Préliminaire

Q1 a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$.

φ' étant nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$: φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or $\varphi(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = 2 \arctan 1 = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Remarque : arctan étant impaire sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

c) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^x 1\, dt = x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \arctan x - \arctan 0 \leq x$. Finalement :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \arctan x \leq x$.

Q2 a) • φ est continue sur $\mathbb{R}$.

• φ est positive sur $\mathbb{R}$.

• $\forall A \in \mathbb{R}$, $\int_0^A \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}(\arctan A - \arctan 0) = \frac{1}{\pi} \arctan A$.

$\forall A \in \mathbb{R}$, $\int_0^A \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \arctan A$ et $\int_A^0 \varphi(t)dt = -\frac{1}{\pi} \arctan A$.

Ainsi $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{A \to -\infty} \int_A^0 \varphi(t)dt = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Alors $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ et $\int_{-\infty}^0 \varphi(t)dt$ existent et valent $1/2$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Ceci achève de montrer que **φ est une densité de probabilité**.

b) Dans a) nous avons vu que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \arctan x$ et $\int_{-\infty}^0 \varphi(t)dt = \frac{1}{2}$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$.

Observons que : F est continue sur $\mathbb{R}$, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Ainsi F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Alors $F(U)$ prend ses valeurs dans $]0,1[$. Notons G la fonction de répartition de $F(U)$. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $G(x) = 0$ et $\forall x \in [1,+\infty[$, $G(x) = 1$.

Soit $x \in]0,1[$. $G(x) = P(F(U) \leq x) = P(U \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$.

F est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$

Donc **$F(U)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ ... ou $]0,1[$.**

c) Posons $V = F(U)$. $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ ou $V \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.

$\forall \omega \in \Omega$, $V(\omega) = F(U(\omega))$; $\forall \omega \in \Omega$, $V(\omega) = \frac{1}{\pi}\arctan(U(\omega)) + \frac{1}{2}$

$\forall \omega \in \Omega$, $\arctan U(\omega) = \pi(V(\omega) - \frac{1}{2})$

$\forall \omega \in \Omega$, $U(\omega) = \tan(\pi(V(\omega) - \frac{1}{2}))$. **$U = \tan(\pi(V - \frac{1}{2}))$.**

Alors plus de doute ...

```
Function cauchy:real;
begin
cauchy:= tan ( Pi *(random - 0.5));
End;
```

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n.

Q1 $\forall (j,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ \int_0^1 t^{\ell+j-2}\,dt = \left[\dfrac{t^{\ell+j-1}}{\ell+j-1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{\ell+j-1}$.

$$\forall (j,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ \int_0^1 t^{\ell+j-2}\,dt = \frac{1}{\ell+j-1}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = H_n X$.

$\forall \ell \in [\![0,n-1]\!],\ y_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} h^{(n)}_{\ell+1,j+1}\, x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{1}{\ell+1+j+1-1}\, x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{1}{\ell+j+1}\, x_j$

Alors $X^T H_n X = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell y_\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{1}{\ell+j+1}\, x_\ell x_j$.

Notons que : $\forall t \in \mathbb{R},\ (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1})^2 = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell t^\ell\right)^2 = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell t^\ell\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j\right)$

Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1})^2 = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_\ell x_j\, t^{\ell+j}$.

Il vient en intégrant entre 0 et 1 et en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1})^2\,dt = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_\ell x_j \int_0^1 t^{\ell+j}\,dt = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_\ell x_j \dfrac{1}{\ell+j+1}$

Retenons donc que $X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1})^2\,dt$

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1})^2\,dt.$$

Q2 a) $\forall (\ell,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ h^{(n)}_{j,\ell} = \dfrac{1}{j+\ell-1} = \dfrac{1}{\ell+j-1} = h^{(n)}_{\ell,j}$.

Ainsi H_n est une matrice d'ordre n symétrique à coefficients réels.
Le cours indique alors qu'il existe une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $D = P^T H_n P$.

$D = P^T H_n P = P^{-1} H_n P$ donc $H_n = PDP^{-1}$ ou $H_n = PDP^T$.

montrons que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs.
cela revient à montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives. Soit λ une valeur propre de H_n. $\exists X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $H_n X = \lambda X$.

Alors $X^T H_n X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$. Or $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, ainsi pour montrer que λ est un réel strictement positif il suffit de montrer que $X^T H_n X$ est un réel strictement positif.

$\forall t \in [0,1]$, $(x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 \geqslant 0$ et $0 \leq 1$ donc

$X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 \, dt \geqslant 0$.

Supposons que $X^T H_n X = 0$. Alors $\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 \, dt = 0$.

Or $t \mapsto (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2$ est continue et positive sur $[0,1]$ et $0 \neq 1$.

Ainsi $\forall t \in [0,1]$, $x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1} = 0$.

