j \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in]x_0-\check{\eta}_j, x_0+\check{\eta}_j[- \{x_0\}$, $R_j(x) \neq 0$

Posons $\eta_j = \min(\hat{\eta}_j, \check{\eta}_j)$.

$\forall x \in]x_0-\eta_j, x_0+\eta_j[- \{x_0\}$, $R_j(x) \neq 0$ et $R_{j-1}(x) R_{j+1}(x) < 0$.

Soit $x \in]x_0-\eta_j, x_0+\eta_j[- \{x_0\}$.

ou $R_{j-1}(x) R_j(x) > 0$ et alors $R_{j+1}(x) R_j(x) < 0$

ou $R_{j-1}(x) R_j(x) < 0$ et alors $R_{j+1}(x) R_j(x) > 0$

Dans les deux cas le nombre de changements de signe dans $(R_{j-1}(x), R_j(x), R_{j+1}(x))$ est 1.

Dès lors posons $\delta_2 = \min(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$. Soit $x \in]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[- \{x_0\}$.

Soit $j \in J$. → si $R_j(x_0) \neq 0$: R_j est strictement positif ou strictement négatif sur $]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[$.

→ si $R_j(x_0) = 0$: $j \in [\![2, m-1]\!]$ et pour tout x dans $]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[- \{x_0\}$ le nombre de changements de signe de la liste $(R_{j-1}(x), R_j(x), R_{j+1}(x))$ est 1.

Soit I l'ensemble des éléments i de $[\![1, m]\!]$ tels $R_i(x_0) \neq 0$ et pour tout $h \in]0, \delta_2[$ le nombre de changements de signe de la liste $(R_1(x_0+h), \dots, R_i(x_0+h))$ soit le même que le nombre de changements de signe de la liste $(R_1(x_0-h), \dots, R_i(x_0-h))$

$1 \in I$ donc I est une partie non vide de $[\![1, m]\!]$. Alors I possède un plus grand élément s. Notons que si $s = m$ le résultat demandé est prouvé. Supposons $s < m$ et montrons que cela conduit à une contradiction.

1er cas.– $R_{s+1}(x_0) \neq 0$. Comme $R_s(x_0) \neq 0$ les deux polynômes R_s et R_{s+1} gardent un signe constant et ne s'annulent pas sur $]x_0 - S_2, x_0 + S_2[$.

Alors si $\ell \in]0, S_2[$: le nombre de changements de signe dans les listes $(R_1(x_0+\ell), \dots, R_s(x_0+\ell))$ et $(R_1(x_0-\ell), \dots, R_s(x_0-\ell))$ (resp. $(R_s(x_0+\ell), R_{s+1}(x_0+\ell))$ et $(R_s(x_0-\ell), R_{s+1}(x_0-\ell))$) est le même.

Il en est alors de même pour les listes $(R_1(x_0+\ell), \dots, R_{s+1}(x_0+\ell))$ et $(R_1(x_0-\ell), \dots, R_{s+1}(x_0-\ell))$ et ceci pour tout $\ell \in]0, S_2[$.

Alors $s+1 \in I$ et s est le maximum de I !!

2e cas.– $R_{s+1}(x_0) = 0$. Alors $s+1 < n$. Soit $\ell \in]0, S_2[$.

le nombre de changements de signe dans les listes $(R_1(x_0+\ell), \dots, R_s(x_0+\ell))$ et $(R_1(x_0-\ell), \dots, R_s(x_0+\ell))$ (resp. $(R_s(x_0+\ell), R_{s+1}(x_0+\ell), R_{s+2}(x_0+\ell))$ et $(R_s(x_0-\ell), R_{s+1}(x_0-\ell), R_{s+2}(x_0-\ell))$) est le même.

Ainsi le nombre de changements de signe dans les listes $(R_1(x_0+\ell), \dots, R_{s+2}(x_0+\ell))$ et $(R_1(x_0-\ell), \dots, R_{s+2}(x_0+\ell))$ est le même et ceci pour tout $\ell \in]0, S_2[$. $s+2 \in I$ et s est le maximum de I !!

Finalement $s = n$ et alors pour tout ℓ dans $]0, S_2[$, $C_2(x_0+\ell) = C_2(x_0-\ell)$.

Conclusion.– $\underline{\exists S_2 \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall \ell \in]0, S_2[, \ C_2(x_0+\ell) = C_2(x_0-\ell)}$.

c) $S = \min(S_1, S_2)$ et $\ell \in]0, S[$. $C_1(x_0+\ell) - C_1(x_0-\ell) = 1$ et $C_2(x_0+\ell) = C_2(x_0-\ell)$.

