Les exercices suivants, posés aux candidats des options scientifique et économique, constituent un échantillon de l'ensemble des exercices proposés lors des épreuves orales du concours 2006

1 Exercices donnés en option scientifique

1. Un composant électronique a une durée de vie X, variable aléatoire positive de densité f. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit la *fiabilité* de ce composant à l'instant t par

$$R(t) = P(X > t)$$

et on définit le *taux de défaillance* par

$$h(t) = \lim_{x \to 0} \frac{P_{(t<X)}(t < X \leqslant t + x)}{x}.$$

   (a) Quel lien existe-t-il entre R et f ?

   (b) Montrer que, pour tout t strictement positif :

$$h(t) = -[\log(R(t))]' = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

   (c) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .Montrer que $h(t)$ est constant. Montrer que pour tous $s, t > 0$ on a

$$P_{(X>t)}(X > t + s) = P(X > s)$$

   (d) Montrer qu'un composant qui a un taux de défaillance constant a une durée de vie exponentielle.

   (e) On considère n composants électroniques de durée de vie indé pendantes et de même loi X. On note $N(t)$ le nombre de composants encore en marche à la date t. Quelle est la loi de $N(t)$? Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$h(t) = \lim_{x \to 0} \frac{E(N(t)) - E(N(t + x))}{xE(N(t))}.$$

   Commentez ce résultat.

2. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$; on notera L_X la fonction, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \geq 0,\ L_X(t) = E(e^{tX}).$$

   On dit que $L_X(t)$ est la transformée de Laplace de X.

(a) Déterminer les transformées de Laplace des lois suivantes : loi uniforme sur $[-1;1]$, loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Vérifier que pour chacune de ces lois, on a $L_X(0)=1$, $L'_X(0)=E(X)$ et $L''_X(0)=E(X^2)$.

(b) Montrer que, pour tout $t>0$ tel que $L_X(t)$ soit fini et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a l'inégalité suivante :

$$P(X>x)\leqslant L_X(t)\,e^{-tx}.$$

Indication : appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Y=e^{tX}$.

(c) Si X_1, …, X_n sont indépendantes et de même loi telles que leur transformée de Laplace existe, calculer la transformée de Laplace de $X_1+\cdots+X_n$.

(d) On note $\Lambda(t)=\ln L_X(t)$, et on considère la variable aléatoire $\bar{X}$ définie par

$$\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}.$$

Montrer que, pour tout $t>0$ tel que $L_X(t)$ soit fini et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a l'inégalité suivante :

$$\ln P(\bar{X}>x)\leqslant -n\,(tx-\Lambda(t)).$$

(e) En déduire que si on note $\Lambda^*(x)=\mathrm{Sup}\,(tx-\Lambda(t))$ on peut optimiser cette inégalité, par

$$P(\bar{X}>x)\leqslant e^{-n\Lambda^*(x)}.$$

3. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré n : $P=a_0\ +a_1X\ +a_2X^2\ +...+a_nX^n$ oú $a_n\neq 0$.
Soient $z_0,z_1,...,z_n$ les racines $n+1$-èmes de l'unité (c.à.d telles que $\forall k\quad z_k^{n+1}=1$) et soit

$$M=sup\{|P(z_k)|,k\in\{0,1,...,n\}\}.$$

(a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^{n+1}=1$ et montrer que l'on peut choisir z_1 de sorte que $z_k=z_1^k$.

(b) Montrer que $M>0$.

(c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k^p$ en fonction de p .

(d) Montrer que $\displaystyle|\sum_{k=0}^{n}P(z_k)|\leq(n+1)M$ et en déduire que $|a_0|\leq M$.

(e) Montrer que $\forall k\in\{0,1,...,n\}\quad |a_k|\leq M$.

4. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire indépendantes et suivant toutes la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ.

   Soit, pour n entier non nul, $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

   (a) Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?

   (b) Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de m.

