BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P **283**

OPTION SCIENTIFIQUE **CCIP_M2_S**

MATHEMATIQUES II

Mardi 5 mai 2009, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.

On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles existent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \sup(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $Z_n = \inf(U_1, U_2, \ldots, U_n)$. On admet que T_n et Z_n sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ainsi, pour tout ω de Ω, on a :

$$T_n(\omega) = \max(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_n(\omega)) \text{ et } Z_n(\omega) = \min(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_n(\omega))$$

On rappelle que si C désigne un élément de $\mathcal{A}$, on note $\mathbf{1}_C$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement C, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\mathbf{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaire

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Établir les deux relations suivantes :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P([Y > k]) \quad \text{et} \quad E(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) P([Y > k])$$

Partie I. Inf et Sup

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $E(U_1)$ et de $V(U_1)$.

3. a) Calculer, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, $P([T_n \leqslant k])$.
b) En déduire la loi de probabilité de T_n.

4. a) Montrer que la suite $(d_n(N))_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.
b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de N et $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n)$.
c) Établir la formule suivante : $V(T_n) = (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n)$.
d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$; en déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $V(T_n) \sim d_n(N)$.

5. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

6. On rappelle que la fonction Pascal `random(N)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0,N-1]\!]$. Écrire une fonction Pascal d'en-tête `simulmax(n : integer) : integer` qui simule la variable aléatoire T_n.

Partie II. Couple (Inf, Sup)

7. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k,ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k,\ell) = P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell])$.
a) Montrer, pour tout (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\ \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

b) Établir, pour tout (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, la formule suivante :

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k,\ell) + \phi_n(k-1,\ell-1) - \phi_n(k-1,\ell) - \phi_n(k,\ell-1)$$

c) En déduire, en distinguant les trois cas $k<\ell, k=\ell$ et $k>\ell$, l'expression de $P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ en fonction de k et ℓ.

8. On donne, pour tout couple (m,n) de $(\mathbb{N}^*)^2$, les deux relations suivantes :
i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (m+1)^n - m^n - 1$;
ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = m(m+1)^n - (m+1)m^n$.
a) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la formule suivante : $E(T_nZ_n) = N\,(1 + d_{n+1}(N))$.
b) On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, ρ_n le coefficient de corrélation linéaire entre T_n et Z_n.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n$ lorsque $N \geqslant 2$.

9. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{[T_n=k]}([Z_n=\ell])$.
b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout k de $[\![1,N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $E(Z_n/[T_n=k])$ de Z_n sachant $[T_n=k]$.

Partie III. Prévision

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un $(n+1)$-échantillon indépendant identiquement distribué (i.i.d.) $(U_1, U_2, \ldots, U_{n+1})$ de la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

On pose : $T_n = \sup(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $T_{n+1} = \sup(U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}) = \sup(T_n, U_{n+1})$.

Pour tout $t = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ de $\mathbb{R}^N$, on pose : $W_t(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k \times \mathbf{1}_{[T_n = k]}$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer la valeur de t pour laquelle les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) $E(W_t(T_n)) = E(T_{n+1})$;

ii) $E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2]$ est minimale.

10. Montrer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, la relation : $P([W_t(T_n) = t_k]) = P([T_n = k])$.

11. Établir, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, la formule suivante :

$$E(T_{n+1} \times \mathbf{1}_{[T_n = k]}) = E(T_{n+1}/[T_n = k]) \times P([T_n = k])$$

12. a) Calculer, pour tout couple (k, j) de $[\![1, N]\!]^2$, $P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j])$.

b) En déduire, pour tout couple (k, j) de $[\![1, N]\!]^2$, la probabilité conditionnelle $P_{[T_n = k]}([T_{n+1} = j])$.

c) Déterminer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $E(T_{n+1}/[T_n = k])$ de T_{n+1} sachant $[T_n = k]$.

d) En appliquant la formule de l'espérance totale, déduire de la question précédente la relation suivante :

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}\left(E(T_n^2) - E(T_n)\right)$$

13. Établir l'égalité suivante : $(W_t(T_n))^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k^2 \times \mathbf{1}_{[T_n = k]}$.

14. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles par :

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_N) = E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2]$$

a) À l'aide des résultats des questions 11, 12 et 13, expliciter g en fonction des variables $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

b) Montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$ atteint en un point $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ que l'on déterminera en fonction de $E(T_{n+1}/[T_n = 1]), E(T_{n+1}/[T_n = 2]), \ldots, E(T_{n+1}/[T_n = N])$.

15. Établir les deux relations suivantes :

$$E\left(W_\theta(T_n)\right) = E(T_{n+1}) \quad \text{et} \quad V\left(W_\theta(T_n)\right) \leqslant V(T_{n+1})$$

16. a) Établir, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante : $\sum\limits_{k=1}^{N} k^i \times \mathbf{1}_{[T_n = k]} = (T_n)^i$.

b) En déduire la relation suivante : $W_\theta(T_n) = \dfrac{N+1}{2} + \dfrac{1}{2N}\left(T_n^2 - T_n\right)$.

Partie IV. Estimation

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$. On suppose que le paramètre N est inconnu.

Cette partie a pour objet la détermination d'un estimateur ponctuel de N, sans biais et de variance minimale.

Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de U.

17. Soit ε un réel strictement positif. On pose :

$$A_n(\varepsilon) = [|T_n - N| \geqslant \varepsilon] \text{ et } B_n(\varepsilon) = [|T_n - E(T_n)| + |d_n(N)| \geqslant \varepsilon]$$

a) Peut-on dire que $T_n + d_n(N)$ est un estimateur sans biais de N ?

b) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais du paramètre N.

c) Montrer que $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$ et qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on a : $B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon/2]$.

d) En déduire que la suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

18. a) Calculer, pour tout n-uplet $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de $[\![1, N]\!]^n$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right)$.

b) En déduire que, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ sachant $[T_n = k]$ est donnée par :

$$P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si pour tout } i \text{ de } [\![1, n]\!],\ 1 \leqslant u_i \leqslant N \text{ et } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera que cette loi conditionnelle ne dépend pas du paramètre N.

19. On pose, pour n entier de $\mathbb{N}^*$: $S_n = T_n + Z_n - 1$ et, pour tout k de $[\![1, N]\!]$: $\psi_n(k) = \dfrac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n}$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de N.

b) Établir, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, l'égalité : $\psi_n(k) = E(S_n/[T_n = k])$.

c) En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N.

d) On pose, pour tout k de $[\![1, N]\!]$: $\varphi_n(k) = E(S_n^2/[T_n = k])$.
Établir, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, l'inégalité : $\psi_n^2(k) \leqslant \varphi_n(k)$ (on pourra utiliser la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\lambda \mapsto E((S_n - \lambda)^2/[T_n = k])$). En déduire que $V(\psi_n(T_n)) \leqslant V(S_n)$.

e) Calculer $V(S_n)$. En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur convergent de N.

