HEC 2008 S 8

1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Donner la définition d'une fonction f convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle de $\mathbb{R}$.

Lors d'une soirée, n amis ($n \geqslant 2$) jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. La somme de n euros est partagée (théoriquement sous forme fractionnaire) entre les gagnants (ceux qui ont fait le bon choix). S'il n'y a pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.

2° Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on note X_k la somme aléatoire que reçoit le joueur k. Calculer l'espérance de X_k.

3° Dans cette question, on suppose qu'une nouvelle personne arrive avant que la pièce ne soit lancée. On demande à un joueur s'il accepte que cette nouvelle personne participe au jeu.
Que doit répondre ce joueur s'il veut maximiser le gain espéré ?
Quel doit être l'avis du serveur si il veut maximiser le pourboire espéré ?

4° Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de points de I et tout n-uplet $(t_1, ..., t_n)$ de réels positifs tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :

$$f(t_1 x_1 + ... + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + ... + t_n f(x_n).$$

b) Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I. Montrer que :

$$f(E(X)) \leqslant E(f(X)).$$

5° On se place à nouveau dans un jeu à n joueurs.

a) Calculer $E(X_k^2)$ sous forme d'une somme finie.

b) Montrer que :

$$E(X_k^2) \geqslant \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

2 - *Exercice sans préparation*

1° Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. On note $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ la partie régulière de ce développement limité.

2° Montrer que $P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.

3° Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.
Montrer que l'équation $B^2 = I_n + A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n) admet au moins une solution.

R.

HEC 2008 S8 correction de l'exercice

(Q1) I est un intervalle non vide et non réduit à un point. f est une application de I dans $\mathbb{R}$.
f est convexe sur I si $\forall \lambda \in [0,1], \forall (x,y) \in I^2, f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

(Q2) Posons $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
$S_n(\Omega) = \{0, n\}$. $\{S_n = 0\}$ se réalise si et seulement si tous les joueurs perdent.
Un joueur perd avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et les joueurs jouent de manière indépendante.

Ainsi $P(S_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Alors $P(S_n = n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Donc S_n possède une espérance qui vaut $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires finies ayant même loi.
Donc leurs espérances existent et sont égales.
Par conséquent $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = nE(X_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n}\, n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

▲ Exercice.. Retrouver ce résultat en trouvant la loi de X_k.
$\left(X_k(\Omega) = \left\{ \frac{n}{i} \,;\, i \in [\![1,n]\!] \right\} \cup \{0\},\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ P\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \right.$ et
$\left. P(X_k = 0) = \frac{1}{2} \right)$. Voir une solution dans Q5 a) ! ▼

(Q3) • $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ainsi un joueur augmente son gain espéré si une personne supplémentaire joue.
Un joueur doit donc accepter qu'une nouvelle personne participe au jeu pour maximiser son gain espéré.

La probabilité pour que le serveur touche un pourboire est la probabilité pour que les n joueurs perdent c'est donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Notons T_n la variable aléatoire égale au gain du joueur.

$T_n(\Omega) = \{0, n\}$. $P(T_n = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $P(T_n = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Alors $E(T_n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^n}$.

$$\frac{E(T_{n+1})}{E(T_n)} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\downarrow}{\overset{< \text{ si } n \geqslant 2\,!}{\leqslant}} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Notons que si $n \geqslant 2$ $\quad \frac{E(T_{n+1})}{E(T_n)} \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} < 1$ ... et $E(T_n) > 0$

la suite $(E(T_n))_{n\geqslant 1}$ est décroissante et la suite $(E(T_n))_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.

De toute évidence <u>le joueur a intérêt à refuser l'arrivée d'un nouveau joueur.</u>

Q4 a) Montrons le résultat par récurrence sur n.

- Soit $(x_1, x_2) \in I^2$. Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{i=1}^{2} t_i = 1$.

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \underset{t_1+t_2=1}{=} f(t_1 x_1 + (1-t_1)x_2) \underset{f \text{ est convexe sur } I,\ t_1\in[0,1],\ (x_1,x_2)\in I^2}{\leqslant} t_1 f(x_1) + (1-t_1) f(x_2) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sum_{i=1}^{2} t_i = 1 \Rightarrow f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$.

La propriété est vraie pour $n = 2$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![2, +\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

  Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$. Soit $(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$

  <u>Posons $\lambda = \sum_{i=1}^{n} t_i$.</u> <u>Alors $1 - \lambda = t_{n+1}$ et $\lambda \in [0, 1]$.</u>

<u>1er cas</u>.. $\lambda = 0$. Comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \geqslant 0$ alors $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ et $t_{n+1} = 1$.

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n+1} x_{n+1}) = f(x_{n+1}) = t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Donc $f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n+1} x_{n+1}) \leqslant t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1})$.

<u>2ième Cas..</u> $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda > 0$. Posons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t'_i = \frac{t_i}{\lambda}$.