   (c) Soit $Z_n = \frac{X_1+X_n}{2}$. Montrer que Z_n est aussi un estimateur sans biais convergent de m. De $\overline{X}_n$ et Z_n lequel est de plus petite variance ?

   (d) Montrer que $E(T_n^2) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i - \overline{X}_n)$.

   (e) En déduire la valeur du réel a tel que $S_n^2 = aT_n^2$ soit un estimateur sans biais de σ^2.

5. On suppose qu'un enfant collectionne des images de joueurs de football qu'il trouve en cadeau dans des tablettes de chocolat. Une tablette contient une seule image et il y a $N \geq 2$ images de joueurs différentes numérotées de 1 à N, que l'entreprise de chocolat a réparties avec la même fréquence $1/N$. Notons X_n le numéro de l'image trouvée dans la n-ième tablette ouverte par l'enfant. Alors, les hypothèses sur la répartition des images impliquent que $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables uniformes sur $\{1, \ldots, N\}$, où $N \geq 2$.
   Pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, on note

   $$\tau_k^N = \inf\{n \geq 1 \ : \ \mathrm{Card}(\{X_1, \ldots, X_n\}) = k\}\ \} \ .$$

   On a $\tau_1^N = 1$ et τ_k^N est le nombre de tablettes que l'enfant a ouvertes lorsqu'il obtient pour la première fois k images différentes.

   (a) Calculer $P(\tau_2^N - \tau_1^N = p)$ pour tout $p \geq 1$. Plus généralement, calculer pour tout $p \geq 1$,

   $$P(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N = p) \ .$$

   Calculer également $E(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N)$.

   (b) Posons $H_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} 1/k$ et $T_N = \tau_N^N$. Calculer $H_N^{-1}E(T_N)$.

   (c) Montrer que les variables $(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N, 1 \leq k \leq N-1)$ sont indépendantes.

   (d) Calculer la variance de T_N notée $\mathrm{V}(T_N)$ en fonction de H_N.

   (e) Montrer que $H_N^{-1}(T_N - E(T_N))$ tend vers 0 en probabilité.

6. Soit F une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe C_1 vérifiant :

   $F(0,0) = 0$ et pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$

   $$x\ \frac{\delta F}{\delta x}(x,y)\ +\ y\ \frac{\delta F}{\delta y}(x,y)\ = 0.$$

   (a) Rappeler la définition d'une dérivée partielle

   (b) Soit (x,y) fixé dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\phi(t) = F(tx,ty)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée.

   (c) En déduire l'expression de F.

   (d) Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$.
   Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \ \{(0,0)\}$.
   Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.
   Dans la suite, on se propose de trouver toutes les fonctions g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe C_1 qui vérifient le problème :
   (*) $\quad g(0,0) = 0$ et pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ $\quad x\ \frac{\delta f}{\delta x}(x,y) + y\ \frac{\delta f}{\delta y}(x,y)\ = \sqrt{x^4+y^4}$.

   (e) Déduire des questions précédentes une fonction h vérifiant le problème (*).

   (f) On pose $G = g - h$; déterminer une équation simple vérifiée par la fonction G ?

   (g) En déduire toutes les fonctions solutions du problème (*).

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $E = \{1, \cdots,\ n\}$.

   (a) On choisit de façon équiprobable deux éléments de $\mathcal{P}(E)$: A et B.
   Déterminer la probabilité pour que $A \subset B$.

   (b) Déterminer la probabilité pour que $\text{card}(A \cap B) = k$.

   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\text{card}(A \cap B)$.

   (d) Calculer $S = \displaystyle\sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \text{card}(A \cap B)$.

8. Soit une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant des fonctions de répartition $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et convergeant en loi vers une variable aléatoire réelle X ayant une fonction de répartition F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (a) Rappeler la définition de la convergence en loi, de la convergence en probabilité.