20. Soit, pour n entier de $\mathbb{N}^*$, un estimateur sans biais R_n du paramètre N.
On pose, pour tout k de $[\![1, N]\!]$: $f_n(k) = E(R_n/[T_n = k])$.

a) En utilisant une méthode analogue à celle de la question 19.d, montrer que : $V(f_n(T_n)) \leqslant V(R_n)$.

b) Soit F une fonction réelle. Montrer que, pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, la condition « pour tout N de $\mathbb{N}^*$, $E(F(T_n)) = N$ » est vérifiée, si et seulement si, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, on a : $F(k) = \psi_n(k)$.

c) En déduire que dans l'ensemble des estimateurs sans biais de N, l'estimateur $\psi_n(T_n)$ est optimal, dans le sens où $V(\psi_n(T_n))$ est minimale.

La partie IV constitue une démonstration du théorème de Lehmann-Scheffé dans le cas particulier d'une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, avec N inconnu.

Préliminaire

Q1 $E(Y) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell P(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell \left(P(Y>\ell-1) - P(Y>\ell)\right) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell P(Y>\ell-1) - \sum_{\ell=0}^{N-1} \ell P(Y>\ell)$

$P(Y>N)=0$

$E(Y) = \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell+1) P(Y>\ell) - \sum_{\ell=0}^{N-1} \ell P(Y>\ell)$

Ainsi $\underline{E(Y) = \sum_{\ell=0}^{N-1} P(Y>\ell)}$.

Le théorème de transfert donne : $E(Y^2) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell^2 P(Y=\ell)$.

$E(Y^2) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell^2 \left(P(Y>\ell-1) - P(Y>\ell)\right) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell^2 P(Y>\ell-1) - \sum_{\ell=0}^{N-1} \ell^2 P(Y>\ell)$

$E(Y^2) = \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell+1)^2 P(Y>\ell) - \sum_{\ell=0}^{N-1} \ell^2 P(Y>\ell) = \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell^2+2\ell+1-\ell^2) P(Y>\ell)$.

$\underline{E(Y^2) = \sum_{\ell=0}^{N-1} (2\ell+1) P(Y>\ell)}$.

Partie I Inf et Sup

Q2 $\underline{E(U_1) = \frac{N+1}{2}}$ et $\underline{V(U_1) = \frac{N^2-1}{12}}$.

Q3 a) Soit $\ell \in [\![1,N]\!]$. $P(T_n \leqslant \ell) = P(\operatorname{Sup}(U_1, U_2, \dots, U_n) \leqslant \ell)$

$P(T_n \leqslant \ell) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i \leqslant \ell\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i \leqslant \ell)$ car $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes.

$P(T_n \leqslant \ell) = \left(\frac{\ell}{N}\right)^n$. Notons que ceci vaut pour $\ell = 0$.

Alors $\underline{\forall \ell \in [\![0, N]\!],\ P(T_n \leqslant \ell) = \left(\frac{\ell}{N}\right)^n}$.

b) Notons que : $\underline{T_n(\Omega) = [\![1,N]\!]}$.

$\ell \in [\![1,N]\!]$ et $\ell-1 \in [\![0, N-1]\!]$

$\forall \ell \in [\![1,N]\!],\ P(T_n=\ell) = P(T_n \leqslant \ell) - P(T_n \leqslant \ell-1) = \left(\frac{\ell}{N}\right)^n - \left(\frac{\ell-1}{N}\right)^n$

$\underline{\forall \ell \in [\![1,N]\!],\ P(T_n=\ell) = \left(\frac{\ell}{N}\right)^n - \left(\frac{\ell-1}{N}\right)^n}$.

Q4 a) Si $N=1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n(N)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(N)=0$.

Supposons $N\geqslant 2$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $d_N(n)=\sum\limits_{\ell=1}^{N-1}\left(\frac{\ell}{N}\right)^n$. $\forall \ell\in[\![1,N-1]\!]$, $\left|\frac{\ell}{N}\right|<1$ donc

$\forall \ell\in[\![1,N-1]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ell}{N}\right)^n=0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(N)=0$

Dans les deux cas $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(N)=0$.

b) Soit $N\in[\![1,+\infty[\![$ $E(T_n)=\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}P(T_n>\ell)=\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}(1-P(T_n\leqslant\ell))=N-\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}\left(\frac{\ell}{N}\right)^n$.

$E(T_n)=N-d_n(N)$. $\lim\limits_{n\to+\infty}E(T_n)=N$. ... ce qui vaut encore pour $N=1$

c) Soit $N\in[\![1,+\infty[\![$. $E(T_n^2)=\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}(2\ell+1)P(T_n>\ell)=\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}(2\ell+1)[1-P(T_n\leqslant\ell)]$

$E(T_n^2)=\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}(2\ell+1)-\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}(2\ell+1)\left(\frac{\ell}{N}\right)^n=N\times\frac{(2\times0+1)+(2(N-1)+1)}{2}-2N\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}\left(\frac{\ell}{N}\right)^{n+1}-\sum\limits_{\ell=0}^{N-1}\left(\frac{\ell}{N}\right)^n$

$E(T_n^2)=N\times\frac{2N}{2}-2N\,d_{n+1}(N)-d_n(N)=N^2-2N\,d_{n+1}(N)-d_n(N)$.

Alors $V(T_n)=E(T_n^2)-(E(T_n))^2=N^2-2N\,d_{n+1}(N)-d_n(N)-(N-d_n(N))^2$.

$V(T_n)=N^2-2N\,d_{n+1}(N)-d_n(N)-N^2+2N\,d_n(N)-(d_n(N))^2$.

$V(T_n)=(2N-1)d_n(N)-2N\,d_{n+1}(N)-d_n^2(N)$... à vérifier pour $N=1$...

$\lim\limits_{n\to+\infty}d_n(N)=\lim\limits_{n\to+\infty}d_{n+1}(N)=0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}V(T_n)=0$.

Exercice.. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à N.

d) Soit $N\in[\![2,+\infty[\![$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $d_n(N)=\sum\limits_{\ell=1}^{N-1}\left(\frac{\ell}{N}\right)^n=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\sum\limits_{\ell=1}^{N-1}\left(\frac{\ell}{N-1}\right)^n$

Nous allons montrer que $d_n(N)\sim\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$, logique !?

