■ 1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Enoncer le théorème du rang.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On définit u^n pour tout n entier naturel par : $u^0 = Id_E$ et pour $n \geqslant 1, u^n = u^{n-1} \circ u$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \operatorname{Ker} u^n$, et $d_n = \dim K_n$; on note aussi $L_n = \operatorname{Im} u^n$.

2° Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion. Que dire de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = d_{n+1} - d_n$. Montrer que K_{n+1} est l'image réciproque par u^n de $\operatorname{Ker} u$, et déterminer l'image directe de K_{n+1} par u^n. En déduire que $p_n = \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u)$, puis que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4° On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $K_n = K_N$.

5° On note $v = u \circ u$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $q_n = \dim(\operatorname{Ker} v^{n+1}) - \dim(\operatorname{Ker} v^n)$. Exprimer q_n en fonction des termes de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

6° Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $v : E \longrightarrow E$ l'endomorphisme défini, pour tout polynôme P, par :

$$v(P) = P(0)X^2 + P'(0).$$

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'endomorphisme $u : E \longrightarrow E$ tel que $v = u \circ u$.

■ 2 - *Exercice sans préparation*

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère n variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes $X_1, \ldots, X_n$. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega) \ldots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \ldots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

1° Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathbb{P}([Y_k \leqslant x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.$$

2° En déduire que Y_k admet une densité qu'on explicitera sans signe $\sum$.

HEC 2008 S 7 Correction de l'exercice.

Q1 Soit g une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E_1 dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E_2.

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- soit $x \in K_n$. $u^n(x) = 0_E$; $u^{n+1}(x) \overset{u^{n+1} = u \circ u^n}{=} u(0_E) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker} u^{n+1}$; $x \in K_{n+1}$
- Soit $x \in L_{n+1}$. $\exists t \in E$, $x = u^{n+1}(t)$; $x = u^n(u(t))$ donc $x \in \operatorname{Im} u^n$; $x \in L_n$.

$\forall x \in K_n$, $x \in K_{n+1}$ et $\forall x \in L_{n+1}$, $x \in L_n$. Alors $K_n \subset K_{n+1}$ et $L_{n+1} \subset L_n$.

donc <u>la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.</u>

Q3 Soit $x \in E$

$x \in (u^n)^{-1}(\operatorname{Ker} u) \Leftrightarrow u^n(x) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow u(u^n(x)) = 0_E \Leftrightarrow u^{n+1}(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in K_{n+1}$.

Ainsi <u>l'image réciproque par u^n de $\operatorname{Ker} u$ est K_{n+1}.</u>

Soit $x \in E$.

- Supposons que $x \in u^n(K_{n+1})$. $\exists t \in K_{n+1}$, $x = u^n(t)$.

  Alors $x \in \operatorname{Im} u^n$ et $u(x) = u^{n+1}(t) = 0_E$. donc $x \in \operatorname{Im} u^n \cap \operatorname{Ker} u$. $x \in L_n \cap \operatorname{Ker} u$.
- Réciproquement soit $x \in L_n \cap \operatorname{Ker} u$. $\exists t \in E$, $x = u^n(t)$ et $u(x) = 0_E$.

  Alors $u^{n+1}(t) = u(u^n(t)) = u(x) = 0_E$. $t \in K_{n+1}$ et $x = u^n(t)$ donc $x \in u^n(K_{n+1})$.

Finalement $u^n(K_{n+1}) = L_n \cap \operatorname{Ker} u$

<u>L'image directe de K_{n+1} par u^n est $L_n \cap \operatorname{Ker} u$.</u>

Soit f l'application de K_{n+1} dans E définie par $\forall x \in K_{n+1}$, $f(x) = u^n(x)$. Autrement dit f est la restriction de u^n à K_{n+1}.

f est linéaire car u^n est linéaire.

$\operatorname{Ker} f = \{x \in K_{n+1} \mid f(x) = 0_E\} = \{x \in K_{n+1} \mid u^n(x) = 0_E\} = K_{n+1} \cap K_n \overset{K_n \subset K_{n+1}}{=} K_n$.

$\operatorname{Im} f = f(K_{n+1}) = u^n(K_{n+1}) = L_n \cap \operatorname{Ker} u$.

le théorème du rang appliqué à f donne :

$d_{n+1} = \dim K_{n+1} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim K_n + \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u) = d_n + \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u)$.

Alors $p_n = d_{n+1} - d_n = \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} \subset L_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} \cap \operatorname{Ker} u \subset L_n \cap \operatorname{Ker} u$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \dim(L_{n+1} \cap \operatorname{Ker} u) \leq \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u) = p_n$.

Ainsi la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q4 Supposons qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

$\boxed{V1}$ → Montrons par récurrence que $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ K_n = K_N$ (méthode standard qui n'utilise pas Q3).

- La propriété est vraie pour $n = N$!
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![N, +\infty[\![$ et montrons-la pour $n+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que $K_n = K_N$. Montrons que $K_{n+1} = K_N$.