(b) Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$P(A \leq X \leq B) \geq 1 - \varepsilon$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(A \leq X_n \leq B) \geq 1 - \varepsilon$$

(d) Soit une suite de variables aléatoires réelles $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant en probabilité vers 0. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n Y_n)$ converge en probabilité vers 0.

9. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi définies sur un espace probabilisé et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n le maximum de $X_1, \cdots, X_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega,\ M_n(\omega) = max\{X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\}$$

(a) propriétés de la loi exponentielle.

(b) On suppose que les variables aléatoires (X_i) suivent une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = \alpha M_n - \ln(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire.

(c) On suppose maintenant que les variables aléatoires (X_i) suivent une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (de densité $\frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$).
Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $Z_n = \frac{\pi}{nc} M_n$ converge en loi vers une variable aléatoire.

10. On admet que la durée de vie d'ampoules électriques suit une loi exponentielle d'espérance inconnue $\dfrac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ et que les variables aléatoires X_i représentant la durée de vie de l'ampoule i sont indépendantes.
Pour estimer α, on choisit un lot de n ampoules et on observe les instants, supposés distincts deux à deux,
$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(r)}$ où les r premières de ce lot éclatent (où $X_1, \cdots, X_n$ représentent les durées de vies des n ampoules).

(a) Quelle est la loi de $X_{(1)}$, de $X_{(n)}$?
En posant $X_{(0)} = 0$, on admettra, pour la suite de l'exercice, que les variables aléatoires $X_{(i)} - X_{(i-1)}$, $1 \leq i \leq n$, sont indépendantes et suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $\alpha(n - i + 1)$.

(b) Parmi les estimateurs sans biais de $\frac{1}{\alpha}$ de la forme

$$U = \lambda_1 X_{(1)} + \cdots + \lambda_r X_{(r)}$$

(c'est à dire combinaison linéaire des r observations $X_{(i)}$), trouver celui, noté $\hat{U}$, qui rend minimum $\text{var}(U)$. On commencera par déterminer l'espérance et la variance d'une telle variable aléatoire U.
Puis, on pourra montrer que $\hat{U} = (X_{(1)} + \cdots + X_{(r)})\frac{1}{r} + X_{(r)}\frac{n-r}{r}$
et qu'alors $\text{var}(\hat{U}) = \frac{1}{r\alpha^2}$.

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient n variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\hat{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
   (a) Rappeler la loi de $Y_n = n\hat{X}_n$, son espérance et sa variance. Quelle convergence peut-on établir pour la suite $(\hat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   On cherche à évaluer $P(X=0) = e^{-\lambda}$ à l'aide d'une suite d'estimateurs (Z_n) convergeant en un certain sens vers $e^{-\lambda}$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(Z_n) = e^{-\lambda}$.
   (b) Une première idée est de poser $Z_n = e^{-\hat{X}_n}$. Que penser de ce choix ?
   (c) Une autre idée consiste à choisir $Z_n = \frac{K_n}{n}$ où $\forall \omega \in \Omega, K_n(\omega) = \text{Card}\{i,\ 1 \le i \le n,\ X_i(\omega) = 0\}$.
   Déterminer la loi de K_n. Qu'en déduire pour la suite (Z_n) ?
12. Soit M la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer les entiers n de $\mathbb{N}$ tels que M^n soit inversible .
   (b) Déterminer les entiers n de $\mathbb{N}$ tels que M^n soit diagonalisable .
13. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on appelle " chemin " de $O(0,0)$ à $A_n(n,n)$, où n est un entier, une ligne brisée de O à A_n formée de segments de longueur 1 et dont les changements de direction ne se font que vers le haut ou vers la droite.
   Dénombrer le nombre de chemins différents de O à A_n.
14. Soit, pour tout n entier non nul , $P_n(x) = x^n + x - 1$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$. (on définit ainsi une suite de réels $(x_n)_n$.)
   (b) Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

(c) Montrer que x_n converge vers un réel que l'on précisera.