$t'_1 \geqslant 0, t'_2 \geqslant 0, \dots, t'_n \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t'_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{\lambda} \lambda = 1$.

$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) = f\left(\lambda \left(\frac{t_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{t_n}{\lambda} x_n\right) + t_{n+1} x_{n+1}\right)$.

$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) = f(\lambda (t'_1 x_1 + \dots + t'_n x_n) + (1-\lambda) x_{n+1})$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in I$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t'_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t'_i = 1$. Alors, comme I est un intervalle $t'_1 x_1 + t'_2 x_2 + \dots + t'_n x_n \in I$. Comme $\lambda \in [0,1]$ et $x_{n+1} \in I$:

$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ est convexe}}}{\leqslant} \lambda f(t'_1 x_1 + \dots + t'_n x_n) + (1-\lambda) f(x_{n+1})$.

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) \in [0,1]^n$ et $\sum_{i=1}^{n} t'_i = 1$. Alors l'hypothèse de récurrence donne $f(t'_1 x_1 + \dots + t'_n x_n) \leqslant t'_1 f(x_1) + \dots + t'_n f(x_n)$. Comme $\lambda \geqslant 0$:

$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) \leqslant \lambda (t'_1 f(x_1) + \dots + t'_n f(x_n)) + (1-\lambda) f(x_{n+1})$.

Rappelons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t'_i = \frac{t_i}{\lambda}$ et $1-\lambda = t_{n+1}$.

Ainsi $f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) \leqslant t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n) + t_{n+1} f(x_{n+1})$.

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$, $\forall (t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$, $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \Rightarrow f(t_1 x_1 + \dots + t_{n+1} x_{n+1}) \leqslant t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1})$.

Donc la propriété est vraie pour $n+1$ et la récurrence s'achève.

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, $\forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n)$

▲ <u>Remarque</u>.. Il aurait sans doute été plus élégant de mettre dans la propriété de récurrence l'appartenance de $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ à I ... ▼

b) Supposons que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ avec pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in I$.

Posons $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $t_i = P(X = x_i)$. $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $t_i \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$.

Alors $f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_r x_r) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_r f(x_r)$

Donc $f(x_1 P(X=x_1)+x_2 P(X=x_2)+\dots+x_r P(X=x_r)) \leq f(x_1)P(X=x_1)+f(x_2)P(X=x_2)+\dots+f(x_r)P(X=x_r)$

Or $x_1 P(X=x_1)+x_2 P(X=x_2)+\dots+x_r P(X=x_r)=E(X)$ et, grâce au théorème de transfert $f(x_1)P(X=x_1)+f(x_2)P(X=x_2)+\dots+f(x_r)P(X=x_r)=E(f(X))$ (notons que $X(\Omega)\subset I$ et f est définie sur I). Alors $f(E(X))\leq E(f(X))$.

Si X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I :

$$f(E(X))\leq E(f(X)).$$

Q5 a) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Cherchons la loi de X_k !

$X_k(\Omega)=\{0\}\cup\{\frac{n}{i}\,;\,i\in[\![1,n]\!]\}$.

Le joueur k ne gagne rien avec la probabilité $\frac{1}{2}$. $P(X_k=0)=\frac{1}{2}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Notons B la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant un numéro différent de k qui sont gagnants. B suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\frac{1}{2}$. Notons enfin G_k l'événement le joueur numéro k gagne.

$$P(X_k=\tfrac{n}{i})=P(G_k\cap(B=i-1))\overset{\text{par indépendance}}{=}P(G_k)P(B=i-1)=\frac{1}{2}\times\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ainsi $P(X_k=0)=\frac{1}{2}$ et $\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(X_k=\frac{n}{i})=\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Alors $E(X_k^2)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)^2 P(X_k=\frac{n}{i})+0^2P(X_k=0)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)^2\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}=\binom{n}{i}$.

$$E(X_k^2)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$E(X_k^2)=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a également $E(X_k^2)=n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=n^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$E(X_k^2) = \frac{n^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

b) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\frac{1}{2}$.

Posons $I = [0, +\infty[$ et $\forall x \in I,\ g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

g est de classe C^∞ sur I. $\forall x \in I$, $g(x) = (x+1)^{-2}$, $g'(x) = -2(x+1)^{-3}$ et $g''(x) = 6(x+1)^{-4}$.

$\forall x \in I$, $g''(x) \geqslant 0$. g est convexe sur I et U prend un nombre fini de valeurs dans I.

Ainsi $g(E(U)) \leqslant E(g(U))$.

$E(U) = (n-1) \times \frac{1}{2}$. $g(E(U)) = \frac{1}{\left((n-1)\times\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{4}{(n+1)^2}$.

Donc $\frac{4}{(n+1)^2} = g(E(U)) \leqslant E(g(U)) \underset{\text{théorème de transfert}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} g(i) P(U=i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Alors $\frac{4}{(n+1)^2} \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{n^2} E(X_k^2)$.

