SUJET N°6

■ *1 - Exercice*

1° *Question de Cours:* Donner la définition et les propriétés des projecteurs.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n ($n \geqslant 2$). On considère un endomorphisme u de E vérifiant

$$u^2 - 2u + Id_E = 0.$$

2° a) Montrer que u est un automorphisme de E et préciser u^{-1}. Montrer que 1 est la seule valeur propre de u.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et en déduire que la dimension de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ est supérieure ou égale à $n/2$.

3° Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer les équivalences suivantes :

- $p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$,
- $p \circ q = q \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$,

4° Soit v un endomorphisme de E.

a) On suppose que $v^2 = 0$. Soient S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, v$ dans E et p la projection sur $\mathrm{Im}\, v$ parallèlement à S. On pose $q = p - v$. Montrer que q est un projecteur et que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

b) Montrer que $v^2 = 0$ si et seulement si il existe deux projecteurs p et q de E tels que $v = p - q$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

5° Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q_1 de E tels que $u = p + q_1$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, q_1$.

■ *2 - Exercice sans préparation*

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit θ un réel strictement positif et pour tout réel $\lambda > 0$, X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$.

1° Montrer que $\dfrac{X_\lambda - \lambda\theta}{\lambda}$ converge en probabilité vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

2° En déduire pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda\theta} \sum_{k \leqslant \lambda x} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}$.

R.

HEC 2008 S6 Correction de l'exercice.

(Q1) E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

- On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.
- Soient F et G ~~deux~~ sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
  La projection sur F parallèlement à G est l'application p de E dans E qui à tout élément x de E s'écrivant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe y.
  → p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$ donc p est un projecteur.
  → $\mathrm{Ker}\, p = G$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$.
- projecteur p de E est la projection sur $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.
- les projecteurs de E sont les projections de E.

(Q2) a) $\mathrm{Id}_E = 2u - u^2 = u \circ (2\mathrm{Id}_E - u)$ et $\mathrm{Id}_E = 2u - u^2 = (2\mathrm{Id}_E - u) \circ u$.
ceci suffit pour dire que u est bijective et que $u^{-1} = 2\mathrm{Id}_E - u$.
Ainsi <u>u est un automorphisme de E et $u^{-1} = 2\mathrm{Id}_E - u$.</u>

$X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de u dont la seule racine est 1.
Ainsi $\mathrm{Sp}\, u \subset \{1\}$.

$u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u$ donc $(u - \mathrm{Id}_E)^2 = u^2 - 2u + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>1er cas.</u> $u = \mathrm{Id}_E$. Alors 1 est valeur propre de u ! donc $\mathrm{Sp}\, u = \{1\}$.

<u>2e cas.</u> $u \neq \mathrm{Id}_E$. $u - \mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Il existe alors un élément x de E tel que $(u - \mathrm{Id}_E)(x) \neq 0_E$. Posons $y = (u - \mathrm{Id}_E)(x)$.
$y \neq 0_E$ et $(u - \mathrm{Id}_E)(y) = (u - \mathrm{Id}_E)^2(x) = 0_E$. Ainsi $1 \in \mathrm{Sp}\, u$.
donc ici encore $\mathrm{Sp}\, u = \{1\}$.

<u>1 est la seule valeur propre de u.</u>

b] $(u-Id_E)\circ(u-Id_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\mathrm{Im}(u-Id_E)=\{(u-Id_E)(x)\,;\,x\in E\}$.

Alors $\forall x\in E$, $(u-Id_E)((u-Id_E)(x))=0_E$

donc $\forall y\in \mathrm{Im}(u-Id_E)$, $(u-Id_E)(y)=0_E$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Im}(u-Id_E)\subset \mathrm{Ker}(u-Id_E)}$.

Alors $\dim \mathrm{Im}(u-Id_E)\leq \dim \mathrm{Ker}(u-Id_E)$. Le théorème du rang permet alors d'écrire que $\dim E-\dim \mathrm{Ker}(u-Id_E)\leq \dim \mathrm{Ker}(u-Id_E)$.

Par conséquent $2\dim \mathrm{Ker}(u-Id_E)\geq \dim E=n$. $\dim \mathrm{Ker}(u-Id_E)\geq n/2$.

Ainsi la dimension de $\mathrm{Ker}(u-Id_E)$ est supérieure ou égale à $n/2$.

Q3 • ▲ Supposons que $p\circ q=p$.

$\forall x\in \mathrm{Ker}\,q$, $p(x)=p(q(x))=p(0_E)=0_E$. $\forall x\in \mathrm{Ker}\,q$, $x\in \mathrm{Ker}\,p$. $\mathrm{Ker}\,q\subset \mathrm{Ker}\,p$.

▲ Réciproquement supposons que $\mathrm{Ker}\,q\subset \mathrm{Ker}\,p$.

Soit $x\in E$. $\exists!(x_1,x_2)\in \mathrm{Im}\,q\times \mathrm{Ker}\,q$, $x=x_1+x_2$.

Notons que $x_1=q(x)$. Alors $x=q(x)+x_2$.

$p(x)=p(q(x))+p(x_2)=p(q(x))+0_E=p(q(x))$.
$\uparrow$ $x_2\in \mathrm{Ker}\,q$ et $\mathrm{Ker}\,q\subset \mathrm{Ker}\,p$

donc $\forall x\in E$, $p(q(x))=p(x)$; $p\circ q=p$.

Finalement $\underline{p\circ q=p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,q\subset \mathrm{Ker}\,p}$. De même $\underline{q\circ p=q \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,p\subset \mathrm{Ker}\,q}$.

