HEC 2006 S1

■ 1 - *Exercice*

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.

On considère un endomorphisme u de E tel que :

$$u^2 - 2u + Id_E = 0$$

où $u^2 = u \circ u$.

1° *Question de Cours:* Enoncer le théorème du rang pour une application linéaire.

2° a) Montrer que u est un automorphisme de E.

b) Quelles sont les valeurs propres de u ?

c) A quelles conditions u est-il diagonalisable ?

d) Comparer $\mathrm{Im}(u - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et en déduire que $\dim \mathrm{Ker}(u - Id_E) \geqslant \frac{n}{2}$.

3° On suppose dans la suite de l'exercice que $\dim \mathrm{Ker}(u - Id_E) = n - 1$.

a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u - Id_E)$. Justifier l'existence de $n - 1$ vecteurs de E notés $e_2, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

b) Montrer alors que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

4° a) Soit N la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en ligne 1 et colonne n qui est égal à 1. Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MN = NM$.

b) On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension en fonction de n.

■ 2 - *Exercice sans préparation*

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n supérieur ou égal à λ, on considère la variable aléatoire $N_n = \frac{1}{n} \mathrm{Inf}\,\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i, $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre λ/n.
Etudier la convergence en loi de la suite $(N_n)_{n \geqslant \lambda}$.

HEC 2008 S1 Correction de l'exercice

Q1 f est une application linéaire de E dans E'.

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.

Q2 a) $Id_E = 2u - u^2 = u \circ (2Id_E - u)$ & $Id_E = 2u - u^2 = (2Id_E - u) \circ u$.

ceci suffit pour dire que u est bijectif et que $u^{-1} = 2Id_E - u$.

Ainsi <u>u est un automorphisme de E et $u^{-1} = 2Id_E - u$.</u>

b) <u>1er cas</u>.. $u = Id_E$. Alors $Sp\, u = \{1\}$ & $SEP(u,1) = E$.

<u>2ème cas</u>.. $u \neq Id_E$. $u - Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\exists t \in E, (u - Id_E)(t) \neq 0_E$.

Comme $u \circ Id_E = Id_E \circ u$: $(u - Id_E)^2 = u^2 - 2u + Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Posons $x = (u - Id_E)(t)$. $x \neq 0_E$ et $(u - Id_E)(x) = (u - Id_E)^2(t) = 0_E$.

Donc $x \neq 0_E$ et $u(x) = x$. 1 est valeur propre de u. $1 \in Sp\, u$.

$X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de u dont la seule racine est 1 alors $Sp\, u \subset \{1\}$.

Finalement $Sp\, u = \{1\}$ ... et dans les deux cas.

<u>1 est la seule valeur propre de u.</u>

c) $Sp\, u = \{1\}$.

u est diagonalisable $\Leftrightarrow SEP(u,1) = E \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - Id_E) = E \Leftrightarrow u - Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Ainsi <u>u est diagonalisable si et seulement si $u = Id_E$.</u>

d) $\operatorname{Im}(u - Id_E) = \{(u - Id_E)(t) \,;\, t \in E\}$.

$(u - Id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\forall t \in E, (u - Id_E)\big((u - Id_E)(t)\big) = 0_E$.

$\forall t \in E$, $(u - Id_E)(t) \in \operatorname{Ker}(u - Id_E)$ donc <u>$\operatorname{Im}(u - Id_E) \subset \operatorname{Ker}(u - Id_E)$.</u>

Alors $\dim \operatorname{Im}(u - Id_E) \leq \dim \operatorname{Ker}(u - Id_E)$. En appliquant le théorème du rang à $u - Id_E$ il vient : $\dim E - \dim \operatorname{Ker}(u - Id_E) \leq \dim \operatorname{Ker}(u - Id_E)$.

Alors $2 \dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \geqslant \dim E = n$. Donc $\dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \geqslant \frac{n}{2}$.

Q3 Ici $\dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = n-1$

a) et b) Notons que $\dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = n-(n-1) = 1$.

Alors $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle de E.

Comme e_1 est un élément non nul de $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E)$. e_1 est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ car $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

(e_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ est de dimension $n-1$.

Le théorème de la base incomplète montre que l'on peut compléter la famille (e_1) (si nécessaire donc si $n \geqslant 3$) en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

Comme $e_1 \in \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E)$, il existe un vecteur e_n de E tel que $(u-\mathrm{Id}_E)(e_n) = e_1$.

Alors $u(e_n) = e_1 + e_n$. Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E. Comme E est de dimension n il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0_E$.

$$0_E = (u-\mathrm{Id}_E)(0_E) = (u-\mathrm{Id}_E)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u-\mathrm{Id}_E)(e_k) \overset{\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ e_k \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)}{=} \alpha_n (u-\mathrm{Id}_E)(e_n) = \alpha_n e_1.$$

Alors $0_E = \alpha_n e_1$ et $e_1 \neq 0$. Ainsi $\alpha_n = 0$. Donc $0_E = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k$.

La famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ étant libre : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et qu'ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E.

Il existe $n-1$ vecteurs $e_2, \dots, e_n$ de E tels que :
1) $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$
2) $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E
3) $u(e_n) = e_1 + e_n$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_k$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$ donc
$$M_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q4 a) $N=(n_{i,j})$ avec $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]$, $n_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } (i,j)=(1,n)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Soit $M=(m_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Posons $P=MN=(p_{i,j})$ et $Q=NM=(q_{i,j})$

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $p_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, n_{k,j} = m_{i,1}\, n_{1,j} = \begin{cases} m_{i,1} & \text{si } j=n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $q_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} n_{i,k}\, m_{k,j} = n_{i,n}\, m_{n,j} = \begin{cases} m_{n,j} & \text{si } i=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Alors :

$MN=NM \iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]$, $p_{i,j}=q_{i,j}$

$$MN=NM \iff \begin{cases} m_{1,1}=m_{n,n} \\ m_{i,1}=0 & \text{si } i\neq 1 \\ m_{n,j}=0 & \text{si } j\neq n \\ 0=0 & \text{si } i\neq 1 \text{ et } j\neq n\end{cases} \iff \begin{cases} m_{1,1}=m_{n,n}\\ \forall i\in [\![2,n]\!],\ m_{i,1}=0 \\ \forall j\in [\![1,n-1]\!],\ m_{n,j}=0\end{cases}$$

Les matrices $M=(m_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $MN=NM$ sont les matrices $M=(m_{i,j})$ qui vérifient :

$$\begin{cases} m_{1,1}=m_{n,n}\\ \forall i\in [\![2,n]\!],\ m_{i,1}=0 \\ \forall j\in [\![1,n-1]\!],\ m_{n,j}=0\end{cases}$$

- Remarque.. Ce sont donc toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est du type $\begin{pmatrix} a\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ et la $n^{\text{ème}}$ ligne du type $(0\ 0 \dots 0\ a)$.

Soit $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Reprenons $M=(m_{i,j})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

- Supposons que M commute avec N. Alors $m_{1,1}=m_{n,n}$, $\forall i\in [\![2,n]\!]$, $m_{i,1}=0$ et $\forall j\in [\![1,n-1]\!]$, $m_{n,j}=0$.

Ainsi $M=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\, E_{i,j} = m_{1,1}(E_{1,1}+E_{n,n}) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} m_{i,j}\, E_{i,j}$

• Réciproquement supposons que $M = m_{1,1}(E_{1,1}+E_{n,n}) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} m_{i,j} E_{i,j}$.
Comme $M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} E_{i,j}$ et que $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est libre :

$m_{1,1} = m_{n,n}$, $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $m_{i,1} = 0$ et $\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $m_{n,j} = 0$. Alors M commute avec N.

Ainsi $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_1 = (E_{1,1}+E_{n,n})$ et la famille $\mathcal{B}_2 = (E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n-1\\ 2\le j\le n-1}}$. Notons que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $(\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le n-1\\ 2\le j\le n-1}}$ une famille de réels telle que :

$$\alpha(E_{1,1}+E_{n,n}) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0_{M_n(\mathbb{R})}.$$

Alors $\alpha E_{1,1} + \alpha E_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Comme $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est libre on obtient $\alpha = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n-1]\!]\times[\![2,n]\!]$, $\alpha_{i,j} = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. De plus le cardinal de cette famille est $1 + (n-1)\times(n-1)$ c'est-à-dire n^2-2n+2.

Il résulte de tout ce qui précède que :

1) $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ (car c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{B}$).

2) $\mathcal{B}$ est une base de ce sous-espace vectoriel.

3) La dimension de ce sous-espace vectoriel est n^2-2n+2.

b) Rappelons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E telle que $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $u(e_k) = e_k$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$. Notons que $M_{\mathcal{B}}(u) = I_n + N$.

Soit ω l'endomorphisme de E de matrice N dans $\mathcal{B}$. $u = Id_E + \omega$.

Posons $\mathcal{C}(\omega) = \{ v \in \mathcal{L}(E) \mid \omega \circ v = v \circ \omega \}$.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. $v \in \mathcal{C}(u) \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u \Leftrightarrow (Id_E + \omega) \circ v = v \circ (Id_E + \omega)$

$v \in \mathcal{B}(u) \Leftrightarrow v + \omega \circ v = v + v \circ \omega \Leftrightarrow \omega \circ v = v \circ \omega \Leftrightarrow v \in \mathcal{B}(\omega)$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathcal{B}(u) = \mathcal{C}(\omega)}}$. Montrons que $\mathcal{B}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

- $\mathcal{B}(u) \subset \mathcal{L}(E)$
- $u \circ u = u \circ u$ donc $u \in \mathcal{B}(u)$. $\mathcal{B}(u)$ n'est pas vide.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(v_1, v_2) \in \mathcal{B}(u) \times \mathcal{B}(u)$.