$t \mapsto x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1}$ est une fonction polynômiale ayant une infinité de racines. Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1} = 0$.

Donc $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$. Ce qui donne $X = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc une contradiction.

Par conséquent $X^T H_n X \neq 0$ et $X^T H_n X \geqslant 0$. Donc $X^T H_n X > 0$.

Ce qui achève de montrer que $\lambda > 0$.

Les valeurs propres de H_n sont donc strictement positives.

Ainsi les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs.

<u>Il existe une matrice diagonale D, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux strictement positifs et une matrice orthogonale P, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que : $H_n = PDP^T$.</u>

b) Soit X un élément de $\mathbb{R}^n$. Posons $Z = P^T X = P^{-1} X$. Alors $X = PZ$.

→ $X^T H_n X = X^T P D P^T X = (P^T X)^T D P^T X = Z^T D Z$.

→ $\|X\|^2 = X^T X = (PZ)^T (PZ) = Z^T P^T P Z = Z^T P^{-1} P Z = Z^T Z = \|Z\|^2$.

Posons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$. $\quad Sp\, H_n = Sp\, D = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

$X^T H_n X = Z^T D Z = \sum_{k=0}^{n-1} z_k (\lambda_{k+1} z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} z_k^2$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_n \leq \lambda_{k+1} \leq \beta_n$ et $z_k^2 \geq 0$.

donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_n z_k^2 \leq \lambda_{k+1} z_k^2 \leq \beta_n z_k^2$.

Ainsi $\alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} z_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} z_k^2 \leq \beta_n \sum_{k=0}^{n-1} z_k^2$.

Alors $\alpha_n \|Z\|^2 \leq Z^T D Z \leq \beta_n \|Z\|^2$ ou $\alpha_n \|X\|^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n \|X\|^2$.

$\forall X \in \mathbb{R}^n, \; \alpha_n \|X\|^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n \|X\|^2$.

Q3 a) Soit Y un vecteur de V. $H_n Y = \beta_n Y$; $Y^T H_n Y = \beta_n Y^T Y = \beta_n \|Y\|^2$.

$\forall Y \in V, \; Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$.

b) Soit Y un élément (non nul) de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$.

Posons $Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = P^T Y$. $\quad Z = P^{-1} Y$; $Y = PZ$.

$Y^T H_n Y = (PZ)^T P D P^T P Z = Z^T P^T P D P^T P Z = Z^T D Z$ et

$\|Y\|^2 = Y^T Y = (PZ)^T PZ = Z^T P^T P Z = Z^T Z = \|Z\|^2$.

Or $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$ donc $Z^T D Z = \beta_n \|Z\|^2$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} z_k (\lambda_{k+1} z_k) = \beta_n \sum_{k=0}^{n-1} z_k^2$; $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} z_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_n z_k^2$.

donc $\sum_{l=0}^{n-1} (\beta_n - \lambda_{l+1}) z_l^2 = 0$ et $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$, $(\beta_n - \lambda_{l+1}) z_l^2 \geq 0$.

Alors $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$, $(\beta_n - \lambda_{l+1}) z_l^2 = 0$.

donc $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$, $\beta_n - \lambda_{l+1} = 0$ ou $z_l^2 = 0$.

Ainsi $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$, $\beta_n - \lambda_{l+1} = 0$ ou $z_l = 0$.

Par conséquent $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$, $(\beta_n - \lambda_{l+1}) z_l = 0$ (α ?).

ce qui donne $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_{l+1} z_l = \beta_n z_l$ et ce qui signifie

exactement que $DZ = \beta_n Z$. Alors $D P^T Y = \beta_n P^T Y$.

donc $P D P^T Y = \beta_n P P^T Y = \beta_n Y$ ou $H_n Y = \beta_n Y$.

<u>Si Y est un vecteur (non nul) de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$ alors Y appartient à V</u>

<u>Remarque</u>.. Finalement le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n est :
$\{Y \in \mathbb{R}_n \mid Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2\}$.

Q4 a) $X_0^T H_n X_0 = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_l x_j h^{(n)}_{l+1,j+1} \leq \left| \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_l x_j h^{(n)}_{l+1,j+1} \right|$

$X_0^T H_n X_0 \leq \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |x_l x_j h^{(n)}_{l+1,j+1}| = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |x_l| |x_j| |h^{(n)}_{l+1,j+1}| = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |x_l| |x_j| h^{(n)}_{l+1,j+1}$

donc <u>$X_0^T H_n X_0 \leq |X_0|^T H_n |X_0|$.</u>

b) $X_0 \in V$ donc $X_0^T H_n X_0 = \beta_n \|X_0\|^2$.