$\forall \ell \in [\![1, N-2]\!]$, $\left|\frac{\ell}{N-1}\right| < 1$ et si $\ell = N-1$: $\frac{\ell}{N-1} = 1$!

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} \left(\frac{\ell}{N-1}\right)^n = 1$ et $1 \neq 0$!!

Alors $d_n(N) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} \left(\frac{\ell}{N-1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \times 1 = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$.

$\underline{\underline{d_n(N) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n.}}$

Alors $\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{N}\right)^n} = \frac{N-1}{N}$. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}.}}$

$\frac{V(T_n)}{d_n(N)} = 2N - 1 - 2N \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - d_n^2(N)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V(T_n)}{d_n(N)} = 2N-1-2N\left(1-\frac{1}{N}\right) - 0^2 = 2N-1-2N+2 = 1$.

Alors $\underline{\underline{V(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N).}}$

Q5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Pour éviter de refaire des calculs nous allons montrer que la loi de Z_n est celle de $N+1-T_n$. Posons $\underline{V_n = N+1-T_n}$.

Notons que $Z_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et que $V_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$ car $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

$\underline{\underline{\text{V1}}}$ $Z_n = \text{Inf}(U_1, U_2, \dots, U_n) = -\text{Sup}(-U_1, -U_2, \dots, -U_n)$. $\leftarrow$ A retenir !

$Z_n = (N+1) - ((N+1) + \text{Sup}(-U_1, -U_2, \dots, -U_n)) = N+1 - \text{Sup}(N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n)$

$\underline{Z_n = N+1 - \text{Sup}(N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n).}$

Notons que pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $N+1-U_i$ suit également une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. De plus $N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n$ sont mutuellement indépendantes.

Alors la loi de $\sup(N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n)$ est celle de T_n.

Donc <u>la loi de Z_n est celle de $N+1-T_n$.</u>

V2 Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$

$$P(Z_n \geq k) = P(\operatorname{Inf}(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \geq k)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i \geq k).$$

$$P(Z_n \geq k) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P(U_i < k)) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n.$$

$P(Z_n \geq k) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$ et même pour tout $k \in [\![1, N+1]\!]$!

$k \in [\![1, N]\!]$ et $k+1 \in [\![2, N+1]\!]$

Alors $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $P(Z_n = k) = P(Z_n \geq k) - P(Z_n \geq k+1) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k+1-1}{N}\right)^n$.

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ P(Z_n = k) = \left(\frac{N+1-k}{N}\right)^n - \left(\frac{(N+1-k)-1}{N}\right)^n = P(T_n = N+1-k).$$

Donc $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $P(Z_n = k) = P(N+1-T_n = k)$. On retrouve le résultat.

Remarque.. <u>$\forall k \in [\![1, N]\!]$, $P(Z_n = k) = \left(\frac{N+1-k}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$.</u>

Dans ces conditions $E(Z_n) = N+1 - E(T_n)$ et $V(Z_n) = (-1)^2 V(T_n) = V(T_n)$.

Alors $E(Z_n) = N+1 - (N - d_n(N))$ et $V(Z_n) = V(T_n)$

<u>$E(Z_n) = 1 + d_n(N)$</u> et <u>$V(Z_n) = (2N-1)\, d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n^2(N)$.</u>

<u>Remarque</u>.. $\lim_{N \to +\infty} E(Z_n) = 1$, $\lim_{N \to +\infty} V(Z_n) = 0$, $V(Z_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} d_n(N)$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 1.

Q6 Bravo le CONcepteur. n, N !!! En Pascal $n = N$.

De plus il faut donner la valeur de N à la fonction.

Nous coderons GN le N !

```
function simulmax(GN,n:integer):integer;

var k,max,s:integer;

begin

max:=random(GN);

For k:=2 to n do

        begin
        s:=random(GN);
        If s>max then max:=s;
        end;

simulmax:=s+1;

end;
```

V1

V2 est la version naturelle

V1 évite des additions.

Elle repose sur

$T_n = \sup(U_1-1, U_2-1, \dots, U_N-1)+1$.

```
function simulmax2(GN,n:integer):integer;

var k,max,s:integer;

begin

max:=random(GN)+1;

For k:=2 to n do

        begin
        s:=random(GN)+1;
        If s>max then max:=s;
        end;
simulmax2:=s;

end;
```

V2

PARTIE II Couple (Inf, Sup).

Q7 Dans toute cette question $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $(k,l) \in \mathbb{N}^2$

1er cas.. $k \leq l$ l'événement $[T_n \leq k]$ est contenu dans l'événement $[Z_n \leq l]$ car $Z_n \leq T_n$ et $k \leq l$.

Ainsi $[T_n \leq k] \cap [Z_n \leq l] = [T_n \leq k]$.

Donc $\phi_n(k,l) = P(T_n \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$

2ème cas.. $k > l$

$P(T_n \leq k) = P([T_n \leq k] \cap [Z_n \leq l]) + P([T_n \leq k] \cap [Z_n \geq l+1])$.

donc $\phi_n(k,l) = P(T_n \leq k) - P([T_n \leq k] \cap [Z_n \geq l+1])$

$\phi_n(k,l) = P(T_n \leq k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i \leq k] \cap \bigcap_{i=1}^{n}[U_i \geq l+1]\right)$.

$$\Phi_n(k,\ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [\ell+1 \le U_i \le k]\right) \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{k}{N}\right)^n - \prod_{i=1}^{n} P(\ell+1 \le U_i \le k).$$

$U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes

$$\Phi_n(k,\ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{k-\ell}{N}\right) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.$$

$$\underline{\underline{\forall (k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2,\ \Phi_n(k,\ell)}} = \underline{\underline{\begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \le \ell \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}}} \quad (*)$$

▲ <u>Remarque</u>.. (*) vaut encore si $k = \ell$. Ce qui permet d'écrire que :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2,\ \Phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \le \ell \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k \geq \ell \end{cases}$$

<u>b)</u> Soit $(k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$.

$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = P([T_n \le k] \cap [Z_n = \ell]) - P([T_n \le k-1] \cap [Z_n = \ell])$.

$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = P([T_n \le k] \cap [Z_n \le \ell]) - P([T_n \le k] \cap [Z_n \le \ell-1]) -$

$\big(P([T_n \le k-1] \cap [Z_n \le \ell]) - P([T_n \le k-1] \cap [Z_n \le \ell-1])\big)$.

