HEC 2008 S 9

■ 1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme f. Lien entre valeurs propres de f et racines d'un polynôme annulateur de f.

Soit $n \geqslant 2$ un entier et λ un réel. On définit l'application :

$$f_\lambda : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) , \qquad A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

2° a) f_λ est-il injectif? surjectif?

b) Déterminer $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_\lambda(A) = \lambda U + f_0(A)$.

c) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n+1$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda[\mathcal{M}_n(\mathbb{R})] \subset \mathcal{F}$.

d) Déterminer $f_\lambda \circ f_\lambda$.

e) Pour quelle(s) valeur(s) de λ, f_λ est-il un endomorphisme? Dans ce cas, f_λ est-il diagonalisable?

3° Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $f_\lambda(A)$ soit diagonalisable.

4° a) Montrer que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a :

$$f_0(A).U = 0 \quad \text{et} \quad f_0(AB) = A\, f_0(B) .$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer l'équivalence :

$$f_\lambda(A).f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \Leftrightarrow A.f_0(B) = f_\lambda(A).f_0(B) .$$

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \ f_\lambda(A).f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) .$$

■ 2 - *Exercice sans préparation*

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et $q \in]0,1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor ,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

HEC 2008 S9 Correction de l'exercice

Q1 f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $P=\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$

- P est un polynôme annulateur de f si $P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$ donc si $\sum_{k=0}^{r} a_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- Si P est un polynôme annulateur de f, l'ensemble des valeurs propres de f est <u>CONTENU</u> dans l'ensemble des racines de P.

Q2 <u>a)</u> Soit $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f_\lambda(E_{1,2})=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=f_\lambda(E_{2,1})$$ et $E_{1,2}\neq E_{2,1}$ donc <u>f_λ n'est pas injective.</u>

$E_{1,2}$ a pour coefficient situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne : 1. Alors $E_{1,2}$ ne peut pas être l'image par f_λ d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>f_λ n'est pas surjective.</u>

<u>b)</u> Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f_\lambda(A)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\left(\begin{array}{c|c} 0_{n,n-1} & \begin{matrix} a_{1,n}\\ \vdots \\ a_{n-1,n}\\ a_{n,n}\end{matrix}\end{array}\right)=\lambda\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ \hline 0 \cdots 0 & 0\end{array}\right)+f_0(A).$$

<u>Ainsi</u> $U=\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ \hline 0 \cdots 0 & 0\end{array}\right)$ <u>est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_\lambda(A)=\lambda U+f_0(A)$.</u>

<u>Remarque</u>.. $U=E_{1,1}+E_{2,2}+\cdots+E_{n-1,n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}E_{k,k}$

<u>c)</u> Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$f_\lambda(A)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda E_{k,k}+\sum_{i=1}^{n}a_{i,n}E_{i,n}=\lambda\sum_{k=1}^{n-1}E_{k,k}+\sum_{i=1}^{n}a_{i,n}E_{i,n}=\lambda U+\sum_{i=1}^{n}a_{i,n}E_{i,n}.$$

Posons $\mathcal{H}=\mathrm{Vect}(U, E_{1,n}, E_{2,n},\dots, E_{n,n})$. $f_\lambda(A)\in\mathcal{H}$ et ceci pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient $f_\lambda(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Montrons que $\dim\mathcal{H}=n+1$. Il suffit de montrer que $\mathcal{B}=(U, E_{1,n}, E_{2,n},\dots,E_{n,n})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\alpha_0 U + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, E_{i,n} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Donc $\alpha_0 \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, E_{i,n} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_0 E_{k,k} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, E_{i,n} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Or la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ est libre.

Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Donc $\mathcal{B} = (U, E_{1,n}, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ est libre.

Alors dim $\mathcal{T} = n+1$.