→ $K_N = K_n \subset K_{n+1}$ donc $K_N \subset K_{n+1}$.

→ Montrons que $K_{n+1} \subset K_N$. Soit $x \in K_{n+1}$. $u^n(u(x)) = u^{n+1}(x) = 0_E$.

Alors $u(x) \in K_n$. Donc $u(x) \in K_N$. Ainsi $u^{N+1}(x) = u^N(u(x)) = 0_E$.

Par ~~conséquent~~ $x \in K_{N+1}$. Or $K_{N+1} = K_N$ donc $x \in K_N$.

$\forall x \in K_{n+1},\ x \in K_N$. $K_{n+1} \subset K_N$.

Alors $K_{n+1} = K_N$ et la récurrence s'achève.

S'il existe un élément N de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$ alors $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ K_n = K_N$.

$\boxed{V2}$ → On montre que $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ K_n = K_N$ en utilisant la décroissance de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$K_N = K_{N+1}$. Alors $p_N = \dim K_{N+1} - \dim K_N = 0$.

Or la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ p_n \leq p_N = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n \subset K_{n+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \dim K_n \leq \dim K_{n+1} = d_{n+1}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = d_{n+1} - d_n \geq 0$.

Ainsi $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ 0 \leq p_n \leq 0$. $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ p_n = 0$ ou $d_{n+1} = d_n$.

Soit $n \in [\![N, +\infty[\![$. $K_n \subset K_{n+1}$ et $\dim K_n = d_n = d_{n+1} = \dim K_{n+1}$. Alors $K_n = K_{n+1}$.

$\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $K_n = K_{n+1}$. Alors la suite $(K_n)_{n \in [\![N,+\infty[\![}$ est constante.

Ainsi $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $K_n = K_N$.

Exercice 1.. Montrer qu'il existe un élément N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

2.. Montrer que si N appartient à $\mathbb{N}$ et si $K_N = K_{N+1}$ alors $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $L_n = L_N$.

3.. Montrer que si N appartient à $\mathbb{N}$ et si $K_N = K_{N+1}$ alors $E = K_N \oplus L_N$.

Voir une correction à la fin.

(Q5) Soit $n \in \mathbb{N}$. $q_n = \dim \operatorname{Ker} v^{n+1} - \dim \operatorname{Ker} v^n = \dim \operatorname{Ker} u^{2n+2} - \dim \operatorname{Ker} u^{2n} = d_{2n+2} - d_{2n}$.

$q_n = d_{2n+2} - d_{2n+1} + d_{2n+1} - d_{2n} = p_{2n+1} + p_{2n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = p_{2n+1} + p_{2n}$.

(Q6) Soit $P \in E = \mathbb{R}_4[X]$. $P \in \operatorname{Ker} v \iff P(0)X^2 + P'(0) = 0_E \overset{(1, X^2) \text{ est libre}}{\iff} P(0) = P'(0) = 0$.

$P \in \operatorname{Ker} v \iff 0$ est une racine d'ordre au moins 2 de $P \iff X^2$ divise P.

$P \in \operatorname{Ker} v \iff \exists\, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = X^2 Q \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $P = X^2(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + cX$.

Ainsi $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Vect}(X^2, X^3, X^4)$. De plus (X, X^2, X^3) est une famille libre de E comme sous famille de la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E. Donc $\dim \operatorname{Ker} v = 3$.

$\forall P \in E$, $v^2(P) = v(v(P)) = v(P'(0)X^2 + P'(0)) = P'(0)v(X^2) + v(P'(0))$.

$v(X^2) = 0$ car X^2 et sa dérivée s'annulent en 0. $v(P'(0)) = P'(0)X^2$ car $P'(0)$ est un polynôme constant.

Alors $\forall P \in E$, $v^2(P) = P'(0)X^2$. $\forall P \in E$, $P \in \operatorname{Ker} v^2 \iff P'(0) = 0$.

Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. $P' = 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d$.

$P \in \operatorname{Ker} v^2 \iff P'(0) = 0 \iff d = 0$.

Donc $\operatorname{Ker} v^2 = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 + e \,;\, (a,b,c,e) \in \mathbb{R}^4\} = \operatorname{Vect}(1, X^2, X^3, X^4)$.

$\dim \operatorname{Ker} v^2 = 4$ car $(1, X^2, X^3, X^4)$ est une famille libre comme sous-famille de la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E

$\forall P \in E$, $v^3(P) = v(v^2(P)) = v(P'(0)X^2) = P'(0)v(X^2) = 0_E$. $v^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi dim Ker $v^3 = 5$.

Alors $q_0 = \dim \operatorname{Ker} v - \dim \operatorname{Ker} v^0 = 3 - 0 = 3$; $q_1 = \dim \operatorname{Ker} v^2 - \dim \operatorname{Ker} v = 4 - 3 = 1$ et
($v^0 = Id_E$)

$q_2 = \dim \operatorname{Ker} v^3 - \dim \operatorname{Ker} v^2 = 5 - 4 = 1$.