Alors $P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \Phi_n(k,\ell) - \Phi_n(k,\ell-1) - (\Phi_n(k-1,\ell) - \Phi_n(k-1,\ell-1))$.

$$\underline{\underline{\forall (k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2,\ P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \Phi_n(k,\ell) + \Phi_n(k-1,\ell-1) - \Phi_n(k-1,\ell) - \Phi_n(k,\ell-1).}}$$

<u>c)</u> Avant de continuer utilisons deux lois dans la remarque ▲

Notons que si $k = 0$ ou $\ell = 0$ alors $\Phi_n(k,\ell) = P([T_n \le k] \cap [Z_n \le \ell]) = 0$.

Il n'est pas difficile alors de voir que l'on peut écrire :

$$\forall (k,\ell) \in [\![\underline{\underline{0}},N]\!]^2,\ \Phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \le \ell \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k \geq \ell \end{cases}$$

Reprenons (k,ℓ) dans $[\![1,N]\!]^2$. Alors $k-1$ et $\ell-1$ sont tous largement dans $[\![0,N]\!]$!

1er Cas.. $k < \ell$. Alors $P([T_n=\ell]\cap[Z_n=\ell])=0$ $(\forall\omega\in\Omega,\ T_n(\omega)\geq Z_n(\omega))$.

2e Cas.. $k=\ell$. $P([T_n=\ell]\cap[Z_n=\ell]) = P(\sup(U_1,\dots,U_n)=\inf(U_1,\dots,U_n)=k)$

$$P([T_n=\ell]\cap[Z_n=\ell]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i=k]\right) \underset{\text{Indépendance}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(U_i=k) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

3e Cas.. $k>\ell$. Alors $k-1\geq \ell-1$, $k-1\geq\ell$, $k\geq\ell-1$.

Alors $P([T_n=\ell]\cap[Z_n=\ell]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n + \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1-(\ell-1)}{N}\right)^n - \left(\left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1-\ell}{N}\right)^n\right)$

$- \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-(\ell-1)}{N}\right)^n\right) = \left(\frac{k-1-\ell}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n$.

Alors $\forall (k,\ell)\in [\![1,N]\!]^2$, $P([T_n=\ell]\cap[Z_n=\ell]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<\ell \\ \left(\frac{1}{N}\right)^n & \text{si } k=\ell \\ \left(\frac{k-1-\ell}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k>\ell \end{cases}$

Q8) 1) $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

$$\sum_{j=1}^{m}\left[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\right] = \sum_{j=1}^{m}\left[(j+1)^n - j^n\right] - \sum_{j=1}^{m}\left[j^n - (j-1)^n\right] \overset{\text{télescopage}}{=} (m+1)^n - 1 - (m^n - 0).$$

$\forall (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\sum_{j=1}^{m}\left[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\right] = (m+1)^n - m^n - 1$.

Ces deux résultats s'obtiennent sans difficulté par récurrence. mais la preuve proposée se dispense du résultat...

2) Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $j\in[\![1,m]\!]$

$j\left[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\right] = (j+1-1)(j+1)^n - 2j^{n+1} + (j-1+1)(j-1)^n$.

$j\left[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\right] = (j+1)^{n+1} - 2j^{n+1} + (j-1)^{n+1} + (j-1)^n - (j+1)^n$.

$$\sum_{j=1}^{m} j\left[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\right] = \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\left[(j+1)^{n+1} - 2j^{n+1} + (j-1)^{n+1}\right]}_{(m+1)^{n+1} - m^{n+1} - 1 \quad 1)!} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\left[(j-1)^n - (j+1)^n\right]}_{\sum_{j=0}^{m-1} j^n - \sum_{j=2}^{m+1} j^n}$$

$$\sum_{j=1}^{m} j\left[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\right] = (m+1)^{n+1} - m^{n+1} - 1 + 1 - m^n - (m+1)^n.$$

$\forall (n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\sum_{j=1}^{m} j\left[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n\right] = m(m+1)^n - (m+1)m^n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$E(T_nZ_n) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} k\ell \, P([T_n=k]\cap[Z_n=\ell]).$$

$$E(T_nZ_n) = \sum_{k=1}^{N}\Big[\underbrace{\sum_{\ell=1}^{k-1} k\ell\Big[\Big(\frac{k-1-\ell}{N}\Big)^n + \Big(\frac{k-\ell+1}{N}\Big)^n - 2\Big(\frac{k-\ell}{N}\Big)^n\Big]}_{\odot} + k^2\Big(\frac{1}{N}\Big)^n + \sum_{\ell=k+1}^{N} k\ell\times 0\Big]$$

multiplions le tout par N^n et effectuons le changement d'indice $j=k-\ell$ dans $\odot$

Il vient :

$$N^nE(T_nZ_n) = \sum_{k=1}^{N} k \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\big[(j-1)^n+(j+1)^n-2j^n\big] + \sum_{k=1}^{N}k^2.$$

$$N^nE(T_nZ_n) = \sum_{k=1}^{N} k^2\Big[\sum_{j=1}^{k-1}\big[(j-1)^n+(j+1)^n-2j^n\big]\Big] - \sum_{k=1}^{N} k\Big[\sum_{j=1}^{k-1}\big(j\big[(j-1)^n+(j+1)^n-2j^n\big]\big)\Big] + \sum_{k=1}^{N}k^2.$$

Appliquons alors ii) (avec $m=k-1$)

$$N^nE(T_nZ_n) = \sum_{k=1}^{N}k^2\big(k^n-(k-1)^n-1\big) - \sum_{k=1}^{N}k\big((k-1)k^n-k(k-1)^n\big) + \sum_{k=1}^{N}k^2.$$

$$N^nE(T_nZ_n) = \sum_{k=1}^{N}\big(k^2k^n - k^2(k-1)^n - k^2 - k(k-1)k^n + k^2(k-1)^n + k^2\big).$$

$$N^nE(T_nZ_n) = \sum_{k=1}^{N}(k^2-k^2+k)\,k^n = \sum_{k=1}^{N}k^{n+1}.$$

Alors $\underline{\underline{E(T_nZ_n) = N\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{k}{N}\Big)^{n+1}}}$

Si $N \geqslant 2$: $E(T_nZ_n) = N\Big[\sum_{k=1}^{N-1}\Big(\frac{k}{N}\Big)^{n+1}+1\Big] = N\,[d_{n+1}(N)+1] = N(1+d_{n+1}(N))$