Donc $E(X_k^2) \geqslant \frac{n^2}{2} \times \frac{4}{(n+1)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$.

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ E(X_k^2) \geqslant \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

Question 8 HEC 2008 S8 $\boxed{\text{F2}}$

Q1. $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $x \to (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. On note P la partie régulière de ce développement limité.

Q2. Montrer que $P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.

Q3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est à dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.

Montrer que l'équation $B^2 = I_n + A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n) admet au moins une solution.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 $f : x \mapsto (1+x)^{1/2}$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ donc a fortiori un développement limité d'ordre p au voisinage de 0.

Q2 $\exists \alpha \in]0,1[,\ \exists \varepsilon \in \mathcal{F}(]-\alpha,\alpha[, \mathbb{R}),\ f(x) = P(x) + x^p \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Version 1

Posons $\varphi = P^2 - X - 1$.

$1+x = (f(x))^2 = (P(x))^2 + 2P(x)\,\varepsilon(x)\,x^p + (\varepsilon(x)\,x^p)^2$.

$\varphi(x) = P^2(x) - x - 1 = -2P(x)\,\varepsilon(x)\,x^p - x^{2p}(\varepsilon(x))^2$. $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x^p} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-2P(x)\,\varepsilon(x) - x^p(\varepsilon(x))^2\right) = 0$.

$\deg \varphi \leq 2p$. $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{2p} a_k X^k$. Supposons que $\{i \in [\![0,p]\!] \mid a_i \neq 0\}$ soit non vide et notons r son plus petit élément. $r \in [\![0,p]\!]$, $a_r \neq 0$ et $\varphi = \sum\limits_{k=r}^{2p} a_k X^k$.

Alors $\varphi(x) \underset{0}{\sim} a_r x^r$; $\dfrac{\varphi(x)}{x^p} \underset{0}{\sim} a_r x^{r-p}$. $\left|\dfrac{\varphi(x)}{x^p}\right| \underset{0}{\sim} |a_r|\,|x|^{r-p}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{\varphi(x)}{x^p}\right| = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (|a_r|\,|x|^{r-p}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r < p \\ |a_r| & \text{si } r = p \end{cases}$ $(|a_r| > 0)$.

Ce qui est contradictoire. Donc $\{i \in [\![0,p]\!] \mid a_i \neq 0\} = \emptyset$.

Alors $\varphi = \sum\limits_{k=p+1}^{2p} a_k X^k$. **$P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.** Version 2 →

Q3 Soit T la partie régulière du développement limité d'ordre k au voisinage de 0 de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$. $T^2 - X - 1$ est divisible par X^{k+1}.

$\exists H \in \mathbb{R}[X]$, $T^2 - X - 1 = X^{k+1} H$. Alors $T^2(A) - A - I_n = A^{k+1} H(A) = 0$.

$(T(A))^2 = I_n + A$. L'équation $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B^2 = I_n + A$ admet au moins une solution.

R..

Q2 <u>Version 2</u>. $\deg P^2 \leq 2p$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p+1}$, $P^2 = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$. Posons $S = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

$(1+x)^{1/2} \underset{x\mapsto 0}{=} P(x) + o(x^p)$

Donc $1+x \underset{x\mapsto 0}{=} S(x) + o(x^p)$ (règles de calculs au produit de deux développements limités d'ordre p au voisinage de 0).

De plus $P^2(x) \underset{x\mapsto 0}{=} S(x) + o(x^p)$.

Alors $P^2(x) - 1 - x \underset{x\mapsto 0}{=} S(x) - S(x) + o(x^p) \underset{x\mapsto 0}{=} o(x^p)$.

Ainsi $P^2(x) - 1 - x \underset{x\mapsto 0}{=} o(x^p)$. La partie régulière du développement limité de $x \to P^2(x) - 1 - x$ à l'ordre p en 0 est nulle. De plus :

$\deg P^2 - 1 - X \leq 2p$. $\exists (b_0, b_1, \dots, b_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p+1}$, $P^2 - 1 - X = \sum_{k=0}^{2p} b_k X^k$.

Alors $P^2(x) - 1 - x = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + o(x^p)$. La partie régulière du développement limité de $x \mapsto P^2(x) - 1 - x$ à l'ordre p en 0 est $\sum_{k=0}^{p} b_k X^k$.

Par unicité du développement limité de $x \mapsto P^2(x) - 1 - x$ à l'ordre p en 0 il vient $\sum_{k=0}^{p} b_k X^k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $b_0 = b_1 = \dots = b_p = 0$. Donc $P^2 - 1 - X = \sum_{k=p+1}^{2p} b_k X^k = X^{p+1} \sum_{k=p+1}^{2p} b_k X^{k-p-1}$

Donc $P^2 - 1 - X$ est divisible par X^{p+1} !... ou <u>$P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1} !</u>