$\mathcal{T} = \mathrm{Vect}(U, E_{1,n}, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n+1$ tel que, pour tout λ dans $\mathbb{R}$, $f_\lambda(M_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{T}$. Exercice.. Notez que $f_\lambda(M_n(\mathbb{R})) = \mathcal{T}$.

d) $\boxed{\text{Dans la suite } (E_1, E_2, \dots, E_n) \text{ est la base canonique de } M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et si } M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ et si } j \in [\![1,n]\!] \text{ nous noterons } C_j(M) \text{ la } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.\ \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(M) = ME_j}$

Le texte est essentiel dans la suite.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(f_\lambda(A)) = \begin{cases} \lambda E_j & \text{si } j \in [\![1,n-1]\!] \\ C_j(A) & \text{si } j = n \end{cases}$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j((f_\lambda \circ f_\lambda)(A)) = C_j(f_\lambda(f_\lambda(A))) = \begin{cases} \lambda E_j & \text{si } j \in [\![1,n-1]\!] \\ C_j(f_\lambda(A)) & \text{si } j = n \end{cases}$

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j((f_\lambda \circ f_\lambda)(A)) = \begin{cases} \lambda E_j & \text{si } j \in [\![1,n-1]\!] \\ C_j(A) & \text{si } j = n \end{cases}$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j((f_\lambda \circ f_\lambda)(A)) = C_j(f_\lambda(A))$. Donc les matrices $(f_\lambda \circ f_\lambda)(A)$ et $f_\lambda(A)$ sont égales.

$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $(f_\lambda \circ f_\lambda)(A) = f_\lambda(A)$. Par conséquent $\underline{f_\lambda \circ f_\lambda = f_\lambda}$.

e) • Supposons que f_λ soit un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$. Alors $f_\lambda(0_{M_n(\mathbb{R})}) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Donc $C_1(f_\lambda(0_{M_n(\mathbb{R})})) = C_1(0_{M_n(\mathbb{R})})$. Par conséquent $\lambda E_1 = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Comme $E_1 \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, $\lambda = 0$.

Si f_λ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$, $\lambda = 0$.

- notons que f_0 est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

→ f_0 est une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

→ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad C_j(f_0(\lambda A+B)) = \begin{cases} 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } j \in [\![1,n-1]\!] \\ C_j(\lambda A+B) & \text{si } j = n \end{cases}$

$\forall j \in [\![1,n]\!], \; C_j(\lambda f_0(A)+f_0(B)) = \begin{cases} \lambda 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} + 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } j \in [\![1,n-1]\!] . \\ \lambda C_j(A) + C_j(B) & \text{si } j = n \end{cases}$

Or $\forall j \in [\![1,n]\!], \; C_j(\lambda A+B) = \lambda C_j(A) + C_j(B)$. et $\lambda 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} + 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

donc $\forall j \in [\![1,n]\!], \; C_j(f_0(\lambda A+B)) = C_j(\lambda f_0(A)+f_0(B))$.

Ainsi $\quad f_0(\lambda A+B) = \lambda f_0(A+f_0(B)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}. \; \forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), \; f_0(\lambda A+B) = \lambda f_0(A) + f_0(B)$. f_0 est linéaire.

f_0 est donc un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

Finalement. f_λ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lambda = 0$.

---

f_0 est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $f_0 \circ f_0 = f_0$. Ainsi f_0 est une projection vectorielle. Mieux f_0 est la projection vectorielle sur $\mathrm{Im} f_0 = \mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})})$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f_0$. Notons que $\underline{M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}) \oplus \mathrm{Ker} f_0}$.

$X^2 - X$ est un polynôme annulateur de f_0 dont les zéros sont 0 et 1. Alors $\underline{\mathrm{Sp} f_0 \subset \{0,1\}}$.

<u>1er cas</u>.. $\mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}) = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$. Alors $\mathrm{Ker} f_0 = M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f_0 = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))}$. f_0 est diagonalisable.

<u>2e cas</u>.. $\mathrm{Ker} f_0 = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$. Alors $\mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}) = M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f_0 = \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$. f_0 est diagonalisable.

3ème cas.- $\mathrm{Ker}(f_0 - Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et $\mathrm{Ker}\, f_0 \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

Alors 0 et 1 sont valeurs propres de f_0. Ainsi $\{0,1\} \subset Sp f_0 \subset \{0,1\}$

donc $Sp f_0 = \{0,1\}$ et $SEP(f_0,1) \oplus SEP(f_0,0) = \mathrm{Ker}(f_0 - Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \mathrm{Ker}\, f_0 = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors f_0 est diagonalisable.

Dans tous les cas f_0 est diagonalisable ce qui n'est pas un scoop pour une projection vectorielle.