Si $N=1$: $E(T_nZ_n) = N\sum_{k=1}^{1}\Big(\frac{k}{1}\Big)^{n+1} = N\times 1 = N(1+0) = N(1+d_{n+1}(N))$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ E(T_nZ_n) = N(1+d_{n+1}(N))}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $N \geq 2$. Notons que $V(T_n) \neq 0$ et $V(Z_n) \neq 0$. ← Z_n et T_n ne sont pas presque sûrement constantes

$$\rho_n = \frac{\operatorname{Cov}(T_n, Z_n)}{\sqrt{V(T_n)}\sqrt{V(Z_n)}} \underset{V(T_n)=V(Z_n)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{E(T_n Z_n) - E(T_n)E(Z_n)}{V(T_n)} = \frac{N(1+d_{n+1}(N)) - (N-d_n(N))(1+d_n(N))}{V(T_n)}$$

$$\rho_n = \frac{1}{V(T_n)}\left[N d_{n+1}(N) + d_n(N) - N d_n(N) + d_n^2(N)\right]$$

$$\rho_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{d_n(N)}\left[N d_{n+1}(N) + d_n(N) - N d_n(N) + d_n^2(N)\right]$$

$$\rho_n \underset{n\to+\infty}{\sim} N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - (N-1) + d_n(N)$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \lim_{n\to+\infty}\left(N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - (N-1) + d_n(N)\right) = N \times \left(1 - \frac{1}{N}\right) - (N-1) + 0 = 0.$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 0$ lorsque $N \geq 2$.

(Q9) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$.

$$P_{[T_n=k]}([Z_n=\ell]) = \frac{P([Z_n=\ell] \cap [T_n=k])}{P(T_n=k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<\ell \\ \dfrac{(1/N)^n}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} & \text{si } k=\ell \\ \dfrac{\left(\frac{k-1-\ell}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} & \text{si } k>\ell \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2,\quad P_{[T_n=k]}([Z_n=\ell]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<\ell \\ \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } k=\ell \\ \dfrac{(k-1-\ell)^n + (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } k>\ell \end{cases}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, N]\!]$.

$$E(Z_n / [T_n=k]) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell\, P_{[T_n=k]}([Z_n=\ell]) = \frac{k}{k^n - (k-1)^n} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\, \frac{(k-1-\ell)^n + (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n}{k^n - (k-1)^n}.$$

$$[\ell^n-(\ell-1)^n]\,E(Z_n/[T_n=\ell]) = \ell + \sum_{j=1}^{\ell-1}(\ell-j)\left((j-1)^n+(j+1)^n-2j^n\right) \quad \leftarrow j=k-\ell \ldots$$

$$[\ell^n-(\ell-1)^n]\,E(Z_n/[T_n=\ell]) = \ell + \ell\sum_{j=1}^{\ell-1}\left((j-1)^n+(j+1)^n-2j^n\right) - \sum_{j=1}^{\ell-1} j\left((j-1)^n+(j+1)^n-2j^n\right).$$

En appliquant les résultats de Q8 il vient :

$$[\ell^n-(\ell-1)^n]\,E(Z_n/[T_n=\ell]) = \ell+\ell\left(\ell^n-(\ell-1)^n-1\right) - \left((\ell-1)\,\ell^n - \ell(\ell-1)^n\right).$$

$$[\ell^n-(\ell-1)^n]\,E(Z_n/[T_n=\ell]) = \ell + (\ell-(\ell-1))\,\ell^n + (-\ell+\ell)(\ell-1)^n - \ell = \ell^n.$$

Par conséquent $\displaystyle E(Z_n/[T_n=\ell]) = \frac{\ell^n}{\ell^n-(\ell-1)^n}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout ℓ dans $[\![1,N]\!]$.

Exercice 1.- Retrouver à l'aide de ce résultat l'espérance de Z_n.

Exercice 2.- Trouver la loi de T_n sachant que $[Z_n=k]$.

R

PARTIE III Prévision

Q10 ⚠ Nous supposerons ici que $t=(t_1,t_2,\dots,t_N)\in\mathbb{R}^N$ et que $t_1,t_2,\dots,t_N$ sont deux à deux distincts (omission de l'énoncé).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $\ell\in[\![1,N]\!]$.

Notons que les événements $[W_t(T_n)=t_\ell]$ et $[T_n=\ell]$ sont égaux.

- Soit $\omega\in[T_n=\ell]$. $T_n(\omega)=\ell$.

  Comme $([T_n=i])_{i\in[\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements, ℓ est l'unique élément de $[\![1,N]\!]$ tel que $\omega\in[T_n=\ell]$.

Ainsi $\forall i\in[\![1,N]\!]$, $\mathbb{1}_{[T_n=i]}(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } i=\ell\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $W_t(T_n)(\omega)=\sum_{i=1}^{N} t_i\,\mathbb{1}_{[T_n=i]}(\omega)=t_\ell\times 1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq \ell}}^{N} t_i\times 0=t_\ell$.

Ainsi $\omega\in[W_t(T_n)=t_\ell]$.

- Réciproquement soit ω un élément de $[W_t(T_n)=t_\ell]$.

  $\exists!\,\ell_0\in[\![1,N]\!]$, $\omega\in[T_n=\ell_0]$. même calcul que plus haut.

  Alors $W_t(T_n)(\omega)=\sum_{i=1}^{N} t_i\,\mathbb{1}_{[T_n=i]}(\omega)=t_{\ell_0}$

  Or $W_t(T_n)(\omega)=t_\ell$. Alors $t_\ell=t_{\ell_0}$ donc $\ell=\ell_0$ car $t_1,t_2,\dots,t_N$ sont deux à deux distincts. Ainsi $[T_n=\ell]=[T_n=\ell_0]$. Or $\omega\in[T_n=\ell_0]$, donc $\omega\in[T_n=\ell]$.

Ceci achève de montrer l'égalité des événements $[W_t(T_n)=t_\ell]$ et $[T_n=\ell]$.

Donc $\underline{P(W_t(T_n)=t_\ell)=P(T_n=\ell)}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout ℓ dans $[\![1,N]\!]$.

Q11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\ell \in [\![1,N]\!]$. Notons que $P(T_n=\ell) \neq 0$.

Notons que $T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}$ prend ses valeurs dans $[\![0,N]\!]$.

$$E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}) = \sum_{i=0}^{N} i\, P(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = i) = \sum_{\underline{\underline{i=1}}}^{N} i\, P(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = i)$$

$$E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}) = \sum_{i=1}^{N} i\, P\left([T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = i] \cap [T_n=\ell]\right) + \sum_{i=1}^{N} i\, P\left([T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = i] \cap [T_n \neq \ell]\right)$$

$\uparrow$ $([T_n=\ell],[T_n\neq\ell])$ est un système complet d'événements

Notons que pour tout i dans $\underline{\underline{[\![1,N]\!]}}$, $[T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = i] \cap [T_n=\ell] = [T_{n+1}=i] \cap [T_n=\ell]$

et $[T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = i] \cap [T_n \neq \ell] = \emptyset$ car si $[T_n=\ell]$ est réalisé $\mathbb{1}_{[T_n=\ell]}$ prend la valeur 1 et sinon $\mathbb{1}_{[T_n=\ell]}$ prend la valeur 0.

