SUJET N°3 HEC 2008 S3

■ 1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Rappeler la définition d'un vecteur propre, d'une valeur propre.
On note E l'espace vectoriel réel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note Id_E, l'application identité de E. Soit Φ l'application définie sur E par

$$\Phi(f)(x) = f(x) + f'(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2° a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) La fonction non nulle $u \in E$ est un vecteur propre de Φ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(u) = \lambda u$. Déterminer les vecteurs propres de Φ.

c) Soit $f \in E$. Etablir la formule suivante

$$f(x) = f(0)\, e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t \,(f(t) + f'(t))\, dt.$$

d) En déduire que l'endomorphisme Φ est surjectif.

e) Déterminer l'ensemble des fonctions f qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'égalité : $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3° On considère une fonction g de E qui admet une limite nulle en $+\infty$.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que g est bornée sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Prouver que la borne supérieure de l'ensemble $\Omega_a = \{|g(x)| \,/ x \in [a, +\infty[\}$ existe ; dans la suite on note $h(a)$ cette borne supérieure.

b) Démontrer que $h(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$.

c) Justifier, en utilisant certaines des questions précédentes, l'existence d'une unique fonction $f \in E$ qui vérifie :

$$f(x) + f'(x) = g(x) \text{ et } f(0) = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) Soit $a \in]0, +\infty[$ et $x > a$, établir l'inégalité suivante

$$\left| \int_0^x e^{t-x} g(t)dt \right| \leqslant e^{a-x} h(0) + h(a).$$

En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

■ 2 - *Exercice sans préparation*

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.
Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

1° Calculer P_1, P_2, P_3.

2° Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.

HEC 2008 S3 Correction de l'exercice

Q1 * f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est valeur propre de f si $\text{Ker}(f-\lambda Id_E) \neq \{0_E\}$ autrement dit s'il existe un élément x de E tel que : $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$. x est alors un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

* A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est valeur propre de A s'il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX = \lambda X$, X est alors un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

(ou λ est valeur propre de A si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.)

Q2 a) • Soit f un élément de E. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour f'. Ainsi $f+f'$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $f+f'$ appartient à E.

$\forall f \in E,\ \phi(f) \in E$. $\underline{\phi \text{ est une application de } E \text{ dans } E.}$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E^2$.

$\phi(\lambda f+g) = \lambda f+g+(\lambda f+g)' = \lambda f+g+\lambda f'+g' = \lambda(f+f')+g+g' = \lambda\phi(f)+\phi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \phi(\lambda f+g) = \lambda\phi(f)+\phi(g)$. $\underline{\phi \text{ est linéaire}}$.

Ainsi $\underline{\phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

b) Soit u un élément de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\phi(u) = \lambda u \iff u+u' = \lambda u \iff u' - (\lambda-1)u = 0_E$. $x \mapsto (\lambda-1)x$ est une primitive de $x \mapsto \lambda-1$ sur $\mathbb{R}$. Le cours donne alors :

$\phi(u) = \lambda u \iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = C\, e^{(\lambda-1)x}$.

Notons que pour tout c dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^{(\lambda-1)x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc appartient à E.

Ainsi λ est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto e^{(\lambda-1)x}$.

R.

Ainsi 1) $\underline{\underline{Sp\ \phi = \mathbb{R}}}$

2) $\underline{\underline{\text{Pour tout réel } \lambda,\ SEP(\phi,\lambda) \text{ est la droite vectorielle engendrée}}}$

$\underline{\underline{\text{par la fonction } f_\lambda \text{ définie par: } \forall x \in \mathbb{R},\quad f_\lambda(x) = e^{(\lambda-1)x}.}}$ ⊛ 3°/ ↓

c) Soit f un élément de E. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ h_f(x) = e^x . f(x)$.

h_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'_f(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\,dt = \int_0^x h'_f(t)\,dt = h_f(x) - h_f(0) = e^x f(x) - e^0 f(0)$.

