■ 1 - *Exercice*

1° Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Déterminer la loi de $Z = g(X,Y)$, où g est une fonction définie sur l'ensemble $(X,Y)(\Omega)$. Déterminer la loi de la somme quand X et Y sont indépendantes.

On considère deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On considère une partie D (respectivement Δ) de $\mathbb{R}$, en bijection avec $\mathbb{N}$, dans laquelle X (respectivement Y) prend presque sûrement ses valeurs, et on indexe bijectivement les éléments de D (respectivement Δ) de sorte que $D = \{x_n\ ,\ n\in\mathbb{N}\}$ (respectivement $\Delta = \{y_n\ ,\ n\in\mathbb{N}\}$).
On suppose que X et Y sont indépendantes et que X et $X+Y$ ont même loi.

2° a) On considère une série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$, qui est convergente. Justifier l'existence du nombre

$$M = \underset{n\in\mathbb{N}}{\operatorname{Max}}(a_n)\ .$$

b) En déduire que l'ensemble $\{\mathbb{P}([X=x])\ ,\ x\in\mathbb{R}\}$ admet un plus grand élément.

Soit alors a un réel tel que $\mathbb{P}([X=a]) = \operatorname{Max}\{\mathbb{P}([X=x])\ ,\ x\in\mathbb{R}\}$.

3° a) Montrer que, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}([X=a-y]) = \mathbb{P}([X=a])$ ou $\mathbb{P}([Y=y]) = 0$.

b) En déduire que la variable aléatoire Y est discrète « finie ».

4° Soit μ un réel appartenant à l'ensemble $\Big\{y\in\mathbb{R}\ ,\ \mathbb{P}([Y=y])\neq 0\Big\}$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=a-n\mu]) = \mathbb{P}([X=a])$.

5° Montrer que la variable Y est presque sûrement nulle.

■ 2 - *Exercice sans préparation*

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E, qui commutent. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale sont respectivement symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire vérifient :

$${}^tS = S \quad\text{et}\quad {}^tT = -T\ .$$

Montrer que, pour tout $x\in E$, on a :

$$f(x)\perp g(x) \quad\text{et}\quad \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|\ .$$

1 - *Exercice*

1° Définition et convergence d'une série géométrique. Donner les formules de sommation d'une série géométrique et de ses dérivées successives.

Une urne contient n jetons numérotés de 0 à $n-1$. On tire un à un, avec remise et au hasard trois jetons dont les numéros sont notés X, Y et Z respectivement. On tire ensuite trois autres jetons, un à un, sans remise, et on note A, B et C respectivement les numéros obtenus. On pose

$$p_n = \mathbb{P}([X+Y=Z]) \quad \text{et} \quad q_n = \mathbb{P}([A+B=C]) .$$

2° a) Calculer p_n.

b) Calculer q_n en distinguant les cas n pair et n impair.

c) Montrer que $\dfrac{p_n}{q_n} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

3° a) Calculer $r_n = \mathbb{P}([X+Y+Z=n-1])$.

b) Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(s^{X+Y+Z}\right) = \frac{1}{n^3}\left[\frac{1-s^n}{1-s}\right]^3 .$$

c) Retrouver alors la valeur de r_n à l'aide de la formule ci-dessus.

2 - *Exercice sans préparation*

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall\ (x,y) \in E^2 \qquad \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0 .$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\ \|x\|$.

■ 1 - *Exercice*

1° Conditions pour qu'une matrice réelle soit diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

2° Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & . & . & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & . & . & . \\ . & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & . & . & . & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres correspondants. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) La matrice A est-elle inversible ?

Dans la suite $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une suite de n vecteurs normés (c'est-à-dire de norme 1) de E, tels que

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,, \quad i \neq j \;\Rightarrow\; \|u_i - u_j\| = 1\,.$$

3° a) Pour i et j dans $[\![1,n]\!]$, calculer $\langle u_i, u_j\rangle$.

b) Montrer que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E.

c) La conclusion de b) subsiste-t-elle, si on ne suppose plus que tous les vecteurs u_i sont normés mais qu'ils sont seulement de même norme non nulle ?

4° Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et f un endomorphisme de E tel que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = u_i$.

a) Montrer que f est un automorphisme de E.

b) A-t-on, pour tout x de E et tout y de E, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$?

■ 2 - *Exercice sans préparation*

Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable nulle mais telle que la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $\big(\mathbb{V}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

1 - Exercice

Les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, admettant une espérance, alors UV admet une espérance et $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V)$.

1° Soit X et Y deux variables aléatoires à densité ayant un moment d'ordre 2. Quel lien existe-t-il entre l'indépendance de X et Y et leur non-corrélation (c'est à dire la propriété $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$) ?

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant chacune la loi normale de moyenne m et d'ecart-type σ. Soit, pour n entier non nul,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 .$$

2° Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?

3° Montrer que $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de m.

4° Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(S_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i - \overline{X}_n)$.

5° En déduire la valeur du réel a tel que la variable aléatoire $T_n = a\,S_n$ soit un estimateur sans biais de σ^2.

6° On suppose ici que $m = 0$ et on se propose de montrer que $\overline{X}_n$ et S_n sont non-corrélées.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(\overline{X}_n\, S_n) = \dfrac{1}{n^2}\,\mathbb{E}\left[\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right)\right] - \mathbb{E}(\overline{X}_n^3)$.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(\overline{X}_n\, S_n) = \dfrac{n-1}{n^3}\,\mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j^3\right)$ et conclure.

2 - Exercice sans préparation

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n$. On dit que $A \leqslant B$ si et seulement si pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$.

Montrer que si A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{S}_n$, on a :

(i) $\left[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant C\right] \Rightarrow A \leqslant C$;

(ii) $\left[A \leqslant B \text{ et } B \leqslant A\right] \Rightarrow A = B$.

■ 1 - Exercice

1° Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit φ l'application définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad [\varphi(P)](X) = P(X+1) - P(X).$$

2° a) Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et expliciter sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de E. On précisera l'élément $a_{i,j}$ de A, situé à la i^e ligne et à la j^e colonne.

b) Déterminer le noyau et l'image de φ.

c) Déterminer un polynôme annulateur de φ.

d) Étudier la diagonalisabilité de φ.

3° a) Soit $P \in E$. Montrer que :

$$\varphi^n(P)(X) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) \right],$$

où φ^n désigne la composée n fois : $\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$.

b) En déduire, pour $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la valeur de :

$$S_j = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \binom{n}{k} k^j \right].$$

4° Retrouver le résultat de la question précédente pour $j \in \{0, 1, 2\}$ en considérant la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1-x)^n$.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes deux une loi géometrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}\left\{ \omega \in \Omega,\ M(\omega) \text{ inversible} \right\}.$$

1 - *Exercice*

1° Définition des matrices semblables. Donner la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphismes.

Une urne blanche contient n boules blanches et une urne rouge n boules rouges. On tire à chaque étape au hasard une boule de chaque urne et on remet chacune de ces boules dans l'urne de laquelle on ne l'a pas tirée. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches dans l'urne blanche à l'issue de l'étape k. En particulier, $X_0 = n$ et $X_1 = n - 1$ (avec probabilité 1).
On pose pour k entier positif

$$Z_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k = 0]) \\ \mathbb{P}([X_k = 1]) \\ \vdots \\ \mathbb{P}([X_k = n]) \end{pmatrix} .$$

2° Trouver une matrice A à coefficients entiers telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad Z_k = \frac{1}{n^2}\, A\, Z_{k-1} .$$

On pose par la suite $B = A/n^2$.

3° On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice B et en déduire pour k fixé la valeur de $\mathbb{E}(X_k)$.

4° Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comment peut-on interpréter chacun des coefficients de la matrice B^k ? Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que tous les coefficients de B^k sont strictement positifs pour tout $k \geqslant k_0$.

5° Calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$. Que retrouve-t-on ?

2 - *Exercice sans préparation*

Soit α un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel x positif, il existe un unique réel positif noté $f(x)$ tel que

$$f(x)\, \mathrm{e}^{f(x)} = x^\alpha .$$

Étudier ensuite la dérivabilité de f, et exprimer f' en fonction de f le cas échéant.