Alors $E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}) = \sum_{i=1}^{N} i\, P([T_{n+1}=i] \cap [T_n=\ell]) = \sum_{i=1}^{N} i\, P_{[T_n=\ell]}(T_{n+1}=i)\, P(T_n=\ell)$

donc $\underline{\underline{E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}) = E(T_{n+1} / [T_n=\ell])\, P(T_n=\ell)}}$ et ceci pour tout $\ell \in [\![1,N]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Q12 $\underline{a)}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(\ell, j) \in [\![1,N]\!]^2$.

$\forall \omega \in \Omega$, $T_{n+1}(\omega) \geq T_n(\omega)$ donc $P([T_n=\ell] \cap [T_{n+1}=j]) = 0$ si $j < \ell$.

Supposons $j \geq \ell$.

- Supposons $j = \ell$

$P([T_n=\ell] \cap [T_{n+1}=j]) = P([T_n=\ell] \cap [\operatorname{Sup}(T_n, U_{n+1}) = \ell])$

$P([T_n=\ell] \cap [T_{n+1}=j]) = P([T_n=\ell] \cap [U_{n+1} \leq \ell])$.

$U_1, U_2, \dots, U_n$ et U_{n+1} sont indépendantes donc $T_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et U_{n+1} sont indépendantes.

Alors $P([T_n=\ell] \cap [T_{n+1}=j]) = P(T_n=\ell)\, P(U_{n+1} \leq \ell) = P(T_n=\ell)\, \frac{\ell}{N} = \frac{\ell}{N}\, P(T_n=\ell)$.

Supposons $j > k$.

$$P([T_n = \ell] \cap [T_{n+1} = j]) = P([T_n = \ell] \cap [\sup(T_n, U_{n+1}) = j]) \overset{j>k}{=} P([T_n = \ell] \cap [U_{n+1} = j])$$

Par indépendance il vient : $P([T_n = \ell] \cap [T_{n+1} = j]) = P(T_n = \ell) P(U_{n+1} = j) = \frac{1}{N} P(T_n = \ell)$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (k, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad P([T_n = \ell] \cap [T_{n+1} = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{k}{N} P(T_n = \ell) & \text{si } j = \ell \\ \frac{1}{N} P(T_n = \ell) & \text{si } j > \ell \end{cases}$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\ell, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad P([T_n = \ell] \cap [T_{n+1} = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < \ell \\ \frac{\ell}{N}\left[\left(\frac{\ell}{N}\right)^n - \left(\frac{\ell-1}{N}\right)^n\right] & \text{si } j = \ell \\ \frac{1}{N}\left[\left(\frac{\ell}{N}\right)^n - \left(\frac{\ell-1}{N}\right)^n\right] & \text{si } j > \ell \end{cases}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $P(T_n = \ell) \neq 0$.

Donc $\forall (k, j) \in [\![1, N]\!]^2$, $P_{[T_n = \ell]}(T_{n+1} = j) = \dfrac{P([T_n = \ell] \cap [T_{n+1} = j])}{P(T_n = \ell)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < \ell \\ \frac{\ell}{N} & \text{si } j = \ell \\ \frac{1}{N} & \text{si } j > \ell \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\ell, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad P_{[T_n = \ell]}(T_{n+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < \ell \\ \frac{\ell}{N} & \text{si } j = \ell \\ \frac{1}{N} & \text{si } j > \ell \end{cases}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\ell \in [\![1, N]\!]$. T_{n+1} prend un nombre fini de valeurs.

Ainsi $E(T_{n+1} / [T_n = \ell])$ existe.

$$E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) = \sum_{j=1}^{N} j \, P_{[T_n = \ell]}(T_{n+1} = j) = \sum_{j=1}^{\ell-1} j \times 0 + \ell \times \frac{\ell}{N} + \sum_{j=\ell+1}^{N} \frac{j}{N} = \frac{\ell^2}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=\ell+1}^{N} j$$

à quelques choses près...

$$E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) = \frac{\ell^2}{N} + \frac{1}{N} \times (N - \ell) \times \frac{\ell + 1 + N}{2} = \frac{1}{2N}\left[2\ell^2 + N\ell + N + N^2 - \ell^2 - \ell - N\ell\right]$$

$$E(T_{n+1} / [T_n=\ell]) = \frac{1}{2N}\left[\ell^2-\ell+N(N+1)\right] = \frac{N+1}{2}+\frac{1}{2N}(\ell^2-\ell).$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall \ell\in [\![1,N]\!],\ E(T_{n+1} / [T_n=\ell]) = \dfrac{N+1}{2}+\dfrac{1}{2N}(\ell^2-\ell).$

d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $E(T_{n+1}) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} E(T_{n+1}/[T_n=\ell])\, P(T_n=\ell).$

$$E(T_{n+1}) = \sum_{\ell=1}^{N}\left[\frac{N+1}{2}+\frac{1}{2N}(\ell^2-\ell)\right]P(T_n=\ell).$$

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2}\sum_{\ell=1}^{N}P(T_n=\ell)+\frac{1}{2N}\sum_{\ell=1}^{N}\ell^2 P(T_n=\ell)-\frac{1}{2N}\sum_{\ell=1}^{N}\ell\, P(T_n=\ell).$$

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2}\times 1+\frac{1}{2N}E(T_n^2)-\frac{1}{2N}E(T_n).$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ E(T_{n+1}) = \dfrac{N+1}{2}+\dfrac{1}{2N}\left(E(T_n^2)-E(T_n)\right).$

Q13 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $t=(t_1,t_2,\dots,t_N)\in\mathbb{R}^N$.

Il n'est pas nécessaire ici de supposer $t_1, t_2,\dots,t_N$ deux à deux distincts.

$$(W_t(T_n))^2 = \left(\sum_{\ell=1}^{N} t_\ell\, \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}\right)^2 = \left(\sum_{\ell=1}^{N} t_\ell\, \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}\right)\left(\sum_{j=1}^{N} t_j\, \mathbb{1}_{[T_n=j]}\right).$$

$$(W_t(T_n))^2 = \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} t_\ell t_j\, \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}\mathbb{1}_{[T_n=j]} = \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} t_\ell t_j\, \mathbb{1}_{[T_n=\ell]\cap[T_n=j]}.$$

$\forall (\ell,j)\in [\![1,N]\!]^2,\ [T_n=\ell]\cap[T_n=j] = \begin{cases}[T_n=\ell] & \text{si } \ell=j.\\ \varnothing & \text{sinon}\end{cases}$

Notons $\mathbb{1}_\varnothing = 0_{\mathcal{B}(\Omega,\{0,1\})}$.