$|X_0| \in \mathbb{R}^n$ donc $|X_0|^T H_n |X_0| \leq \beta_n \| |X_0| \|^2 = \beta_n \|X_0\|^2$

Alors $\beta_n \|X_0\|^2 = X_0^T H_n X_0 \leq |X_0|^T H_n |X_0| \leq \beta_n \| |X_0| \|^2 = \beta_n \|X_0\|^2$.

Ainsi $|X_0|^T H_n X_0 = \beta_n \| |X_0| \|^2$.

$|X_0|$ est donc un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $|X_0|^T H_n |X_0| = \beta_n \| |X_0| \|^2$

Ainsi <u>$|X_0|$ est un élément de V.</u>

c) Posons $H_n|X_0| = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $t_k = \sum_{j=0}^{n-1} h^{(n)}_{k+1,j+1} |x_j| = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{k+j+1}$.

Or $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{|x_j|}{k+j+1} \geqslant 0$ et $\exists \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $|x_\ell| > 0$.

Donc $t_k = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{k+j+1} > 0$.

<u>Les composantes de $H_n|X_0|$ sont strictement positives.</u>

$H_n|X_0| = \beta_n|X_0|$ donc les composantes de $\beta_n|X_0|$ sont strictement positives.
Comme β_n est strictement positif les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives.
Ainsi <u>X_0 n'a aucune composante nulle</u>.

d) X_0 et $|X_0|$ sont dans V donc $X_0^T H_n X_0 = \beta_n \|X_0\|^2$ et
$|X_0|^T H_n |X_0| = \beta_n \| |X_0| \|^2 = \beta_n \|X_0\|^2$.

Ainsi $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$.

Alors $\sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_\ell x_j \frac{1}{\ell+j+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |x_\ell||x_j| \frac{1}{\ell+j+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |x_\ell x_j| \frac{1}{\ell+j+1}$

Donc $\sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (|x_\ell x_j| - x_\ell x_j) \frac{1}{\ell+j+1}$ et $\forall (\ell,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $(|x_\ell x_j| - x_\ell x_j) \frac{1}{\ell+j+1} \geqslant 0$

Alors $\forall (\ell,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $(|x_\ell x_j| - x_\ell x_j) \frac{1}{\ell+j+1} = 0$.

Donc $\forall (\ell,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $|x_\ell x_j| - x_\ell x_j = 0$ (ou $|x_\ell x_j| = x_\ell x_j$)

Alors $\forall (\ell,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $x_\ell x_j \geqslant 0$.

En particulier $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k x_0 > 0$. Comme $x_0 \neq 0$, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, x_k a même signe que x_0.

<u>Les composantes de X_0 sont toutes de même signe.</u>

Q5 a) Soient $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ deux éléments non nuls de V.

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ (resp. $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$) sont non nuls et de même signe

Ainsi $x_0 y_0, x_1 y_1, \dots, x_{n-1} y_{n-1}$ sont non nuls et de même signe.

Alors nécessairement $\sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k$ n'est pas nulle donc x et y ne sont pas orthogonaux.

Il n'existe pas deux vecteurs non nuls de V orthogonaux.

b) Posons $p = \dim V$ et supposons que $p \geq 2$.

V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ donc V possède une base orthonormée $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Or $p \geq 2$ donc x_1 et x_2 sont deux vecteurs non nuls orthogonaux de V.

Ceci est impossible donc $p \leq 1$. Or V est un sous-espace propre donc $p = 1$.

La dimension du sous-espace propre V est 1.

PARTIE II Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$.

Q1 Posons $x'_n=0$. Alors $Z=\begin{pmatrix} x'_0\\ x'_1\\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}$. $Z^T H_{n+1} Z = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x'_\ell x'_j \, h^{(n+1)}_{\ell+1,j+1}$.

$$Z^T H_{n+1} Z = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x'_\ell x'_j \frac{1}{\ell+1+j+1-1} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x'_\ell x'_j \frac{1}{\ell+j+1} \underset{\substack{\uparrow \\ x'_n=0}}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x'_\ell x'_\ell \frac{1}{\ell+j+1}.$$

De plus $X'^T H_n X' = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x'_\ell x'_j \, h^{(n)}_{\ell+1,j+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x'_\ell x'_j \frac{1}{\ell+1+j+1-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x'_\ell x'_j \frac{1}{\ell+j+1}$.

Finalement $\underline{Z^T H_{n+1} Z = X'^T H_n X'}$.

$H_n X' = \beta_n X'$ donc $X'^T H_n X' = \beta_n X'^T X' = \beta_n \|X'\|^2 = \beta_n \sum_{\ell=0}^{n-1} (x'_\ell)^2$.