Q4 a) Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

encore !

- Pour montrer que $f_0(A)U = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ montrons que ces deux matrices ont mêmes colonnes.

Montrons donc que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(f_0(A)U) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $C_j(f_0(A)U) = f_0(A)UE_j \underset{UE_j = E_j}{=} f_0(A)E_j = C_j(f_0(A)) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$C_n(f_0(A)U) = f_0(A)UE_n = f_0(A)0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

ceci achève de montrer que $f_0(A)U = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $C_j(f_0(AB)) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $C_j(Af_0(B)) = Af_0(B)E_j = A\,C_j(f_0(B)) = A0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

donc $\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $C_j(f_0(AB)) = C_j(Af_0(B))$.

$C_n(f_0(AB)) = C_n(AB) = ABE_n = A\,C_n(B) = A\,C_n(f_0(B)) = Af_0(B)E_n = C_n(Af_0(B))$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(f_0(AB)) = C_j(Af_0(B))$. Alors $f_0(AB) = Af_0(B)$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$f_\lambda(A)f_\lambda(B) = f_\lambda(A)(\lambda U + f_0(B)) = \lambda f_\lambda(A)U + f_\lambda(A)f_0(B) = \lambda(\lambda U + f_0(A))U + f_\lambda(A)f_0(B)$.

$f_\lambda(A)f_\lambda(B) = \lambda^2 U^2 + \lambda \underbrace{f_0(A)U}_{=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} + f_\lambda(A)f_0(B) \underset{\text{a) et } U^2 = U}{=} \lambda^2 U + \lambda.0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + f_\lambda(A)f_0(B) = \lambda^2 U + f_\lambda(A)f_0(B)$.

$f_\lambda(A)f_\lambda(B) = \lambda^2 U + f_\lambda(A)f_0(B)$.

$f_{\lambda^2}(AB) = \lambda^2 U + f_0(AB) \overset{a)}{=} \lambda^2 U + Af_0(B)$. $f_{\lambda^2}(AB) = \lambda^2 U + Af_0(B)$.

Alors $f_\lambda(A)f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \Leftrightarrow \lambda^2 U + f_\lambda(A)f_0(B) = \lambda^2 U + Af_0(B) \Leftrightarrow f_\lambda(A)f_0(B) = Af_0(B)$

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \Leftrightarrow A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)$.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\left(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)\right) \Leftrightarrow \left(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)\right)$.

* Si $A = f_\lambda(A)$: $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)$. Donc $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$.

* Réciproquement supposons que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$.

Montrons que $A = f_\lambda(A)$.

On a $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)$.

En particulier $A f_0(B) E_n = f_\lambda(A) f_0(B) E_n$ pour tout B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A C_n(B) = f_\lambda(A) C_n(B)$.

Donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $A C_n(E_{j,n}) = f_\lambda(A) C_n(E_{j,n})$.

Or $\forall j \in [\![1,n]\!]$, la $n^{\text{ième}}$ colonne de $E_{j,n}$ est E_j.

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $A E_j = f_\lambda(A) E_j$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(A) = C_j(f_\lambda(A))$.

Donc $A = f_\lambda(A)$

Ainsi $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$ si et seulement si $A = f_\lambda(A)$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$

ii) $f_\lambda(A) = A$

iii) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de A est λE_j

Question 9 **HEC 2008 S9** $\boxed{\text{F1}}$

U est une variable aléatoire définie sur un espace probablilsé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et $q \in]0,1[$.

Déterminer la loi de la variable alétaoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $P(X=k) = P\left(\left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor = k-1\right) = P\left(k-1 \leq \dfrac{\ln U}{\ln q} < k\right)$

$\ln q < 0$

$P(X=k) \stackrel{\downarrow}{=} P((k-1)\ln q \geqslant \ln U > k \ln q) = P(q^{k-1} \geqslant U > q^k) = P(q^k < U \leq q^{k-1})$

$P(X=k) = F_U(q^{k-1}) - F_U(q^k) = q^{k-1} - q^k = (1-q)q^{k-1}$.

F_U est la fonction de répartition de U — $F_U(x) = x$ si $x \in [0,1]$

<u>**X suit la loi géométrique de paramètre $1-q$.**</u>

R