■ *1 - Exercice*

1° Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de densités respectives f_X et f_Y. Donner une expression de la densité de $Z = X + Y$.

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, définies sur un espace de probabilité noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2° Quelle est la loi de $-\ln(U)$?
Montrer que la densité de la variable aléatoire $Z = -\ln(U) - \ln(V)$ est donnée par

$$f_Z(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit a un réel supérieur ou égal à 1. On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -aU \\ aV & 3 \end{pmatrix}.$$

3° a) Montrer que la probabilité p que la matrice M ait toutes ses valeurs propres réelles vaut

$$p = \frac{1 + 2\ln(a)}{a^2}.$$

b) Montrer que la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$ vaut également p.

4° Dans cette question, on prend $a = 1$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X(\omega)$ la plus grande valeur propre de $M(\omega)$. Déterminer une densité de X.

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que E n'est pas la réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts (c'est à dire distincts de E).

1 - Exercice

1° Rappeler la définition et les propriétés de la fonction Γ.

Soit b un réel et φ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = (x+b)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

L'objet de l'exercice est de chercher toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant pour tout x positif la relation :

$$(\mathcal{R}) \qquad f(x) = \varphi(x) + \int_0^{+\infty} \varphi(x+t)\, f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

2° Soit F_1 et F_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad F_2(x) = x\, e^{-x}\,.$$

a) Montrer que la famille (F_1, F_2) est libre dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

Soit E l'espace vectoriel engendré par F_1 et F_2.

b) On considère l'application Φ qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x+t)\, f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que l'intégrale qui définit Φ est convergente pour toute fonction f de E.

3° Montrer que Φ est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base (F_1, F_2).

a) Montrer que Φ est un automorphisme de E et préciser l'automorphisme réciproque.

4° Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.

a) Montrer que f est élément de E.

b) Déterminer l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(\mathcal{R})$.

2 - Exercice sans préparation

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ.
Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in\,]0,1[$. On pose

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k\,.$$

1° Déterminer la loi conditionnelle de S sachant que $[N = n]$.

2° En déduire la fonction de répartition puis la loi de S. Vérifier que

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)\,.$$

■ 1 - Exercice

1° On jette deux dés non pipés simultanément. On note

$$\Omega = \Big\{(x, y)\ ,\ 1 \leqslant x \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 6\Big\}$$

l'ensemble des résultats possibles. On munit Ω de la probabilité uniforme (équiprobabilité des couples (x, y)). On note S la variable aléatoire égale à la somme des chiffres marqués par les deux dés. Déterminer la loi de S ; calculer son espérance et sa variance.

2° Un joueur lance les deux dés selon le protocole suivant :

- si $S = 7$ ou 11, le joueur gagne ;
- si $S = 2$, 3 ou 12, le joueur perd ;
- si $S = 4, 5, 6, 8, 9$ ou 10, le joueur reprend les deux dés et effectue un second lancer de ces deux dés ;
  - ∗ si ce second jet donne un total de 7, le joueur a perdu,
  - ∗ s'il obtient le même total qu'au premier jet, il a gagné le jeu ;
  - ∗ sinon, il reprend les dés et effectue le lancer suivant. Au cours du ou des lancers suivants, il aura gagné le jeu dès qu'il aura retrouvé le total k trouvé au premier jet et il aura perdu s'il marque un total de 7.

On appelle S_i la somme des deux dés obtenue au i-ième jet si celui-ci a eu lieu.

a) Soit n un entier naturel non nul et $k \in \{4, 5, 6\}$. On suppose que dans le premier jet le joueur a réalisé l'évènement $(S_1 = k)$. Montrer que la probabilité de l'événement : « Le joueur gagne au n-ième jet » vaut :

$$\frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} .$$

b) En déduire que si le joueur a réalisé (S_1=k) pour $k \in \{4, 5, 6\}$, la probabilité qu'il gagne le jeu est

$$\mathbb{P}(D_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} .$$

3° Soit n un entier naturel non nul et $k \in \{8, 9, 10\}$. On suppose que dans le premier jet le joueur a réalisé l'événement (S_1=k). Calculer la probabilité que le joueur gagne le jeu.