Alors $C(x_0+\ell) - C(x_0-\ell) = C_1(x_0+\ell) + C_2(x_0+\ell) - C_1(x_0-\ell) - C_2(x_0-\ell) = 1$.

Ainsi si $\underline{P(x_0) = 0 : \exists S \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall \ell \in]0, S[, \ C(x_0+\ell) - C(x_0-\ell) = 1}$.

Ne reste plus qu'à lire entre les lignes de ce qui précède pour conclure.

Encore un concepteur qui ne s'est pas donné la peine d'écrire une vraie solution à "son" sujet.

En reprenant la même démarche que celle de la démonstration du b) (qui n'utilise pas $P(x_0)$ mais plus fondamentalement : 1) $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $P_j(x_0)$ donne $P_j(x_0) P_{j+1}(x_0) < 0$, 2) $P_n(x_0) \neq 0$) on obtient sans difficulté le résultat suivant : si x est un réel tel que $P(x) \neq 0$ alors il existe un réel δ strictement positif tel que $\forall h \in]0, \delta[$, $C(x+h) = C(x-h)$.

Ce résultat et celui obtenu au début de c) montrent que $x \mapsto C(x)$ augmente d'une unité si et seulement si l'on "traverse" une racine réelle de P.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$, $P(a) \neq 0$ et $P(b) \neq 0$.

a et b n'étant pas racine de P, C augmente entre a et b d'autant d'unités que P a de racines réelles dans $]a,b[$ ... ou dans $[a,b]$.

Ainsi si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et si $a < b$, $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$: $C(b) - C(a)$ est le nombre de racines réelles de P dans $[a,b]$.

Q4 a) $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \geq 1$ et $P(\alpha) = 0$. $\alpha^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \alpha^\ell = 0$.

$$|\alpha|^n = |\alpha^n| = \left|-\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \alpha^\ell\right| = \left|\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \alpha^\ell\right| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell \alpha^\ell| = \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell| |\alpha|^\ell \leq \sum_{\ell=0}^{n} |a_\ell| |\alpha|^{n-1}$$

$|\alpha| \geq 1$ ... et $|a_\ell| \geq 0$.

$\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \geq 1$ et $P(\alpha) = 0$ donne $|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell|$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1er cas.. $|\alpha| < 1$. Alors $|\alpha| < 1 \leq 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell|$

2ème cas.. $|\alpha| \geq 1$. Alors $|\alpha| = \dfrac{|\alpha|^n}{|\alpha|^{n-1}} \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell| < 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell|$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $P(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| \leq 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell| \Rightarrow \alpha \in \left[-\left(1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell|\right), 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell|\right]$.

D) l'algorithme qui suit suppose que $P = X^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l X^l$ et que les racines réelles de P sont simples.

E1 On détermine P'.

E2 Par division euclidienne jusqu'à obtenir un reste nul on construit la suite $R_2, R_3, \dots, R_m$

E3 On cherche deux réels a et b tels que $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\} \subset]a,b[$.
Il suffit de prendre $b > 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$ et $a = -b$!

E4 On calcule $C(a)$ et $C(b)$ (en utilisant la fonction de Q1 !)

E5 On affiche $C(b) - C(a)$.

Q5 Pour moi n ne sera pas une constante ! le principe de la fonction :

1) On cherche le rang j du premier terme non nul de la suite s'il existe et on donne à j la valeur n dans le cas contraire.

Ainsi si j a pris la valeur n ou tous les termes de la suite sont nuls ou seul le dernier est non nul. Dans les deux cas le nombre de changements de signe est 0.

2) Supposons $j < n$. le nombre de changements de signe dans la suite $(T[1], \dots, T[n])$ est le nombre de changements de signe dans la suite $(T[j], \dots, T[n])$ et $T[j] \neq 0$.

→ On stocke $T[j]$ dans une variable d

→ On regarde alors si $T[j+1], T[j+2], \dots, T[n]$ provoquent un changement de signe.

• Pour $T[j+1]$: 1er Cas.. $T[j+1]=0$ on ne fait rien.

2e Cas.. $T[j+1]\times d>0$ alors il n'y a pas de changement de signe ; on ne fait rien !! Notons que d a le même signe que $T[j+1]$ donc il n'est pas utile de le modifier

3e Cas. $T[j+1]\times d<0$. Il y a un changement de signe. On stocke $T[j+1]$ dans d et augmente le compteur c des changements de signe d'une unité.

• Ne reste plus qu'à faire la même chose pour $T[j+2], T[j+3], \dots, T[n]$.