(d) Montrer que pour tout n non nul $1 - x_n \leq \frac{\log(n)}{n}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $a > 0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

15. (a) Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ a une espérance finie qu'on note m.
    Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$.

    (b) Calculer l'espérance $E(\dfrac{S_k}{S_n})$ en fonction de n, a , k et m.

16. Soit f une fonction continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

    (a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, il existe un unique couple (a_n, b_n) de $\mathbb{R}^2$ tel que

    $$\int_0^{2\pi} (f(t) - a\cos(nt) - b\sin(nt))^2 dt$$

    soit minimale.

    (b) Que dire des limites des suites (a_n) et (b_n) pour $n \to +\infty$ lorsque f est supposée de plus de classe C^1 ?

17. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini,

    $$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

    est équivalent à

    $$\frac{1}{2}e^n$$

    (on pourra introduire une variable aléatoire discrète usuelle).

18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : P' divise P $(*)$.

    (a) Montrer que P'' divise P'.

    (b) En déduire tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété $(*)$.

19. Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

(a) Existe-t-il une suite de m vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_m)$, avec $m \neq n$, telle que pour tout x de E on ait :

$\|x\| = \sqrt{< x|x_1 >^2 \ + \ < x|x_2 >^2 + ... + \ < x|x_m >^2}$?

(b) Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite de n vecteurs qui vérifient :

$\|x_1\| = \|x_2\| = ... = \|x_n\| = 1$

et pour tout x de E, $\|x\| = \sqrt{< x|x_1 >^2 \ + \ < x|x_2 >^2 + ... + \ < x|x_n >^2}$.

Montrer que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une base de E .

20. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres.
Démontrer que f est diagonalisable.
21. Soit A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe un triplet de scalaires non tous nuls $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une unique valeur propre.
22. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t) f(t) dt = 1 + x$.

2 Exercices donnés en option économique

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   La matrice A est-elle inversible ?

   (b) Déterminer tous les entiers naturels p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.

   (c) Existe-t-il un entier n de $\mathbb{N}$ tel que $M^n = A$ si :

   i. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   ii. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité continues.
Soit $U = min(X, Y)$ et $V = max(X, Y)$.
Soient $F_X,\ F_Y,\ F_U,\ F_V$ les fonctions de répartition de X, Y, U et V respectivent.

(a) Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

(b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_U(t) \; = \; 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$.

(c) Etablir une relation analogue entre F_V, F_X et F_Y.

(d) On suppose à présent que X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

   i. Quelle est la loi de U ? Que vaut $P(U = X)$?

   ii. Montrer que V a même loi que $Z = X + \frac{1}{2}Y$. En déduire l'espérance et la variance de V.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Définition et propriétés des matrices de passage

   (b) Donner une base et la dimension de $Kerf$.

   (c) Donner une base et la dimension de Imf.

   (d) Donner les valeurs propres et les sous espaces propres de f.

   (e) f est-il diagonalisable ?

   (f) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (g) On note I la matrice identité dans la base canonique. Déterminer les réels a tels que $(A - aI)^2 = I$.

4. Soit E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f''(x) - (1 + x^4)f(x) = 0$$

   On admet que E contient une unique fonction f_0 vérifiant $f_0(0) = f_0'(0) = 1$.

   (a) Rappeler la définition et les propriétés des fonctions convexes et montrer que f_0^2 est convexe.

   (b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \; f_0(t) \geq 1$.

   (c) montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)} dt$

   On définit f_1 par $\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f_1(x) = f_0(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)} dt$.

   (d) Montrer que $f_1 \in E$ et que f_1 est bornée.

5. Soient $\theta \in [-2, 2]$ et X une variable aléatoire à densité f_θ définie par $f_\theta(x) = \theta x - \frac{\theta}{2} + 1$ si $x \in [0, 1]$ et 0 sinon.

   (a) Donner la définition et des exemples d'estimateurs.

(b) Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.

(c) On admet que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(X)$ admet une espérance et une variance que l'on calculera (on pourra effectuer le changement de variable défini par la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ sur un intervalle adéquat).