Alors $(W_t(T_n))^2 = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} t_\ell^2\, \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}.$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t=(t_1,t_2,\dots,t_N)\in\mathbb{R}^N,\ (W_t(T_n))^2 = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} t_\ell^2\, \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}.$

R.

Q14) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $t=(t_1,t_2,\dots,t_N)\in\mathbb{R}^N$ (... et pas plus).

$$g(t)=E\left[(T_{n+1}-W_t(T_n))^2\right]=E\left(T_{n+1}^2-2T_{n+1}W_t(T_n)+(W_t(T_n))^2\right)$$

$$g(t)=E(T_{n+1}^2)-2E(T_{n+1}W_t(T_n))+E((W_t(T_n))^2)$$

toutes les espérances portant sur des variables aléatoires intervenant sont finies.

- $E(T_{n+1}W_t(T_n))=E\left(T_{n+1}\sum_{k=1}^N t_k\,\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N t_k\,E(T_{n+1}\mathbb{1}_{[T_n=k]})$

$$E(T_{n+1}W_t(T_n))=\sum_{k=1}^N t_k E(T_{n+1}/[T_n=k])P(T_n=k).$$

- $E((W_t(T_n))^2)=E\left(\sum_{k=1}^N t_k^2\,\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N t_k^2\,E(\mathbb{1}_{[T_n=k]})=\sum_{k=1}^N t_k^2 P(T_n=k).$

Alors $g(t)=E(T_{n+1}^2)-2\sum_{k=1}^N t_k E(T_{n+1}/[T_n=k])P(T_n=k)+\sum_{k=1}^N t_k^2P(T_n=k).$

On peut encore écrire, en remarquant que $\sum_{k=1}^N P(T_n=k)=1$:

$$g(t)=\sum_{k=1}^N\left[t_k^2-2E(T_{n+1}/[T_n=k])t_k+E(T_{n+1}^2)\right]P(T_n=k).$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t=(t_1,t_2,\dots,t_N)\in\mathbb{R}^N,\ g(t)=\sum_{k=1}^N\left[t_k^2-2E(T_{n+1}/[T_n=k])t_k+E(T_{n+1}^2)\right]P(T_n=k).$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

b) Posons $\forall k\in[\![1,N]\!]$, $\theta_k=E(T_{n+1}/[T_n=k])$. Posons $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_N)$.

Soit $t=(t_1,t_2,\dots,t_N)\in\mathbb{R}^N$.

$$g(t)=\sum_{k=1}^N\left(t_k^2-2\theta_k t_k+E(T_{n+1}^2)\right)P(T_n=k)$$

$$g(t)=\sum_{k=1}^N(t_k-\theta_k)^2P(T_n=k)+\sum_{k=1}^N\left(E(T_{n+1}^2)-\theta_k^2\right)P(T_n=k).$$

Notons que $g(\theta)=\sum_{k=1}^N\left(E(T_{n+1}^2)-\theta_k^2\right)P(T_n=k)$ (faire $t=\theta$ dans ce qui précède).

Alors $g(t)-g(\theta)=\sum_{k=1}^N(t_k-\theta_k)^2P(T_n=k)\geqslant 0.$

Supposons que t soit différent de θ.

$\exists \ell_0 \in [\![1,N]\!]$, $t_{\ell_0} \neq \theta_{\ell_0}$. Rappelons que $P(T_n = \ell_0) > 0$.

Ainsi $(t_{\ell_0} - \theta_{\ell_0})^2 P(T_n = \ell_0) > 0$ et $\forall \ell \in [\![1,N]\!] - \{\ell_0\}$, $(t_\ell - \theta_\ell)^2 P(T_n = \ell) \geqslant 0$.

Alors $g(t) - g(\theta) = \sum_{\ell=1}^{N} (t_\ell - \theta_\ell)^2 P(T_n = \ell) > 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R} - \{\theta\}$, $g(t) > g(\theta)$. g admet un minimum global strict sur $\mathbb{R}^N$ atteint en θ.

1) g admet un minimum global strict sur $\mathbb{R}^N$

2) ce minimum est atteint en $\theta = \left(E(T_{n+1} / [T_n = 1]), \dots, E(T_{n+1} / [T_n = N])\right)$

3) ce minimum vaut : $\sum_{\ell=1}^{N} \left(E(T_{n+1}^2) - (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2 \right) P(T_n = \ell)$

ou $E(T_{n+1}^2) - \sum_{\ell=1}^{N} \left(E(T_{n+1} / [T_n = \ell])\right)^2 P(T_n = \ell)$

Q15 Soit $n \in \mathbb{N}$. Si encore $\theta = (E(T_{n+1} / [T_n = 1]), \dots, E(T_{n+1} / [T_n = N]))$.

$$E(W_\theta(T_n)) = E\left(\sum_{\ell=1}^{N} E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) \mathbb{1}_{[T_n = \ell]}\right) = \sum_{\ell=1}^{N} E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) \underbrace{E(\mathbb{1}_{[T_n = \ell]})}_{P(T_n = \ell)}$$

$$E(W_\theta(T_n)) = \sum_{\ell=1}^{N} E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) P(T_n = \ell) = E(T_{n+1}).$$

$$\underline{\underline{E(W_\theta(T_n)) = E(T_{n+1}).}}$$

$$V(W_\theta(T_n)) = E((W_\theta(T_n))^2) - (E(W_\theta(T_n)))^2 = E((W_\theta(T_n))^2) - (E(T_{n+1}))^2$$

et $V(T_{n+1}) = E(T_{n+1}^2) - (E(T_{n+1}))^2$

Pour montrer que $V(W_\theta(T_n)) \leqslant V(T_{n+1})$ il suffit de montrer que $E((W_\theta(T_n))^2) \leqslant E(T_{n+1}^2)$

Notons que $E((W_\theta(T_n))^2) \underset{\uparrow}{=} E\left(\sum_{\ell=1}^{N} (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2 \mathbb{1}_{[T_n = \ell]}\right)$

Q13

$$E((W_\theta(T_n))^2) = \sum_{\ell=1}^{N} (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2 E(\mathbb{1}_{[T_n = \ell]}) = \sum_{\ell=1}^{N} (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2 P(T_n = \ell)$$

Ainsi $E((W_\theta(T_n))^2) = \sum_{\ell=1}^{N} \left(E(T_{n+1}/[T_n=\ell])\right)^2 P(T_n=\ell)$.

notons que $E(T_{n+1}^2) = \sum_{\ell=1}^{N} E(T_{n+1}^2) P(T_n=\ell)$!