Supposons qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $u^2 = v$ et reprenons les notations des questions précédentes.

$3 = q_0 = p_1 + p_0$; $1 = q_1 = p_3 + p_2$; $1 = q_2 = p_5 + p_4$.

Rappelons que $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5$ d'après Q3.

$1 = p_3 + p_2 \geq 2p_3$. Donc $p_3 \in \mathbb{N}$ et $p_3 \leq \frac{1}{2}$. Alors $p_3 = 0$. $0 = p_3 \geq p_4 \geq p_5 \geq 0$.

Par conséquent $p_4 = p_5 = 0$. Donc $1 = q_2 = p_5 + p_4 = 0 + 0 = 0$!

Ainsi il n'existe pas d'endomorphisme u de E tel que $u^2 = v$.

Correction de l'exercice de la page 3.

1.. Montrons qu'il existe un élément N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = \dim K_n \leq \dim K_{n+1} = d_{n+1}$.

$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Supposons qu'il n'existe pas N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_N \subsetneq K_{N+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = \dim K_n < \dim K_{n+1} = d_{n+1}$.

Ainsi $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Notons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n < d_{n+1}$.

Posons $r = \dim E$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n \in [\![0, r]\!]$. Alors $d_0, d_1, \dots, d_{r+1}$ sont $r+2$ éléments distincts de $[\![0, r]\!]$ qui a pour cardinal $r+1$!!

Ainsi il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$. Alors $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $K_n = K_N$.

Montrons que $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $L_n = L_N$.

Soit $n \in [\![N, +\infty[\![$. $K_n = K_N$ donc $\dim K_n = \dim K_N$.

Alors $\dim L_n = \dim E - \dim K_n = \dim E - \dim K_N = \dim L_N$. $\dim L_n = \dim L_N$.

De plus $L_n \subset L_N$ car la suite $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Ainsi $L_n = L_N$.

S'il existe un élément N de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$ alors $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $L_n = L_N$.

3.. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$. Montrons que $E = K_N \oplus L_N$.

. D'abord $\dim K_N + \dim L_N = \dim \operatorname{Ker} u^N + \dim \operatorname{Im} u^N = \dim E$.

. Soit x un élément de $K_N \cap L_N$. $x \in \operatorname{Ker} u^N \cap \operatorname{Im} u^N$.

$\exists t \in E$, $x = u^N(t)$ et $u^N(x) = 0_E$. Alors $u^{2N}(t) = u^N(x) = 0_E$. $t \in \operatorname{Ker} u^{2N}$.

Donc $t \in K_{2N}$.

Or $K_N = K_{N+1}$ donc $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $K_n = K_N$.

$2N \geqslant N$ donc $K_{2N} = K_N$. Alors $t \in K_N$. Ainsi $x = u^N(t) = 0_E$.

Donc $K_N \cap L_N = \{0_E\}$.

Ceci achève de montrer que K_N et L_N sont supplémentaires.

Si N est un élément de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$: $E = K_N \oplus L_N$.

Question 7 **HEC 2008 S7** $\boxed{\textbf{F2}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère n variable aléatoires à densité, de même loi que et indépendantes X_1, X_2, ..., X_n. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\big(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)\big)$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant.

On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

Q1. Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j \, (1 - F(x))^{n-j}$.

Q2. En déduire que Y_k admet une densité que l'on explicitera sans signe $\sum$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons T_x le nombre de variables aléatoires X_i ayant des valeurs inférieures à x. $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(x))$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors $P(Y_k \leqslant x) = P(T_x \geqslant k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}$.

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(Y_k \leqslant x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}.$$

Q2 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Notons F_k la fonction de répartition de Y_k. $F_k = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j (1-F)^{n-j}$.

* F est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_k est continue sur $\mathbb{R}$.
* f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors F est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'(x) = f(x)$.

Ainsi F_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$. Ceci achève de montrer que Y_k est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus D,\ F_k'(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$

f_k est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_k' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors f_k est une densité de Y_k qu'il convient de simplifier.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Effectuons le changement d'indice $j \leftarrow j-1$ dans la seconde somme.

R

← ou n !! ←

$$f_k(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j\, f(x)(F(x))^{j-1}(1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (F(x))^{j-1}(n-j+1) f(x)(1-F(x))^{n-j}$$

$$f_k(x) = \binom{n}{k} k\, f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} f(x)\, F(x))^{j-1}(1-F(x))^{n-j} \underbrace{\left[j\binom{n}{j} - (n-j+1)\binom{n}{j-1} \right]}_{\alpha_j}$$

Soit $j \in [\![k+1, n]\!]$.

$$\alpha_j = j\frac{n!}{j!(n-j)!} - (n-j+1)\frac{n!}{(n-j+1)!\,(j-1)!} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} - \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!} = 0.$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = k\binom{n}{k} f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}$.

__Remarque__ : si la loi des X_i est uniforme sur $[0,1]$, Y_k suit une loi bêta de première espèce.