On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on pose $\hat{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = 12(\hat{X_n} - \frac{1}{2})$.

(d) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de θ.

6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$.
On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

   (a) Déterminer la loi de Y_n.

   (b) les variables Y_i sont-elles deux à eux indépendantes ?

   (c) Calculer $E(U_n)$ et $V(U_n)$.

   (d) Etudier la convergence de la suite $(\frac{U_n}{n})$.

7. Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi définie par

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{3}.$$

On définit alors des variables aléatoires $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ par
$Y_i = 1$ si $X_i = 1$, et $Y_i = 0$ sinon,
$Z_i = 1$ si $X_i = 0$, et $Z_i = 0$ sinon.
On pose $T_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$, $T_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i$ et $U = T_1 + T_2$.
Déterminer $P_{(T_1=t_1)\cap(T_2=t_2)}(X_i = 1)$.
Déterminer $P_{(U=k)}(T_1 = t_1)$ $(0 \leq t_1 \leq k \leq n)$ et expliquer ce résultat.

8. On dispose d'urnes U_1, U_2,..., U_n,.... La première U_1, contient une boule noire, une boule blanche et une boule de couleur inconnue B. Les suivantes, $U_2, U_3, ..., U_n, ...$ contiennent une boule blanche et une noire.

On tire une première boule de l'urne U_1 qu'on remet dans U_2. Puis on tire une deuxième boule de U_2 qu'on remet dans U_3 etc...

On désigne par p_n la probabilité que la $n^{\text{ième}}$ boule tirée (de U_n) soit blanche.

(a) Dans cette question, on suppose que $p_{1000} = \frac{1}{2} - (\frac{1}{3})^{999}$.
La boule B était-elle blanche ?

(b) Dans cette question, on suppose que, pour tout n supérieur à 1000, on a l'égalité $p_n = \dfrac{2}{3} - (\dfrac{1}{2})\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1+(\frac{1}{3})^n}$.

La boule B était-elle noire ?

On dispose de 7 Euros. Chaque semaine, a lieu une loterie de 100 billets dont 10 sont gagnants. Chaque billet coûte 1 Euro.

9. (a) Dans cette question on veut maximiser la chance de gagner au moins une fois. Discuter l'affirmation "On a intérêt à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

   (b) On veut maximiser le nombre de billets gagnants achetés. Discuter l'affirmation "On a intérêt à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

10. Vous disposez d'une trousse contenant 10 stylos dont un seul fonctionne.

    (a) Vous en essayez un (au hasard), puis s'il y a échec, un deuxième puis, s'il y a échec, vous remettez le premier et vous tirez (au hasard) le troisième puis, s'il y a échec, vous remettez le deuxième et vous tirez (au hasard) le quatrième, puis...

    Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne pour trouver le bon ?

    (b) Vous les essayez l'un après l'autre jusqu'à trouver celui qui fonctionne. Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne ?

    (c) Même question si suppose qu'à chaque essai infructueux, vous remettez (à tort)le stylo dans la trousse et que vous tirez au hasard à nouveau.

11. Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser J chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette configuration (donc à $0.5\ 10^{-J}$ près).

    On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-0.5\ 10^{-J}, 0.5\ 10^{-J}]$, et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération.

    Déterminer une valeur approchée de la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale, en valeur absolue, à $0.5\ 10^{-J+3}$. (On donne $2F(\sqrt{3}) - 1 \approx 0.92$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

12. Soient $a > 0$ et f définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$. Déterminer les extremas de f.

13. (a) Montrer que la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = (\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!})e^{-x}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

    (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation

$$\frac{e^x}{2} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$$

    admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$.
    Dans la suite on note a_n cette solution.

    (c) Ecrire un programme turbo-pascal permettant de calculer le plus "économiquement" possible la valeur de $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$ pour un x donné.

    (d) La suite de terme général a_n est-elle monotone ?