• ▲ Supposons que $p\circ q=q$. Rappelons que $\mathrm{Im}\,p=\mathrm{Ker}(p-Id_E)$.

$\forall x\in E$, $p(q(x))=q(x)$ donc $\forall x\in E$, $q(x)\in \mathrm{Ker}(p-Id_E)$.

Alors $\mathrm{Im}\,q\subset \mathrm{Ker}(p-Id_E)$ donc $\mathrm{Im}\,q\subset \mathrm{Im}\,p$.

▲ Réciproquement supposons que $\mathrm{Im}\,q\subset \mathrm{Im}\,p$

$\forall y\in \mathrm{Im}\,q$, $y\in \mathrm{Im}\,p$. $\forall y\in \mathrm{Im}\,q$, $y\in \mathrm{Ker}(p-Id_E)$. $\forall y\in \mathrm{Im}\,q$, $p(y)=y$.

Alors $\forall x\in E$, $p(q(x))=q(x)$; $p\circ q=q$.

Ainsi $p\circ q = q \iff \mathrm{Im}\,q \subset \mathrm{Im}\,p$. De même $q\circ p = p \iff \mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Im}\,q$.

Q4 a) • q est un endomorphisme de E comme différence de deux endomorphismes de E.

• $q\circ q = (p-v)\circ(p-v) = p^2 - p\circ v - v\circ p + v^2 = p - p\circ v - v\circ p$ car $p^2 = p$ et $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\mathrm{Im}\,v = \mathrm{Im}\,p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. Alors $\forall y \in \mathrm{Im}\,v$, $p(y) = y$. Donc $\forall x \in E$, $p(v(x)) = v(x)$.

Ainsi $p\circ v = v$.

Soit $x \in E$. $p(x) \in \mathrm{Im}\,v$. $\exists t \in E$, $p(x) = v(t)$. Alors $v(p(x)) = v^2(t) = 0_E$.

$\forall x \in E$, $v(p(x)) = 0_E$. $v\circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $q\circ q = p - p\circ v - v\circ p = p - v - 0_{\mathcal{L}(E)} = q$.

$q \in \mathcal{L}(E)$ et $q\circ q = q$. q est un projecteur.

$p\circ q = p\circ(p-v) = p^2 - p\circ v = p - v = q$. $p\circ q = q$.

$q\circ p = (p-v)\circ p = p^2 - v\circ p = p - 0_{\mathcal{L}(E)} = p$. $q\circ p = p$.

p et q sont deux projecteurs tels que $p\circ q = q$ et $q\circ p = p$.

Alors Q3 donne $\mathrm{Im}\,q \subset \mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Im}\,q$. Ainsi $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,q$.

Q b) * Nous venons de voir que si $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors il existe deux projecteurs p et q tels que $\begin{cases} q = p - v, \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,q \end{cases}$ donc tels que $\begin{cases} v = p - q \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,q \end{cases}$.

* Montrons la réciproque. Supposons qu'il existe deux projecteurs p et q de E tels que $\begin{cases} v = p - q \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,q \end{cases}$. Montrons que $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Comme $\mathrm{Im}\,q \subset \mathrm{Im}\,p$ (resp. $\mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Im}\,p$) : $p\circ q = q$ (resp. $q\circ p = p$) d'après Q3.

Alors $v^2 = v\circ v = (p-q)\circ(p-q) = p^2 - p\circ q - q\circ p + q^2 = p - q - p + q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si il existe deux projecteurs p et q de E tels que $v = p - q$ et $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,q$.

(Q5) Rappelons que $(u - Id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors d'après Q4 il existe deux projecteurs p et q de E tels que $u - Id_E = p - q$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.
$u = p + Id_E - q$. Posons $q_1 = Id_E - q$. $u = p + q_1$.

q est un projecteur ; q est encore la projection sur $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\,(q - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, q$. Alors $q_1 = Id_E - q$ est la projection sur $\mathrm{Ker}\, q$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, q$.

Ainsi q_1 est un projecteur et $\mathrm{Ker}\, q_1 = \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Im}\, p$.

Donc il existe deux projecteurs p et q_1 de E tels que $u = p + q_1$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, q_1$.

R..

Question 6 **HEC 2008 S6** $\boxed{\textbf{F1}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement postif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\,\theta}\sum_{k\leqslant n\,x}\frac{(n\,\theta)^k}{k!}\right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$!!

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \dfrac{X_n - n\theta}{n}$.

X_n possède une espérance et une variance qui valent $n\theta$.

Alors T_n possède une espérance et une variance. $E(T_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_n) - n\theta\right) = 0$ et

$V(T_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \dfrac{\theta}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$0 \leqslant P(|T_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\theta}{n\varepsilon^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta}{n\varepsilon^2} = 0$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(P(|T_n - 0|\geqslant\varepsilon)\right) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Q2 Si $x\in\mathbb{R}_-^*$, la somme est nulle et la suite converge vers 0. Supposons que $x\in\,]0,+\infty[-\{\theta\}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u_n = e^{-n\theta}\displaystyle\sum_{k\leqslant nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}$.

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(nx)} P(X_n = k) = P(X_n \leqslant nx) = P\left(\frac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right)$.

1er cas... $x - \theta < 0$. Alors $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right\}$

Alors $0 \leqslant u_n \leqslant P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right)$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2ème cas... $x - \theta > 0$ $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right\} \subset \left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \geqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right\}$.

$0 \leqslant P\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right) = 1 - u_n \leqslant P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right)$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\theta}\sum_{k\leqslant nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta\end{cases}$

Exercice... Notez que cela donne la convergence en loi de $\left(\frac{X_n}{n}\right)$ vers θ.

R