De plus d'après I Q2 a) $Z^T H_{n+1} Z \leq \beta_{n+1}\|Z\|^2 = \beta_{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}(x'_\ell)^2 = \beta_{n+1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(x'_\ell)^2 = \beta_{n+1}\|X'\|^2$

Alors $\beta_n\|X'\|^2 = X'^T H_n X' = Z^T H_{n+1} Z \leq \beta_{n+1}\|X'\|^2$; $\beta_n\|X'\|^2 \leq \beta_{n+1}\|X'\|^2$.

Or X' n'est pas nul car X' est un vecteur propre de H_n donc $\|X'\|^2>0$.

Par conséquent $\beta_n\|X'\|^2 \leq \beta_{n+1}\|X'\|^2$ donne $\beta_n \leq \beta_{n+1}$.

La suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Q2 a) Soit $\ell\in\mathbb{Z}$. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos(\ell\theta)+i\sin(\ell\theta))d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\ell\theta)d\theta + i\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\ell\theta)d\theta$

1er cas : $\ell=0$. Alors $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}1\,d\theta = 2\pi$.

2e cas : $\ell\neq 0$. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell\theta}d\theta = \left[+\frac{\sin(\ell\theta)}{\ell}\right]_{-\pi}^{\pi} + i\left[-\frac{\cos(\ell\theta)}{\ell}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{i}{\ell}\left[\cos(\ell\pi)-\cos(\ell(-\pi))\right]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell\theta}d\theta = -\frac{i}{\ell}\left[\cos(\ell\pi)-\cos(\ell\pi)\right]=0.$$

$$\forall \ell\in\mathbb{Z},\quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } \ell=0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Soit $\ell \in \mathbb{Z}$. $\displaystyle\int_0^\pi e^{i\ell\theta}\,d\theta = \int_0^\pi \cos(\ell\theta)\,d\theta + i\int_0^\pi \sin(\ell\theta)\,d\theta$.

Si $\ell = 0$: $\displaystyle\int_0^\pi e^{i\ell\theta}\,d\theta = \int_0^\pi 1\,d\theta + i\int_0^\pi 0\,d\theta = \pi$.

Supposons $\ell \neq 0$: $\displaystyle\int_0^\pi e^{i\ell\theta}\,d\theta = \left[\frac{\sin(\ell\theta)}{\ell}\right]_0^\pi + i\left[-\frac{\cos(\ell\theta)}{\ell}\right]_0^\pi = -\frac{i}{\ell}\left[\cos(\ell\pi) - 1\right] = \frac{1-(-1)^\ell}{\ell}\,i$

$$\forall \ell \in \mathbb{Z},\ \int_0^\pi e^{i\ell\theta}\,d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } \ell = 0 \\ \dfrac{1-(-1)^\ell}{\ell}\,i & \text{si } \ell \neq 0 \end{cases}.$$

---

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_{-1}^1 = \frac{1-(-1)^{p+1}}{p+1}$.

$$-i\int_0^\pi e^{i(p+1)\theta}\,d\theta \underset{\substack{p+1\in\mathbb{Z}\,! \\ p+1\neq 0\,!}}{=} -i\,\frac{1-(-1)^{p+1}}{p+1}\,i = -i^2\,\frac{1-(-1)^{p+1}}{p+1} = \frac{1-(-1)^{p+1}}{p+1} = \int_{-1}^1 x^p\,dx.$$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \int_{-1}^1 x^p\,dx = -i\int_0^\pi e^{i(p+1)\theta}\,d\theta.$$

---

c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}, \exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$, $P = \sum_{p=0}^r a_p X^p$

$$\int_{-1}^1 P(x)\,dx = \sum_{p=0}^r a_p \int_{-1}^1 x^p\,dx = \sum_{p=0}^r a_p\left(-i\int_0^\pi e^{i(p+1)\theta}\,d\theta\right) \overset{(*)}{=} -i\int_0^\pi\left(\sum_{p=0}^r a_p (e^{i\theta})^{p+1}\right)d\theta$$

$$\int_{-1}^1 P(x)\,dx = -i\int_0^\pi \left(\sum_{p=0}^r a_p (e^{i\theta})^p\right)e^{i\theta}\,d\theta = -i\int_0^\pi P(e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \int_{-1}^1 P(x)\,dx = -i\int_0^\pi P(e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta.$$

Remarque.. En toute rigueur au niveau de (*) il faudrait justifier la linéarité de cette "nouvelle" intégrale ce qui ne pose pas de problème majeur mais c'est un peu long ... On peut soit traiter le cas général soit se contenter d'écrire $e^{i(p+1)\theta} = \cos((p+1)\theta) + i\sin((p+1)\theta)$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = -i\left[\int_0^{\pi} \mathrm{Re}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})\,d\theta + i\int_0^{\pi} \mathrm{Im}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})d\theta\right]$$

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_0^{\pi} \mathrm{Im}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})\,d\theta - i\int_0^{\pi} \mathrm{Re}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})d\theta$$

Or $\int_{-1}^{1} P(x)dx$, $\int_0^{\pi} \mathrm{Im}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})d\theta$ et $\int_0^{\pi} \mathrm{Re}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})\,d\theta$ sont des réels.