Remarque.. Il est plus rationnelle de stocker dans d un signe plutôt qu'une valeur. Vous trouverez une version utilisant cela p.7 !

```
Program HEC_2006_MII;

const LongMax=10;

Type tab=array[1..LongMax] of real;

Function nbchgs(n:integer;T:tab):integer;

var j,c,k:integer;d:real;

begin

j:=0;c:=0;

repeat
j:=j+1;
until (T[j]<>0) or (j=n);



if j<n then begin
            d:=T[j];
            for k:=j+1 to n do
            if d*T[k]<0 then begin
                             c:=c+1;d:=T[k];
                             end;

            end;

nbchgs:=c;
end;
```

... puis le programme principal.

PARTIE III

(Q1) a) Rappelons que si α est une racine d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) de P alors α est une racine d'ordre au moins $k-1$ (à un petit chose près pour $k=0$).

1^{er} cas.. P n'a pas de racine dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Alors $N_1(P)=0$ donc $N_1(P) \leqslant N_1(T(P))+2$

$2^{ème}$ cas.. P a une unique racine α, d'ordre k, dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Alors α est racine d'ordre $k-1$ de P' donc de $T(P)$ car α n'est pas nulle.

Alors $N_1(T(P)) \geqslant k-1 = N_1(P)-1$; $N_1(T(P))+2 \geqslant N_1(P)+1 \geqslant N_1(P)$.

Ainsi $N_1(P) \leqslant N_1(T(P))+2$

$3^{ème}$ cas.. P admet au moins deux racines distinctes dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Notons r le nombre de racines distinctes dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$ les racines distinctes de P dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Observons que $N_1(T(P)) = N_1(P')$ car $0 \notin]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Montrons donc que

$N_1(P) \leqslant N_1(P')+2$ ou que $N_1(P') \geqslant N_1(P)-2$.

Pour tout i dans $[\![1,r]\!]$, notons k_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans P ; $N_1(P) = \sum_{i=1}^{r} k_i$

Alors pour tout i dans $[\![1,r]\!]$, $\lambda_i \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ et λ_i est une racine de P' d'ordre $k_i - 1$.

Soit $i \in [\![1,r-1]\!]$. P est de classe C^1 sur $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ et $P(\lambda_i) = P(\lambda_{i+1})$ ($=0$).

Ainsi le théorème de Rolle montre que $\exists \beta_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, $P'(\beta_i)=0$.

Ainsi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$ sont des racines de P' distinctes de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Si $\lambda_r \leqslant -1$ alors $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$ sont dans $]-\infty,-1]$

Si $\lambda_1 \geqslant 1$ alors $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$ sont dans $[1,+\infty[$

Supposons $\lambda_1 \leqslant -1$ et $\lambda_r \geqslant 1$

$\exists s \in [\![1, r-1]\!]$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_s \leq -1 \leq \lambda_{s+1} < \lambda_{s+2} < \cdots < \lambda_r$.

Alors nécessairement $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s-1}$ sont dans $]-\infty, -1]$ et $\beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \ldots, \beta_{r-1}$ sont dans $[1, +\infty[$.

Ainsi dans tous les cas au moins $r-2$ éléments de l'ensemble $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}\}$ sont dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Rappelons que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, λ_i est une racine de P' d'ordre $k_i - 1$ qui appartient à $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

De plus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ sont deux à deux distincts.

Alors $N_1(P') \geq \sum_{i=1}^{r} (k_i - 1) + (r-2) = \sum_{i=1}^{r} k_i - r + r - 2 = \sum_{i=1}^{r} k_i - 2 = N_1(P) - 2$

Ainsi $N_1(P) \leq N_1(P') + 2 = N_1(T(P)) + 2$.

Dans tous les cas : $\underline{\underline{N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2}}$

b) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$ à l'aide d'une récurrence.

Plus précisément montrons que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n : 1) $T^k(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n

2) $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$

- $k=1$. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ degré n. Soit a_n le coefficient de X^n dans P. Notons que $T(P) = XP'$ est un polynôme de degré n à coefficient réel. Posons $Q = \frac{1}{a_n} P$.

Q est normalisé et de degré n. Ainsi a) donne $N_1(Q) \leq N_1(T(Q)) + 2$

$Q = \frac{1}{a_n} P$ donc $T(Q) = XQ' = \frac{1}{a_n} XP'$. Alors $N_1(P) = N_1(Q)$ et $N_1(T(P)) = N_1(T(Q))$. Donc $N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2$; la propriété est vraie pour $k=1$.

- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $k+1$.

Soit P un polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$. L'hypothèse de récurrence indique que :

$T^k(P)$ est un polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$ et $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

Notons que $T^{k+1}(P) = T(T^k(P)) = X(T^k(P))'$ donc $T^{k+1}(P)$ est donc aussi un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n $\left(\deg (T^k(P))' = n-1\right)$.