En multipliant par e^{-x} il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\,dt = f(x) - f(0) e^{-x}$.

Donc $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\, e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\,dt \text{ et ceci pour tout } f \text{ dans } E.}}$

d) Soit g un élément de E. Ce qui précède nous incite à poser :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t)\,dt$ et à montrer que : $f \in E$ et $\phi(f) = g$.

$t \mapsto e^t g(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \int_0^x e^t g(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car c'est la primitive sur $\mathbb{R}$ qui
de $x \mapsto e^x g(x)$
prend la valeur 0 en 0. Alors $f : x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t g(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\underline{f \text{ appartient à } E}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -e^{-x} \int_0^x e^t g(t)\,dt + e^{-x} (e^x g(x)) = -f(x) + g(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f'(x) = g(x)$. Ainsi $\underline{\phi(f) = g}$. f est alors un antécédent de g par ϕ

dans E.

$\forall g \in E,\ \exists f \in E,\ \phi(f) = g$. $\underline{\underline{\phi \text{ est surjectif.}}}$

---

* 3°/ un élément u de E est vecteur propre de ϕ si et seulement si :

$\exists C \in \mathbb{R}^*,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = C\, e^{(\lambda-1)x}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$

$x \mapsto \frac{x}{2}$, $x \mapsto -\frac{x}{2}$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ et $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors L est un élément de E.

<u>Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = L$.</u> Montrons que $\mathcal{S}$ est contenu dans E. Soit $f \in \mathcal{S}$.

Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ par définition de $\mathcal{S}$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$f \in \mathcal{S}$ donc $f + f' = L$. Alors $f' = L - f$. Comme L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que par hypothèse de récurrence f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, par différence f' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ceci achève la récurrence.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $f \in E$.

Par conséquent <u>$\mathcal{S} \subset E$.</u> Cherchons alors les éléments f de E tels que $f + f' = L$.

Cela revient à chercher les éléments f de E tels que $\phi(f) = L$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_L(x) = e^{-x}\int_0^x e^t L(t)\,dt$. Nous avons vu dans d) que $\phi(\hat{f}_L) = L$.

Alors <u>$\hat{f}_L \in \mathcal{S}$.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\hat{f}_L(x) = e^{-x}\int_0^x e^t\left[\frac{1}{2}(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})\right]dt = \frac{1}{2}e^{-x}\left[\int_0^x (e^{3t/2} + e^{t/2})\,dt\right] = \frac{1}{2}e^{-x}\left[\frac{2}{3}e^{3t/2} + 2e^{t/2}\right]_0^x$$

$$\hat{f}_L(x) = e^{-x}\left[\frac{1}{3}e^{3x/2} + e^{x/2} - \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{1}{3}e^{x/2} + e^{-x/2} - \frac{4}{3}e^{-x}.$$ <u>$\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_L(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - \frac{4}{3}e^{-x}$.</u>

Soit $f \in E$. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \phi(f) = L \Leftrightarrow \phi(f) = \phi(\hat{f}_L) \Leftrightarrow \phi(f - \hat{f}_L) = 0_E \Leftrightarrow f - \hat{f}_L \in \operatorname{Ker}\phi$.

Rappelons que $Sp\,\phi = \mathbb{R}$ et que $\forall \lambda \in Sp\,\phi$, $SEP(\phi,\lambda) = Vect(f_\lambda)$ où f_λ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = e^{(\lambda-1)x}$.

Alors $Ker\,\phi = SEP(\phi,0) = Vect(f_0)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{-x}$.

Donc $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f - \hat{f}_L \in Vect(f_0) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ f - \hat{f}_L = c f_0 \Leftrightarrow f = \hat{f}_L + c f_0$.

$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - \frac{4}{3} e^{-x} + c e^{-x}$.

$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} + d e^{-x}$ ($c \mapsto c - \frac{4}{3}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$).