Ainsi $\int_0^{\pi} \mathrm{Re}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})d\theta = 0$ et $\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_0^{\pi} \mathrm{Im}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})d\theta$.

Donc $\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| = \left|\int_0^{\pi} \mathrm{Im}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} |\mathrm{Im}(P(e^{i\theta})e^{i\theta})|\,d\theta$

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

Ainsi $\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| \leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})e^{i\theta}|\,d\theta = \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|\,|e^{i\theta}|d\theta = \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|\,d\theta$.

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| \leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$.

Q3 a) $X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $(x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1}t^{n-1})^2 \geq 0$. Ainsi $\int_0^1 (x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2 dt \geq 0$ et

$\int_{-1}^{0} (x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2 dt \geq 0$.

Alors $0 \leq X^T H_n X = \int_0^1 (x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2 dt \leq \int_{-1}^{0} (x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2 dt + \int_0^1 (x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$

Donc $0 \leq X^T H_n X \leq \int_{-1}^{1} (x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

---

b) Posons $P = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell X^\ell\right)^2$. $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $\left|\int_{-1}^{1} P(t)dt\right| \leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$

Alors $0 \leq X^T H_n X \leq \int_{-1}^{1} P(t)dt \leq \left|\int_{-1}^{1} P(t)dt\right| \leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|\,d\theta$.

Par conséquent : $0 \leq X^T H_n X \leq \int_0^{\pi} \left|\left(x_0 + x_1 e^{i\theta} + \dots + x_{n-1} e^{i(n-1)\theta}\right)^2\right| d\theta$

Ainsi $\underline{\underline{0 \leq X^T H_n X \leq \int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \dots + x_{n-1} e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta}}$.

Q4 a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $-\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi(-\theta) = \left|\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{-i\ell\theta}\right|^2 = \left|\overline{\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{i\ell\theta}}\right|^2$

donc $\varphi(-\theta) \underset{\uparrow}{=} \left|\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{i\ell\theta}\right|^2 = \varphi(\theta)$.

$|\bar{z}| = |z|$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $-\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$. $\underline{\varphi \text{ est paire}}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\theta + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $\varphi(\theta + 2\pi) = \left|\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{i\ell(\theta+2\pi)}\right|^2 \underset{\uparrow}{=} \left|\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{i\ell\theta}\right|^2 = \varphi(\theta)$.

$e^{i\ell 2\pi} = 1$ pour $\ell \in [\![0, n-1]\!]$

Ainsi $\underline{\underline{\varphi \text{ est périodique de période } 2\pi}}$.

φ est paire donc $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\theta = 2\int_0^{\pi} \varphi(\theta) d\theta$. Ainsi $\underline{\underline{\int_0^{\pi} \varphi(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\theta}}$.

b) $X^T H_n X \leq \int_0^{\pi} \varphi(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\theta$

$X^T H_n X \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{i\ell\theta}\right|^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{i\ell\theta}\right)\left(\overline{\sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{ij\theta}}\right) d\theta$

$X^T H_n X \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell e^{i\ell\theta}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-ij\theta}\right) d\theta$

$X^T H_n X \leq \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_\ell x_j \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-j)\theta} d\theta}_{= \begin{cases} 2\pi \text{ si } \ell = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell^2 \times 2\pi = \pi \sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell^2$

Ainsi $\underline{\underline{X^T H_n X \leq \pi \|X\|^2}}$.

5] Supposons ici que X est un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre β_n.

Alors $H_n X = \beta_n X$ et $\|X\|^2 > 0$.

Donc $X^T(\beta_n X) \leq \pi \|X\|^2$ ou $\beta_n \|X\|^2 \leq \pi \|X\|^2$.

Comme $\|X\|^2 > 0$: $\beta_n \leq \pi$.

La suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est majorée par π.

La suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée donc la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

PARTIE III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$.

Q1 Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\omega_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. $W = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$.

Alors $W^T H_n W = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_k \omega_j h_{k,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{j}} \frac{1}{k+j-1}$.

$$\int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{t^{j-1}}{\sqrt{j}}\right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{j}} t^{k+j-2}\right) dt$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{j}} \int_0^1 t^{k+j-2} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{j}} \frac{1}{k+j-1}.$$

Finalement $$W^T H_n W = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt.$$

Remarque.. I Q1 permettait d'aller un peu plus vite...