Q1 a) donne : $N_1(T^k(P)) \leq N_1(T(T^k(P))) + 2 = N_1(T^{k+1}(P)) + 2$

Ainsi $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k \leq N_1(T^{k+1}(P)) + 2 + 2k = N_1(T^{k+1}(P)) + 2(k+1)$.

Ceci achève la récurrence.

Par conséquent :

si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n et si $k \in \mathbb{N}^*$: $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

Q2 a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $P^*(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$.

$$P^*(x) = x^n \left[a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n}\right]$$

$$P^*(x) = x^n \left[\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0\right] = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. Remarque.. ceci vaut aussi pour un polynôme P de degré n pas nécessairement normalisé.

b) Notons que $P^*(0) \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $P^*(x) = 0 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $P(x) = 0 \Leftrightarrow P^*\left(\frac{1}{x}\right) = 0$,
$x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\Leftrightarrow \frac{1}{x} \in [-1,1]$ et $x \in [-1,1] \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

1er cas.. $N_1(P) = 0$. Alors $N_0(P^*) = 0$

2e cas.. $N_1(P) \neq 0$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les racines distinctes de P dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. D'après ce que nous avons dit plus haut $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}$ sont les racines distinctes de P^* dans $[-1,1]$.
Il ne reste plus qu'à faire coïncider les ordres de multiplicité.

Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Soit ℓ_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans P.

$P = (X-\lambda_i)^{\ell_i} Q_i$ avec $Q_i \in \mathbb{R}[X]$ et $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. De plus $\deg Q_i = n - \ell_i$ et Q_i est normalisé.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left(\frac{1}{x} - \lambda_i\right)^{\ell_i} Q_i\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P^*(x) = (1 - \lambda_i x)^{\ell_i} x^{n-\ell_i} Q_i\left(\frac{1}{x}\right) = \lambda_i^{\ell_i} \left(\frac{1}{\lambda_i} - x\right)^{\ell_i} Q_i^*(x)$.

P^* et $\lambda_i^{\ell_i}\left(\frac{1}{\lambda_i} - X\right)^{\ell_i} Q_i^*$ coïncident sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $P^* = (-\lambda_i)^{\ell_i}\left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{\ell_i} Q_i^*$. De plus $Q_i^*\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right) Q_i(\lambda_i) \neq 0$.

Ainsi $\frac{1}{\lambda_i}$ est une racine de P^* d'ordre ℓ_i.

Ainsi $N(P^*) = \sum_{i=1}^{r} \ell_i = N_1(P)$. $N(P^*) = N_1(P)$.

Finalement dans les deux cas : $\underline{\underline{N_0(P^*) = N_1(P)}}$.

(Q3) $\boxed{\text{V.3}}$ Rappelons que deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{R}^*$ sont égaux (leur différence admet une infinité de racines ...).

Pour montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(T^k(P))^* = n^k Q_k$ il suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*$, $(T^k(P))^*(x) = n^k Q_k(x)$. Ce que nous allons faire par récurrence.

Observons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q_k(x) = \sum_{i=0}^{n-1 \text{ ou } n} a_{n-i}\left(1 - \frac{i}{n}\right)^k x^i$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(P)(x) = x P'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(T(P))^*(x) = x^n \frac{1}{x} P'\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(T(P))^*(x) = x^{n-1} \sum_{j=1}^{n} j a_j \left(\frac{1}{x}\right)^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{n-j} = \sum_{\underline{\underline{j=0}}}^{n} j a_j x^{n-j}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(T(P))^*(x) = \sum_{i=0}^{n} (n-i) a_{n-i} x^i = n \sum_{i=0}^{n \text{ ou } n-1} a_{n-i}\left(1 - \frac{i}{n}\right)^1 x^i = n^1 Q_1(x)$

La propriété est donc vraie pour $k = 1$.

- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$(T^k(P))^* = n^k Q_k$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*, \ (T^k(P))^*(x) = n^k Q_k(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*, \ n^k Q_k(x) = x^n \left(T^k(P)\right)\left(\frac{1}{x}\right)$ ($T^k(P)$ est de degré n ...).