4° Calculer la probabilité que le joueur gagne le jeu. Comparer ce résultat avec la valeur $0,5$.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f, g, h trois endomorphismes de E vérifiant :

$$f + g + h = \mathrm{Id}_E$$

et

$$fog = gof = hog = goh = foh = hof .$$

1° Montrer que f, g et h sont des projecteurs.

2° Prouver que $\varphi = f + g - 2h$ est diagonalisable.

3° Donner un exemple d'un tel triplet d'endomorphismes.

■ *1 - Exercice*

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $m \neq 0$ et de variance égale à 1.
On pose $Y = X^2$.
On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1° Rappeler la définition et les propriétés des lois γ et Γ.

2° Déterminer une densité f_Y de Y.

3° Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma\Big(k + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(2k)!}{2^{2k}\, k!}\sqrt{\pi}\,.$$

4° Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $m^2/2$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note T_k une variable aléatoire réelle telle que $T_k/2$ suive la loi $\gamma(k + 1/2)$. On note g_k une densité de T_k.

Montrer que :

$$f_Y(y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\mathbb{P}([Z = k])\, g_k(y)\Big] \quad \text{si} \quad y > 0 \quad \text{et} \quad f_Y(y) = 0 \quad \text{sinon.}$$

5° Montrer que :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\mathbb{P}([Z = k])\,\mathbb{E}(T_k)\Big]$$

et calculer cette valeur.

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1° Déterminer les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

2° Soit P un plan stable par f. Montrer que $\dim(f(P)) = 1$.
En déduire les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

1 - Exercice

1° Définition et propriétés d'un produit scalaire.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique (noté $\langle\ ,\ \rangle$) et de la norme euclidienne associée.
Soit f et g deux endomorphismes de E tels que

$$\forall x \in E\,, \quad \|f(x)\| = \|g(x)\|\ .$$

2° Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2\,, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle\ .$$

3° On suppose, pour cette question seulement, que l'application f est bijective.
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que $g = u \circ f$.
Montrer de plus que, pour tout x de E, $\|u(x)\| = \|x\|$.

4° On ne suppose plus nécessairement f bijective.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

b) Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$.
Montrer qu'il existe une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ d'éléments de E telle que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_i = f(e_i)$.
Montrer que la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ définie, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, par $g_i = g(e_i)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} g$.

c) Justifier que les familles $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ peuvent être complétées en des bases orthonormées $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ respectivement, de E.

Soit u l'endomorphisme de E tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \quad u(f_i) = g_i\ .$$

d) Montrer que :

- pour tout x de E, $\|u(x)\| = \|x\|$;
- $g = u \circ f$.

e) L'endomorphisme u ainsi défini est-il unique ?

2 - Exercice sans préparation

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X et Y sont indépendantes, identiquement distribuées, et qu'elles admettent un moment d'ordre 2.
Les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?
Sinon, à quelle condition sur la loi (commune) de X et Y le sont-elles ?

1 - Exercice

1° Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

On considère trois variables aléatoires réelles X_1, X_2 et X_3, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, centrées et admettant un moment d'ordre 2.
On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}, \quad \text{avec} \quad \forall (i, j) \in [\![1, 3]\!]^2, \quad m_{i,j} = \mathbb{E}(X_i X_j).$$

2° Montrer que la matrice M est diagonalisable.

3° Dans cette question seulement, on suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont discrètes et indépendantes. Que peut-on dire de la matrice M ?

4° Montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

Dans la suite, on suppose que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5° Déterminer les valeurs propres de M.

6° Soit Z une variable aléatoire d'espérance nulle; on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{E}\Big[(Z - x_1 X_1 - x_2 X_2 - x_3 X_3)^2\Big].$$

Déterminer la matrice Hessienne de φ en (x_1, x_2, x_3).

7° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que φ admette un minimum en $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est

$$M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(ZX_1) \\ \mathbb{E}(ZX_2) \\ \mathbb{E}(ZX_3) \end{pmatrix}$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Z pour que la fonction φ admette un minimum. On pourra introduire l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

2 - Exercice sans préparation

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x^{k+1} + x^k - n = 0$$

admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

2° Étudier les variations et la limite éventuelle de la suite (x_n).

3° Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.