Q2 Rappelons que si $P = \sum_{\ell=0}^r a_\ell X^\ell$ et $Q = \sum_{\ell=0}^s b_\ell X^\ell$ sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, $PQ = \sum_{\ell=0}^{r+s} c_\ell X^\ell$ avec $c_\ell = \sum_{j=\max(0,k-s)}^{\min(k,r)} a_j b_{\ell-j}$ pour tout k dans $[\![0, r+s]\!]$

Supposons que n est élément de $[\![2, +\infty[\![$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{t^\ell}{\sqrt{\ell+1}}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{t^\ell}{\sqrt{\ell+1}}\right)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 = \sum_{\ell=0}^{2n-2}\left(\sum_{j=\max(0,\ell-(n-1))}^{\min(\ell,n-1)} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \frac{1}{\sqrt{\ell+1-j}}\right) t^\ell$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}^+, \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 \geq \sum_{\ell=0}^{\boxed{n-2}}\left(\sum_{j=\max(0,\ell-(n-1))}^{\min(\ell,n-1)} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \frac{1}{\sqrt{\ell+1-j}}\right) t^\ell$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^+, \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 \geq \sum_{\ell=0}^{n-2}\left(\sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \frac{1}{\sqrt{\ell+1-j}}\right) t^\ell$

En intégrant entre 0 et 1 et en utilisant la linéarité de l'intégrale il vient :

$W^T H_n W = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt \geq \sum_{\ell=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \frac{1}{\sqrt{\ell+1-j}} \int_0^1 t^\ell dt.$

Alors $W^T H_n W \geq \sum_{\ell=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \frac{1}{\sqrt{\ell+1-j}} \frac{1}{\ell+1}.$

En faisant le changement d'indice " $p = \ell+2$ " il vient :

$W^T H_n W \geq \sum_{p=2}^{n} \sum_{j=0}^{p-2} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \frac{1}{\sqrt{p-1-j}} \frac{1}{p-1}.$

En faisant le changement d'indice " $\ell = j+1$ " il vient :

$W^T H_n W \geq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{\ell}\sqrt{p-\ell}}.$

Q3) a) g est dérivable sur $]0,p[$ et $\forall x \in]0,p[,\ g'(x) = -\dfrac{\frac{p-2x}{2\sqrt{x(p-x)}}}{\left(\sqrt{x(p-x)}\right)^2}$

$\forall x \in]0,p[,\ g'(x) = -\frac{1}{2} \frac{p-2x}{(x(p-x))^{3/2}}.$

$\forall x \in]0,\frac{p}{2}[,\ g'(x) < 0\ ;\ g'(p/2) = 0\ ;\ \forall x \in]\frac{p}{2}, p[,\ g'(x) > 0.$

<u>g est donc strictement décroissante sur $]0,\frac{p}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{p}{2}, 1[$.</u>

b) Montrons que $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geq \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$ ou que $\sum_{k=1}^{p-1} g(k) \geq \int_1^{p-1} g(x)dx$

1er cas.. $p=2$. Alors $\sum_{k=1}^{p-1} g(k) = g(1) \geq 0$ et $\int_1^{p-1} g(x)dx = \int_1^1 g(x)dx = 0$.

L'inégalité est donc vraie.

2ème cas.. $p=3$. g est décroissante sur $[1, \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$.

De plus $g(1) = \frac{1}{\sqrt{1(3-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $g(2) = \frac{1}{\sqrt{2(3-2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $\forall x \in [1,2]$, $g(1) = g(2) \geq g(x)$

Donc $g(1) = g(2) \geq \int_1^2 g(x)dx$ car $2-1=1$.

Ainsi $\int_1^{p-1} g(x)dx = \int_1^2 g(x)dx \leq g(1) = g(2) \leq g(1)+g(2) = \sum_{k=1}^{p-1} g(k)$.

L'inégalité est encore vraie.

3ème cas.. p est pair et $p>3$. Ainsi $p \geq 4$ et $\frac{p}{2}$ est un entier supérieur ou égale à 2

Observons également que $1 \leq \frac{p}{2}-1$ et que $\frac{p}{2} \leq p-2$

- Soit $k \in [\![1, \frac{p}{2}-1]\!]$. Alors $[k, k+1] \subset]0, \frac{p}{2}]$ - g est décroissante sur $[k, k+1]$.

  Ainsi $\forall x \in [k, k+1]$, $g(x) \leq g(k)$. Alors $\int_k^{k+1} g(x)dx \leq \int_k^{k+1} g(k)\,dx = g(k)$.

  Par conséquent $\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} \int_k^{k+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} g(k)$ ou $\int_1^{\frac{p}{2}} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} g(k)$ ⊙

- Soit $k \in [\![\frac{p}{2}, p-2]\!]$. $[k, k+1] \subset [\frac{p}{2}, p-1]$; g est croissante sur $[k, k+1]$.

  Ainsi $\forall x \in [k, k+1]$, $g(x) \leq g(k+1)$. Alors $\int_k^{k+1} g(x)dx \leq g(k+1)$.