$\forall x\in\mathbb{R}^*, \ n^k Q_k\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n \left(T^k(P)\right)(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}^*, \ T^k(P)(x) = n^k x^n Q_k\left(\frac{1}{x}\right)$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}^*, \ T^{k+1}(P)(x) = n^k x\left[n x^{n-1} Q_k\left(\frac{1}{x}\right) + x^n\left(-\frac{1}{x^2}\right) Q_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$\forall x\in\mathbb{R}^*, \ T^{k+1}(P)(x) = n^k\left[n x^n Q_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-1} Q_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

Soit $x\in\mathbb{R}^*$. $x^n Q_k\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^k x^{n-i}$.

$$x^{n-1} Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^k \, i \, x^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{i-1}.$$

$$x^{n-1} Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^k \, i \, x^{n-i}.$$

Alors $T^{k+1}(P)(x) = n^k\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^k x^{n-i}(n-i)\right]$

$$T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1}\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{k+1} x^{n-i}.$$

$\forall x\in\mathbb{R}^*, \ T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1}\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{k+1} x^{n-i}$

même $\forall x\in\mathbb{R}, \ T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1}\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{k+1} x^{n-i}$

ou $\forall x\in\mathbb{R}, \ T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1}\sum_{j=1 \text{ ou } 0}^{n} a_j\left(1-\frac{n-j}{n}\right)^{k+1} x^j = n^{k+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\left(1-\frac{n-j}{n}\right)^{k+1} x^j$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}, \ (T^{k+1}(P))^*(x) \underset{\uparrow}{=} n^{k+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\left(1-\frac{j}{n}\right)^{k+1} x^j = n^{k+1} Q_{k+1}(x)$.

Par définition de $(T^{k+1}(P))^*$

$\forall x\in\mathbb{R}, \ (T^{k+1}(P))^*(x) = n^{k+1} Q_{k+1}(x)$ ce qui achève la récurrence.

$$\underline{\underline{\forall k\in\mathbb{N}^*, \ (T^k(P))^* = n^k Q_k.}}$$

$\boxed{V2}$ Extrapolons le T ! Posons $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $T(Q) = XQ'$.

T est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

$P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ toujours avec $a_n = 1$.

Alors $T(P) = \sum_{j=0}^{n} a_j T(X^j)$ et même $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $T^k(P) = \sum_{j=0}^{n} a_j T^k(X^j)$.

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, $T(X^j) = X j X^{j-1} = j X^j$. Mieux $\forall j \in \mathbb{N}$, $T(X^j) = j X^j$.

Alors une simple récurrence donne $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $T^k(P) = j^k X^j$ et ceci pour tout $j \in \mathbb{N}$

Alors $T^k(P) = \sum_{j=0}^{n} a_j j^k X^j$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $T^k(P) = a_n n^k X^n + a_{n-1}(n-1)^k X^{n-1} + \dots + a_1 1^k X + a_0 0^k X^0$.

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(T^k(P))^* = a_0 0^k X^n + a_1 1^k X^{n-1} + \dots + a_{n-1}(n-1)^k X + a_n n^k X^0$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ (T^k(P))^* = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(n-j)^k X^j = n^k \sum_{j=0}^{n \text{ ou } \boxed{n-1}} a_{n-j}\left(1 - \frac{j}{n}\right)^k X^j .$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ (T^k(P))^* \underset{a_n = 1}{=} n^k \left[1 + a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) X + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k X^{n-1} \right]$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(T^k(P))^* = n^k Q_k$.

Remarque.. Difficile de proposer cette solution avec le T très étroit du texte.

Q4) a) $\tilde{\varphi}: y \mapsto e^{-y}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}'(y) = -e^{-y}$ et $\tilde{\varphi}''(y) = e^{-y}$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}''(y) \geq 0$. $\tilde{\varphi}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Alors sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(y) \geq \tilde{\varphi}'(0)(y-0) + \tilde{\varphi}(0)$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $e^{-y} \geq (-e^{-0})(y-0) + e^{-0}$.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $e^{-y} \geq -y+1$ et $e^{y} > 0$

qui peu ou plus peu ou moins...

Alors $\forall y \in \mathbb{R}$ $1 = e^{-y}e^{y} \geq (1-y)e^{y}$. $\underline{\underline{\forall y \in \mathbb{R},\ (1-y)e^{y} \leq 1\ !!}}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k = N_0((T^k(0))^*) + 2k = N_0(n^k Q_k) + 2k$

↑ Q2 b appliqué à $T^k(P)$ qui est de degré n.

Or $N_0(n^k Q_k) = N_0(Q_k)$.

Alors $N_1(P) \leq 2k + N_0(Q_k)$.

Pour obtenir le résultat il suffit de prouver que $N_0(Q_k) \leq \frac{n}{k} \ln(L(P))$.

Posons $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$.

Notons que • $Q_k(0) = 1 \neq 0$.

• $0 < r < \rho$

• Soit $z \in D_\rho$. $|Q_k(z)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^k z^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}|\left|1-\frac{i}{n}\right|^k |z|^i$

$|Q_k(z)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}|\left|1-\frac{i}{n}\right|^k \rho^i = \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}|\left(1-\frac{i}{n}\right)^k \left(e^{\frac{k}{n}}\right)^i$.