<u>L'ensemble des fonctions f qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'égalité :</u>

<u>$f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ est : $\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} + d e^{-x}\}$.</u>

Q3 Soit g une fonction de E de limite nulle à $+\infty$.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > A_\varepsilon \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$.

En particulier $\exists A_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > A_1 \Rightarrow |g(x)| < 1$.

<u>1er cas..</u> $a > A_1$. $\forall x \in [a, +\infty[$, $|g(x)| < 1$.

Alors $\mathcal{R}_a$ est majorée par 1. Ainsi $\mathcal{R}_a$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $\mathcal{R}_a$ possède une borne supérieure.

<u>2ème cas..</u> $a < A_1$. g est continue sur le segment $[a, A_1]$ donc g est bornée sur ce segment. $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, A_1], |g(x)| \leq M$.

Alors $\forall x \in [a, +\infty[$, $|g(x)| \leq \max(1, M)$.

$\mathcal{R}_a$ est de nouveau une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

$\mathcal{R}_a$ possède une borne supérieure.

<u>Pour tout a dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_a$ possède une borne supérieure que nous noterons $h(a)$.</u>

b) Notons en utilisant la définition que $\lim\limits_{a \to +\infty} h(a) = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > A_\varepsilon \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Soit a un élément de $]A_\varepsilon, +\infty[$.

$\forall x \in \Omega_a$, $x \geq a$. Donc $\forall x \in \Omega_a$, $x > A_\varepsilon$. Alors $\forall x \in \Omega_a$, $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\frac{\varepsilon}{2}$ est un majorant de Ω_a. Alors $h(a) = \sup \Omega_a \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\Omega_a \subset \mathbb{R}_+$, $h(a) \geq 0$. Alors $|h(a)| = h(a) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Donc $\forall a \in]A_\varepsilon, +\infty[$, $|h(a)| < \varepsilon$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $a > A_\varepsilon \Rightarrow |h(a)| < \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > A_\varepsilon \Rightarrow |h(a)| < \varepsilon$. Alors $\lim\limits_{a \to +\infty} h(a) = 0$.

c) Vu ϕ est surjective donc $\exists \hat{f}_g \in E$, $\phi(\hat{f}_g) = g$.

Soit $f \in E$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = g(x)$ et $f(0) = 0$

$\Updownarrow$

$\phi(f) = g$ et $f(0) = 0$

$\Updownarrow$

$\phi(f) = \phi(\hat{f}_g)$ et $f(0) = 0$

$\Updownarrow$

$\phi(f - \hat{f}_g) = 0_E$ et $f(0) = 0$

$\Updownarrow$

$f - \hat{f}_g \in \mathrm{Ker}\, \phi$ et $f(0) = 0$

$\Updownarrow$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $f - \hat{f}_g = \alpha f_0$ et $f(0) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{-x}$).

$\Updownarrow$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $f = \hat{f}_g + \alpha f_0$ et $\hat{f}_g(0) + \alpha f_0(0) = 0$

$\Updownarrow$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $f = \hat{f}_g + \alpha f_0$ et $\alpha = -\hat{f}_g(0)$ ($f_0(0) = 1$).

$\Updownarrow$

$f = \hat{f}_g - \hat{f}_g(0) f_0$

Ainsi il existe une unique fonction f de E telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = g(x)$ et $f(0) = 0$

V2 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$. Nous avons vu dans d] que $f \in E$ et $\phi(f) = g$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = g(x)$. De plus $f(0) = 0$.

Supposons que h soit une seconde fonction de E telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) + h'(x) = g(x)$ et $h(0) = 0$

Alors $\phi(h) = g = \phi(f)$. $\phi(h-f) = 0_E$. $h - f \in \operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Vect}(f_0)$.

$\exists \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) - f(x) = \beta f_0(x) = \beta e^{-x}$.

Alors $\beta = \beta e^{-0} = h(0) - f(0) = 0 - 0 = 0$. $\beta = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) - f(x) = 0$. Ainsi $h = f$.