  Donc $\sum_{k=\frac{p}{2}}^{p-2} \int_k^{k+1} g(x)dx \leq \sum_{k=\frac{p}{2}}^{p-2} g(k+1)$ ou $\int_{p/2}^{p-1} g(x)dx \leq \sum_{k=\frac{p}{2}+1}^{p-1} g(k)$ ⊡

⊙ et ⊡ donnent alors par addition : $\int_1^{p-1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{p/2-1} g(k) + \sum_{k=\frac{p}{2}+1}^{p-1} g(k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p/2}}^{p-1} g(k)$

Or $g(\frac{p}{2}) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_1^{p-1} g(u)\,du \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq p/2}}^{p-1} g(k) \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} g(k)$; $\displaystyle\int_1^{p-1} g(u)\,du \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} g(k)$.

4ème cas : p est impair et $p > 3$. Alors $p \geqslant 5$.

Notons que $\frac{p-3}{2}$, $\frac{p-1}{2}$, $\frac{p+1}{2}$ et $\frac{p+3}{2}$ sont des entiers.

Notons également que : $1 \leqslant \frac{p-3}{2}$, $\frac{p-3}{2}+1 = \frac{p-1}{2} \leqslant \frac{p}{2}$, $\frac{p}{2} \leqslant \frac{p+1}{2}$ et $\frac{p+1}{2} \leqslant p-2$.

• Soit $k \in [\![1, \frac{p-3}{2}]\!]$. $[k,k+1] \subset [1, \frac{p}{2}]$. g est décroissante sur $[k,k+1]$.

Ainsi $\forall x \in [k,k+1]$, $g(x) \leqslant g(k)$. $\displaystyle\int_k^{k+1} g(u)\,du \leqslant g(k)$.

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \int_k^{k+1} g(u)\,du \leqslant \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} g(k)$ ou $\displaystyle\int_1^{\frac{p-1}{2}} g(u)\,du \leqslant \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} g(k)$.

• Soit $k \in [\![\frac{p+1}{2}, p-2]\!]$. $[k,k+1] \subset [\frac{p}{2}, p-1]$. g est croissante sur $[k,k+1]$.

Ainsi $\forall x \in [k,k+1]$, $g(x) \leqslant g(k+1)$. Alors $\displaystyle\int_k^{k+1} g(u)\,du \leqslant g(k+1)$.

donc $\displaystyle\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-2} \int_k^{k+1} g(x)\,du \leqslant \sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-2} g(k+1)$ ou $\displaystyle\int_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} g(u)\,du \leqslant \sum_{k=\frac{p+3}{2}}^{p-1} g(k)$.

Finalement $\displaystyle\int_1^{\frac{p-1}{2}} g(x)\,dx + \int_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} g(u)\,du \leqslant \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} g(k) + \sum_{k=\frac{p+3}{2}}^{p-1} g(k)$

g est décroissante sur $[\frac{p-1}{2}, \frac{p}{2}]$ et croissante sur $[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}]$.

$\forall x \in [\frac{p-1}{2}, \frac{p}{2}]$, $g(x) \leqslant g(\frac{p-1}{2})$ et $\forall x \in [\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}]$, $g(x) \leqslant g(\frac{p+1}{2})$.

Or $g(\frac{p-1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{p-1}{2}(p-\frac{p-1}{2})}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{p-1}{2} \times \frac{p+1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{p+1}{2}(p-\frac{p+1}{2})}} = g(\frac{p+1}{2})$.

donc $\forall x \in [\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}]$, $g(x) \leqslant g(\frac{p-1}{2}) = g(\frac{p+1}{2})$.

Alors $\displaystyle\int_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p+1}{2}} g(x)\,dx \leqslant g(\frac{p-1}{2}) = g(\frac{p+1}{2})$ car $\frac{p+1}{2} - \frac{p-1}{2} = 1$.

$$\int_1^{p-1} g(x)dx = \int_1^{\frac{p-1}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p+1}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} g(x)dx \leq \sum_{\ell=1}^{\frac{p-3}{2}} g(\ell) + g\left(\frac{p-1}{2}\right) + \sum_{\ell=\frac{p+3}{2}}^{p-1} g(\ell).$$

Or $g\left(\frac{p+1}{2}\right) \geq 0$ donc $\int_1^{p-1} g(x)dx \leq \sum_{\ell=1}^{\frac{p-3}{2}} g(\ell) + g\left(\frac{p-1}{2}\right) + g\left(\frac{p+1}{2}\right) + \sum_{\ell=\frac{p+3}{2}}^{p-1} g(\ell) = \sum_{\ell=1}^{p-1} g(\ell)$

Donc $\int_1^{p-1} g(x)dx \leq \sum_{\ell=1}^{p-1} g(\ell)$.

Pour $p \geq 2$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geq \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$.