$|Q_k(z)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}|\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)e^{\frac{i}{n}}\right)^k$.

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $0 \leq \left(1-\frac{i}{n}\right)e^{\frac{i}{n}} \leq 1$ donc $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)e^{\frac{i}{n}}\right)^k \leq 1$ et $|a_{n-i}| \geq 0$

Alors $|Q_k(z)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| = |a_n| + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$

Posons $\mathcal{J} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$. Alors $\mathcal{J} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall z \in D_\rho$, $|Q_k(z)| \leq \mathcal{J}$.

le résultat admis donne : $N_0(Q_\ell) \leq \frac{1}{\ln \rho} \ln\left(\frac{\rho}{|Q_\ell(0)|}\right)$ car $r=1$.

Alors $N_0(Q_\ell) \leq \frac{1}{\ln \rho} \ln \frac{\rho}{1} = \frac{1}{\ln e^{\ell/n}} \ln \rho = \frac{n}{\ell} \ln \rho = \frac{n}{\ell} \ln\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\right)$.

Finalement $N_1(P) \leq 2\ell + N_0(Q_\ell) \leq 2\ell + \frac{n}{\ell}\ln\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\right)$.

Donc $N_1(P) \leq 2\ell + \frac{n}{\ell}\ln(L(P))$ avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1}|a_i|$.

> ⚠ Nous supposons dans i) et ii) $\theta > 0$

c) i) ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) = 2 - \frac{\theta}{x^2} = \frac{2}{x^2}\left[x^2 - \frac{\theta}{2}\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) = \frac{2}{x^2}\left(x - \sqrt{\frac{\theta}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{\theta}{2}}\right)$.

ψ est croissante sur $\left[\sqrt{\frac{\theta}{2}}, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0, \sqrt{\frac{\theta}{2}}\right]$.

$\lim_{x \to 0^+} \psi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$

ii) $\psi\left(\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1\right) = 2\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 2 + \theta \frac{1}{\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1} \leq 2\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 2 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{\theta}{2}}} = 2\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 2 + \sqrt{2\theta} = \sqrt{2\theta} + 2 + \sqrt{2\theta}$.

$\psi\left(\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1\right) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

iii) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. $N_1(P) \leq 2\ell + \frac{n}{\ell}\ln\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\right) = 2\ell + \frac{n}{\ell}\ln(L(P))$.

1er cas.. $\ln(L(P)) = 0$. Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $N_1(P) \leq 2\ell$ donc $N_1(P) \leq 2$.

Alors $N_1(P) \leq 2 = 2+0 = 2 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))}$.

2e cas.. $\ln(L(P)) \neq 0$. On a : $\ln(L(P)) = \ln\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\right) \geq \ln 1 = 0$.

Ainsi $\ln(L(P)) > 0$. Posons $\theta = n\ln(L(P))$; $\theta > 0$.

Par conséquent $\psi\left(\sqrt{\theta/2}+1\right) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta} = 2 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))}$.

L'intervalle $[\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}+1]$ contient au moins un élément ℓ_0 de $\mathbb{N}^*$ ... prendre $\ell_0 = \mathrm{Ent}(\sqrt{\frac{a}{2}})+1$.

Alors par croissance de ψ sur $[\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}+1]$ on a :

$$\psi(\ell_0) \leq \psi\left(\sqrt{\tfrac{a}{2}}+1\right) \leq 2+2\sqrt{d_n \ln(L(P))}.$$

Ainsi $N_1(P) \leq 2\ell_0 + \frac{n}{\ell_0}\ln(L(P)) = \psi(\ell_0) \leq 2+2\sqrt{d_n \ln(L(P))}$.

$$\underline{\underline{N_1(P) \leq 2+2\sqrt{d_n \ln(L(P))}.}}$$

__d]__ Retrouvons le résultat proposé.

$a_0 \neq 0$. Ainsi P^* est de degré n et de coefficient dominant a_0.

$$P^*(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n \qquad (a_n = 1).$$

$$\frac{1}{a_0} P^*(X) = X^n + \frac{a_1}{a_0} X^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} X + \frac{a_n}{a_0}.$$

Notons que $N_0(P) = N_1(P^*) = N_1(\frac{1}{a_0} P^*)$.

D'après ce qui précède $N_1(\frac{1}{a_0}P^*) \leq 2 + \sqrt{d_n \ln L(\frac{1}{a_0}P^*)}$

$$L\left(\frac{1}{a_0}P^*\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{a_i}{a_0}\right| = \sum_{i=0}^{n}\left|\frac{a_i}{a_0}\right| = \frac{1}{|a_0|}\left[\sum_{i=0}^{n}|a_i|\right] = \frac{1}{|a_0|} L(P)$$

Donc $N_0(P) = N_1(\frac{1}{a_0}P^*) \leq 2 + \sqrt{d_n \ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$.