  $u \circ (\lambda v_1 + v_2) = \lambda u \circ v_1 + u \circ v_2 \overset{\downarrow}{=} \lambda v_1 \circ u + v_2 \circ u = (\lambda v_1 + v_2) \circ u$; $\lambda v_1 + v_2 \in \mathcal{B}(u)$.

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (v_1, v_2) \in \mathcal{B}(u) \times \mathcal{B}(u)$, $\lambda v_1 + v_2 \in \mathcal{B}(u)$.

  ceci achève de montrer que $\underline{\mathcal{B}(u) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}$.

  Alors il en est de même pour $\mathcal{B}(\omega)$!

  $\underline{\text{Posons } \mathcal{S} = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM \}}$. Nous avons montré que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 2n + 2$.

  Montrons que $\mathcal{B}(\omega)$ est isomorphe à $\mathcal{S}$. Ainsi aurons-nous : $\dim \mathcal{B}(u) = \dim \mathcal{B}(\omega) = n^2 - 2n + 2$

  Posons $\forall v \in \mathcal{B}(\omega)$, $\varphi(v) = M_{\mathcal{B}}(v)$.

- Soit $v \in \mathcal{B}(\omega)$. $\omega \circ v = v \circ \omega$ donc $N M_{\mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}}(\omega) M_{\mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}}(\omega \circ v) \overset{v \in \mathcal{B}(\omega)}{=} M_{\mathcal{B}}(v \circ \omega) =$

  $M_{\mathcal{B}}(v) M_{\mathcal{B}}(\omega) = M_{\mathcal{B}}(v) N$. Alors $\varphi(v) = M_{\mathcal{B}}(v) \in \mathcal{S}$.

  $\underline{\varphi \text{ est une application de } \mathcal{B}(\omega) \text{ dans } \mathcal{S}}$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (v_1, v_2) \in (\mathcal{B}(\omega))^2$, $\varphi(\lambda v_1 + v_2) = M_{\mathcal{B}}(\lambda v_1 + v_2) = \lambda M_{\mathcal{B}}(v_1) + M_{\mathcal{B}}(v_2) = \lambda \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

  $\underline{\varphi \text{ est linéaire}}$.

- Soit $v \in \operatorname{Ker} \varphi$. $\varphi(v) = 0_{\mathcal{S}}$. $M_{\mathcal{B}}(v) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ donc $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

  Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi = \{ 0_{\mathcal{L}(E)} \}$. $\underline{\varphi \text{ est injective}}$.

- Soit $M \in \mathcal{S}$. Soit v l'endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

  $M_{\mathcal{B}}(\omega \circ v) = M_{\mathcal{B}}(\omega) M_{\mathcal{B}}(v) = NM \underset{M \in \mathcal{S}}{=} MN = M_{\mathcal{B}}(v) M_{\mathcal{B}}(\omega) = M_{\mathcal{B}}(v \circ \omega)$. $\omega \circ v = v \circ \omega$.

Alors $v \in \mathcal{B}(\omega)$ et $\varphi(v) = \pi_{\mathcal{B}}(v) = M$.

Donc tout élément de $\mathcal{S}$ possède un antécédent par φ dans $\mathcal{B}(\omega)$.

Ainsi φ est surjective.

Ceci achève de montrer que φ est un isomorphisme de $\mathcal{B}(\omega)$ sur $\mathcal{S}$.

Alors $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{B}(\omega) = \dim \mathcal{S} = n^2 - 2n + 2$.

$\mathcal{C}(u)$ est de dimension $n^2 - 2n + 2$ ou $(n-1)^2 + 1$.

R..

Question 1 **HEC 2008 S1** $\boxed{\text{F1}}$

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n strictement supérieur ou égal λ on considère la variable aléatoire $N_n = \frac{1}{n}\ \mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général N_n.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n \in]\lambda, +\infty[\cap \mathbb{N}$. $nN_n = \mathrm{Inf}\{i\,;\, X_{i,n} = 1\}$. $(nN_n)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. indépendance

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(nN_n = k) = P(\{X_{1,n}=0\} \cap \{X_{2,n}=0\} \cap \dots \{X_{k-1,n}=0\} \cap \{X_{k,n}=1\}) = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}\frac{\lambda}{n}$

$nN_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Notons F_n la fonction de répartition de N_n.

$\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$, $F_n(x) = 0$. Nous retiendrons que $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) = 0$.

Soit $x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. $F_n(x) = P(N_n \leq x) = P(nN_n \leq nx) = \sum_{1 \leq k \leq nx} P(nN_n = k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} P(nN_n = k)$

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}\frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}$$

Notons que si $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$, $\mathrm{Ent}(nx) = 0$ donc $F_n(x) = 0$ et $1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)} = 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$\mathrm{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (nx)\left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda x$; $\lim_{n \to +\infty}\left(\mathrm{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) = -\lambda x$.

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(1-e^{\mathrm{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\right) = 1-e^{-\lambda x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>La suite de terme général N_n converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.</u>

R