Q4 Posons $\forall t \in \left[\frac{1}{\sqrt{p-1}}, \sqrt{p-1}\right]$, $h(t) = \frac{p}{1+t^2}$. Posons $I = \left[\frac{1}{\sqrt{p-1}}, \sqrt{p-1}\right]$.

1°.- h est de classe C^1 sur I et décroissante.

2°.- $h(I) = \left[h(\sqrt{p-1}), h\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)\right] = \left[\frac{p}{1+p-1}, \frac{p}{1+\frac{1}{p-1}}\right] = [1, p-1]$.

3°.- g est continue sur $[1, p-1]$.

Alors $\displaystyle\int_1^{p-1} g(x)dx = \int_{\sqrt{p-1}}^{\frac{1}{\sqrt{p-1}}} h'(t)\, g(h(t))\, dt$

$$\int_1^{p-1} g(x)dx = \int_{\sqrt{p-1}}^{\frac{1}{\sqrt{p-1}}} \frac{-p(2t)}{(1+t^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{p}{1+t^2}\left(p - \frac{p}{1+t^2}\right)}} dt$$

$$\int_1^{p-1} g(x)dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{p-1}}}^{\sqrt{p-1}} \frac{2pt}{(1+t^2)^2} \sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{p^2(1+t^2-1)}}\, dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{p-1}}}^{\sqrt{p-1}} \frac{2pt}{(1+t^2)^2} \frac{1+t^2}{pt} dt$$

$$\int_1^{p-1} g(x)dx = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{p-1}}}^{\sqrt{p-1}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\left(\arctan\sqrt{p-1} - \arctan\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right) dt$$

$$\int_1^{p-1} g(x)dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right) = \pi - 4\arctan\frac{1}{\sqrt{p-1}}.$$

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4 \arctan \frac{1}{\sqrt{p-1}}.$$

Q5 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ donc $\lim_{y\to 0} \frac{\tan(\arctan y)}{\arctan y} = 1$ car $\lim_{y\to 0} (\arctan y) = 0$

Alors $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\arctan y} = 1$; $\arctan y \underset{0}{\sim} y$.

donc $u_p = \frac{1}{p-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p-1} \frac{1}{\sqrt{p-1}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p^{3/2}}$.

→ $u_p = \frac{1}{p-1} \arctan \frac{1}{\sqrt{p-1}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{3/2}}$.

→ $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p^{3/2}} \geq 0$.

→ la série de terme général $\frac{1}{p^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_p.

La série de terme général $u_p = \frac{1}{p-1} \arctan \frac{1}{\sqrt{p-1}}$ converge.

Remarque : On pouvait obtenir le résultat en utilisant le préliminaire (Q1 c))

pour montrer que $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p-1} \frac{1}{\sqrt{p-1}}$.

Q6 a) $\|W\| = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

Supposons $n \geq 2$. $\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell+1} \leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \int_\ell^{\ell+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell} \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}$.

Ainsi $\sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}$. Or $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln n$.

donc $\ln n \leq \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \leq \ln n + 1$. $1 \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$.

$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{\ln n}) = 1$ donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \right) = 1$.

Ainsi $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$; $\underline{\underline{\|W\|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}}$.

__b)__ $\beta_n \|W\|^2 \geqslant W^T H_n W \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{\ell}\sqrt{p-\ell}} \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \int_1^{p-1} g(x)\,dx$

$\beta_n \|W\|^2 \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} (\pi - 4 \arctan (\frac{1}{\sqrt{p-1}})) = \pi \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} - 4 \sum_{p=2}^{n} u_p$.

Rappelons que : $\beta_n \leq \pi$.

donc $\pi \geqslant \beta_n \geqslant \left(\pi \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - 4 \sum_{p=2}^{n} u_p\right) \frac{1}{\|W\|^2}$.

$\pi \geqslant \beta_n \geqslant \pi \frac{1}{\|W\|^2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{4}{\|W\|^2} \sum_{p=2}^{n} u_p$.

$\|W\|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ donc $\frac{4}{\|W\|^2} \sim \frac{4}{\ln n}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\|W\|^2} = 0$.

De plus la série de terme général u_p converge donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=2}^{n} u_p = \sum_{p=2}^{+\infty} u_p$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} (\frac{4}{\|W\|^2} \sum_{p=2}^{n} u_p) = 0$.

$\frac{1}{\|W\|^2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} = \frac{1}{\|W\|^2} (\|W\|^2 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n\|W\|^2}$.

$\frac{1}{n\|W\|^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\|W\|^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\|W\|^2} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \right) = 1$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\pi \frac{1}{\|\psi\|^2}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p} - \frac{4}{\|\psi\|^2}\sum_{p=2}^{n} u_p\right) = \pi$.

Par encadrement on obtient alors $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \pi}}$.