$N_0(P) \leq 2 + \sqrt{d_n \ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$. Notons que 0 n'est pas racine de P car $a_0 \neq 0$.

Alors $N(P) \leq N_0(P) + N_1(P) \leq 4 + \sqrt{d_n \ln L(P)} + \sqrt{d_n \ln \frac{L(P)}{|a_0|}}$.

$$\underline{\underline{N(P) \leq 4 + \sqrt{d_n \ln\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\right)} + \sqrt{d_n \ln\left(\frac{1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|}{|a_0|}\right)}.}}$$

PARTIE IV

Q1 $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ sont n variables aléatoires qui suivent la loi de Poisson de paramètre λ et de plus elles sont indépendantes. Le cours montre alors que $X_1+X_2+\dots+X_{n-1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$.

Ainsi Z_n suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$.

Q2 Soit $\omega \in \Omega$. D'après III Q4.

$$\Pi_n(\omega) = N(\varphi_\omega) \leq 4 + 2\sqrt{d\ln(L(\varphi_\omega))} + 2\sqrt{d\ln(L(\varphi_\omega)/|1|)}$$

Or $L(\varphi_\omega) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |X_i(\omega)| + 1 = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} |X_i(\omega)| = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\omega) = Z_n(\omega) + 2.$

Alors $\Pi_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{d\ln(Z_n(\omega)+2)} = 4 + 4\sqrt{d}\sqrt{\ln(Z_n(\omega)+2)}$.

$\forall \omega \in \Omega,\ \Pi_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{d}\sqrt{\ln(Z_n(\omega)+2)}$.

Q3 a) C'est du cours !! La courbe représentative de h est en dessous de toutes ses tangentes. Ainsi $\forall (x,x_0) \in \mathbb{R}_+^2,\ h(x) \leq h'(x_0)(x-x_0) + h(x_0)$.

ou Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. $\hat{\varphi} : x \mapsto h'(x_0)(x-x_0) + h(x_0) - h(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \hat{\varphi}'(x) = h'(x_0) - h'(x)$.

h est concave sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ donc h'' est négative sur $\mathbb{R}_+$, ainsi h' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors $\forall x \in [0,x_0],\ h'(x_0) - h'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [x_0, +\infty[,\ h'(x_0) - h'(x) \geq 0$

$\forall x \in [0,x_0],\ \hat{\varphi}'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [x_0,+\infty[,\ \hat{\varphi}'(x) \geq 0$. $\hat{\varphi}$ est décroissante sur $[0,x_0]$ et croissante sur $[x_0,+\infty[$. $\hat{\varphi}$ possède alors un minimum en x_0 qui vaut $\hat{\varphi}(x_0)$ donc 0. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \hat{\varphi}(x) \geq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x_0)(x-x_0) + h(x_0) - h(x) \geq 0$.

Finalement $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) \leq h'(x_0)(x-x_0) + h(x_0)$.

b) V1 $W(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(h(W))$ et $E(W)$ existent.

Posons $x_0 = E(W)$; $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $h(\ell) \leq h'(x_0)(\ell - x_0) + h(x_0)$ et $P(W=\ell) \geq 0$.

Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $h(\ell)\, P(W=\ell) \leq h'(x_0)\, \ell\, P(W=\ell) - x_0 h'(x_0) P(W=\ell) + h(x_0) P(W=\ell)$.

Notons que $\sum_{\ell=0}^{+\infty} P(W=\ell) = 1$ et que $E(h(W)) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} h(\ell) P(W=\ell)$ (théorème de transfert)

Notons aussi que $E(W)$ existe et vaut $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell\, P(W=\ell)$.

Ainsi $E(h(W)) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} h(\ell) P(W=\ell) \leq h'(x_0) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell\, P(W=\ell) - x_0 h'(x_0) \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(W=\ell) + h(x_0) \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(W=\ell)$

car toutes les séries convergent.

Ce qui donne $E(h(W)) \leq \underbrace{h'(x_0) E(W) - x_0 h'(x_0)}_{=0 \text{ car } x_0 = E(W)} + h(x_0) = h(x_0) = h(E(W))$.

V2.. $\forall \omega \in \Omega$, $h(W(\omega)) \leq h'(x_0)(W(\omega) - x_0) + h(x_0)$.

Ainsi $h(W) \leq h'(x_0)(W - x_0) + h(x_0)$.

Notons que 1.. $E(h(W))$ existe.