Donc $f : x \mapsto e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$ est l'unique fonction de E qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = g(x)$ et $f(0) = 0$.

d] Soit $a \in]0, +\infty[$. Soit $x \in]a, +\infty[$.

$$\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \underset{x \geq 0}{\leq} \int_0^x |e^{t-x} g(t)|\,dt = \int_0^x e^{t-x}|g(t)|\,dt = \int_0^a e^{t-x}|g(t)|\,dt + \int_a^x e^{t-x}|g(t)|\,dt.$$

$\forall t \in [0,a]$, $|g(t)| \leq h(0)$, $\forall t \in [a,x]$, $|g(t)| \leq h(a)$ et $\forall t \in [0,x]$, $e^{t-x} \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0,a]$, $e^{t-x}|g(t)| \leq h(0)e^{t-x}$ et $\forall t \in [a,x]$, $e^{t-x}|g(t)| \leq h(a)e^{t-x}$.

Ainsi $\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq h(0)\int_0^a e^{t-x}\,dt + h(a)\int_a^x e^{t-x}\,dt$.

$$\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq h(0)\left[e^{t-x}\right]_0^a + h(a)\left[e^{t-x}\right]_a^x = h(0)\left(e^{a-x} - e^{-x}\right) + h(a)\left(1 - e^{a-x}\right).$$

Or $h(0) \geq 0$, $e^{a-x} - e^{-x} \leq e^{a-x}$, $h(a) \geq 0$ et $1 - e^{a-x} \leq 1$.

Donc $\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq h(0)e^{a-x} + h(a)$.

$\forall a \in]0,+\infty[$, $\forall x \in]a, +\infty[$. $\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq e^{a-x}h(0) + h(a)$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt = \int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt$.

Alors $\forall a \in]0,+\infty[$, $\forall x \in]a,+\infty[$, $|f(x)| \leq e^{a-x} h(0) + h(a)$.

Montrons alors en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{a\mapsto+\infty} h(a) = 0$ donc $\exists \beta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > \beta_\varepsilon \Rightarrow h(x) = |h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Prenons un élément a appartenant à $]\beta_\varepsilon,+\infty[$. Alors $h(a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

donc $\forall x \in]a,+\infty[$, $|f(x)| \leq e^{a-x} h(0) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (e^{a-x} h(0)) = 0$. donc $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > \delta_\varepsilon \Rightarrow e^{a-x} h(0) = |e^{a-x} h(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > a$ et $x > \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < e^{a-x} h(0) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $A_\varepsilon = \max(a, \delta_\varepsilon)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Notons que $A_\varepsilon > 0$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$.

Question 3 **HEC 2008 S3** F1

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.

Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

Q1. Calculer P_1, P_2 et P_3.

Q2. Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1.. Notons pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, F_i l'événement la pièce donne face au i^{e} lancer.

- $P_1 = 1$
- $P_2 = 1 - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
- $P_3 = 1 - P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3) - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) = 1 - 3 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Q2. Notons S_n l'événement ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des n premiers lancers. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ est un système complet d'événements.

$$P(S_{n+2}) = P(F_1 \cap S_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2 \cap S_{n+2}) + \underbrace{P(P_1 \cap P_2 \cap S_{n+2})}_{=0}.$$

$$P(S_{n+2}) = P(F_1)\underbrace{P_{F_1}(S_{n+2})}_{P(S_{n+1})} + P(P_1 \cap F_2)\underbrace{P_{P_1 \cap F_2}(S_{n+2})}_{P(S_n)} = \frac{1}{2}P(S_{n+1}) + \frac{1}{4}P(S_n)$$

$\underline{P_{n+2} = \frac{1}{2}P_{n+1} + \frac{1}{4}P_n}$. L'équation caractéristique associée à cette récurrence linéaire d'ordre 2 est $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0$.

Ses deux racines sont : $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Notons que $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right| < 1$.

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$. Alors $\lim_{n \to +\infty} P_n = 0$.

Exercice.. Notez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$

2 ou n-1 !!

R