2.. $E(W)$ existe donc $E(h'(x_0)(W - x_0) + h(x_0))$ existe et vaut

$h'(x_0) E(W) - x_0 h'(x_0) + h(x_0)$ ou $h(x_0)$ ou encore $h(E(W))$ car $x_0 = E(W)$.

La croissance de l'espérance donne alors : $E(h(W)) \leq E(h'(x_0)(W - x_0) + h(x_0)) = h(E(W))$.

$E(h(W)) \leq h(E(W))$.

Q4 a) Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) = \ln(x+2)$.

u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) > 0$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}}\, \dfrac{1}{x+2}$.

V1 ... $x \mapsto x+2$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ donc $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ est décroissante et (strictement) positive sur $\mathbb{R}^+$

- Rappelons que $t \mapsto \ln t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$x \mapsto x+2$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$; $x \mapsto \ln(x+2)$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. $x \mapsto \sqrt{\ln(x+2)}$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$

Alors $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(x+2)}}$ (ou $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}}$) est décroissante et (strictement) positive sur $\mathbb{R}^+$.

$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont décroissantes et positives sur $\mathbb{R}^+$. Leur produit φ' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors φ est concave sur $\mathbb{R}^+$

V2 $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi''(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}\,(x+2)}}{\left(\sqrt{\ln(x+2)}\right)^2}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{\sqrt{\ln(x+2)}}\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right)\right] < 0$!

<u>φ est concave sur $\mathbb{R}^+$.</u>

<u>b)</u> Par concavité $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \leq \varphi'(0)(k-0) + \varphi(0) = \varphi'(0)\,k + \varphi(0)$.

Posons $b = \varphi'(0)$ et $c = \varphi(0)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \sqrt{\ln(k+2)}\,\frac{a^k}{k!} \underset{a^k/k! \geq 0}{\leq} bk \times \frac{a^k}{k!} + c\,\frac{a^k}{k!} = ba\,\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} + c\,\frac{a^k}{k!}$.

De plus les séries de termes généraux $\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$ et $\frac{a^k}{k!}$ sont convergentes ; alors la série de terme général $ba\,\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} + c\,\frac{a^k}{k!}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)}\,\frac{a^k}{k!}$ converge.

Q5 a) Π_n prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$ donc Π_n possède une espérance.

Rappelons que $Z_n \hookrightarrow \mathcal{P}((n-1)\lambda)$ et posons $a=(n-1)\lambda$. $a\in\mathbb{R}_+^*$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ P(Z_n=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}$

La série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)}\,\frac{a^k}{k!}e^{-a}$ est convergente et même absolument convergente car elle est à termes positifs.

Ainsi la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)}\,P(Z_n=k)$ est absolument convergente.

Le théorème du transfert montre que $E(\varphi(Z_n))$ existe.

Alors 1) Z_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

2) φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ et concave.

3) $E(\varphi(Z_n))$ et $E(Z_n)$ existent.

Alors $E(\varphi(Z_n))\leq\varphi(E(Z_n))=\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}$.

$\Pi_n\leq 4+4\sqrt{n}\sqrt{\ln(Z_n+2)}=4+4\sqrt{n}\,\varphi(Z_n)$.

Or $E(\Pi_n)$ existe, $E(4+4\sqrt{n}\,\varphi(Z_n))$ existe et vaut $4+4\sqrt{n}\,E(\varphi(Z_n))$.

Ainsi la croissance de l'espérance donne : $E(\Pi_n)\leq 4+4\sqrt{n}\,E(\varphi(Z_n))\leq 4+4\sqrt{n}\,\varphi(E(Z_n))$

Alors $E(\Pi_n)\leq 4+4\sqrt{n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}$.

$\frac{\ln((n-1)\lambda+2)}{\ln n}=1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda+\frac{2}{n}\right)$ pour $n\geq 2$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln((n-1)\lambda+2)}{\ln n}=1$; $\ln((n-1)\lambda+2)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$.

$4\underset{n\to+\infty}{=}o\left(4\sqrt{n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}\right)$ donc $4+4\sqrt{n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}\sim 4\sqrt{n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}$

Donc $4+4\sqrt{n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}\sim 4\sqrt{n}\ln n$. Soit $\beta\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{4+4\sqrt{n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}}{n^\beta}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\sqrt{n}\ln n}{n^\beta}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\ln n}{n^{\beta-1/2}}=0$ (croissance comparée)

De plus $0\leq\frac{E(\Pi_n)}{n^\beta}\leq\frac{4+4\sqrt{n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}}{n^\beta}$ pour $n\geq 2$. Ainsi par encadrement $\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\Pi_n)}{n^\beta}=0$