Alors $E(T_{n+1}^2) - E((W_\theta(T_n))^2) = \sum_{\ell=1}^{N} \left(E(T_{n+1}^2) - (E(T_{n+1}/[T_n=\ell]))^2 \right) P(T_n=\ell)$

donc $E(T_{n+1}^2) - E((W_\theta(T_n))^2) = g(\theta) = E\left((T_{n+1} - W_\theta(T_n))^2 \right) \geqslant 0$

(en effet $(T_{n+1} - W_\theta(T_n))^2 \geqslant 0$) + croissance de l'espérance

donc $E(T_{n+1}^2) \geqslant E((W_\theta(T_n))^2)$

Alors $V(T_{n+1}) \geqslant V(W_\theta(T_n))$ car $(E(T_{n+1}))^2 = (E(W_\theta(T_n)))^2$.

$V(W_\theta(T_n)) \leq V(T_{n+1})$.

Q16 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \mathbb{N}$ soit $\omega \in \Omega$. $\exists !\, \ell_0 \in [\![1, N]\!]$, $T_n(\omega) = \ell_0$.

Alors $\forall \ell \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{1}_{[T_n=\ell]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = \ell_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

donc $\left(\sum_{\ell=1}^{N} \ell^i \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}\right)(\omega) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell^i \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}(\omega) = \ell_0^i = (T_n(\omega))^i$.

$\forall \omega \in \Omega$, $\left(\sum_{\ell=1}^{N} \ell^i \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}\right)(\omega) = (T_n(\omega))^i$.

donc $\sum_{\ell=1}^{N} \ell^i \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = T_n^i$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=1}^{N} \ell^i \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} = T_n^i$.

Bien noter le pour tout i dans $\mathbb{N}$ et pas dans $\mathbb{N}^*$...

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$W_\theta(T_n) = \sum_{\ell=1}^{N} E(T_{n+1}/[T_n=\ell]) \mathbb{1}_{[T_n=\ell]} \overset{Q12c)}{=} \sum_{\ell=1}^{N} \left(\frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}(\ell^2 - \ell) \right) \mathbb{1}_{[T_n=\ell]}.$$

$$W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} \sum_{\ell=1}^{N} 1\!\!1_{[T_n=\ell]} + \frac{1}{2N} \sum_{\ell=1}^{N} \ell^2 1\!\!1_{[T_n=\ell]} - \frac{1}{2N} \sum_{\ell=1}^{N} \ell\, 1\!\!1_{[T_n=\ell]}$$

d'après a] on a : $W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} T_n^0 + \frac{1}{2N} T_n^2 - \frac{1}{2N} T_n$.

donc $\underline{\underline{W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}(T_n^2 - T_n)}}$.

Remarque.- $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ et $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $\theta_k = E(T_{n+1} \mid [T_n = k])$.

Alors $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $\theta_k = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}(k^2 - k)$.

la fonction $u : x \mapsto x^2 - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ ($\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x - 1$!).

Alors $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$.

Ainsi comme nous, grâce à $\varphi 10$: $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $P(W_\theta(T_n) = \theta_k) = P(T_n = k)$.

Partie IV. Estimation

Q17 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$E(T_n)$ existe et vaut $N - d_n(N)$.

Donc $E(T_n + d_n(N))$ existe et vaut $E(T_n) + d_n(N)$ donc N... sauf que $T_n + d_n(N)$ dépend de ce que l'on cherche à estimer : N. $T_n + d_n(N)$ n'est pas un estimateur.

b) $\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = \lim_{n\to+\infty} (N - d_n(N)) = N$ car $\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$ (I Q 4.a))

$(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais du paramètre N.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\omega \in A_n(\varepsilon)$.

$|T_n(\omega) - N| \geq \varepsilon$. $\varepsilon \leq |T_n(\omega) - N| = |T_n(\omega) - (N - d_n(N)) - d_n(N)|$

$\varepsilon \leq |T_n(\omega) - (N - d_n(N))| + |d_n(N)|$

$\varepsilon \leq |T_n(\omega) - E(T_n)| + |d_n(N)|$; donc $\omega \in B_n(\varepsilon)$.

$\forall \omega \in A_n(\varepsilon)$, $\omega \in B_n(\varepsilon)$ donc $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$.

$\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$. Ainsi il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow |d_n(N)| < \varepsilon/2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > n_0$.

Soit $\omega \in B_n(\varepsilon)$. $|T_n(\omega) - E(T_n)| + |d_n(N)| \geq \varepsilon$

Donc $\varepsilon \leq |T_n(\omega) - E(T_n)| + \varepsilon/2$; $|T_n(\omega) - E(T_n)| \geq \varepsilon/2$.

Donc $\omega \in [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2]$. Ainsi

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_0 \Rightarrow B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2]$.

Donc il existe un entier naturel n_0 tel que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_0 \Rightarrow B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$

d) Soit ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $n > n_0$.

$0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq P(B_n(\varepsilon)) \leq P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2)$

Or T_n possède une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq \dfrac{V(T_n)}{(\varepsilon/2)^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow 0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq \dfrac{V(T_n)}{(\varepsilon/2)^2}$.

Or $\lim_{n \to +\infty} V(T_n) = 0$ (I Q 4. c)). Par encadrement on obtient $\lim_{n \to +\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} P(|T_n - N| \geq \varepsilon) = 0$ pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

La suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à N.

Ainsi <u>la suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geq 1}$ est convergente.</u>

(Q18) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in [\![1, N]\!]^n$.

Rappelons que $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes.

Alors $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i = u_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{N}\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in [\![1, N]\!]^n, P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$.</u>

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in [\![1, N]\!]^n$ et soit $k \in [\![1, N]\!]$.

Si $\max_{1 \leq i \leq n} u_i \neq k$: $\left[\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right] \cap [T_n = k] = \emptyset$.

Si $\max_{1 \leq i \leq n} u_i = k$: $\left[\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right] \cap [T_n = k] = \bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]$.

Alors $P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n}[U_i=u_i]\right]\cap[T_n=\ell]\right)=\begin{cases}\left(\frac{1}{N}\right)^n & \text{si } \max\limits_{1\leq i\leq n} u_i=\ell\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Donc $P_{[T_n=\ell]}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i=u_i]\right)=\dfrac{P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n}[U_i=u_i]\right]\cap[T_n=\ell]\right)}{P(T_n=\ell)}=\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{1}{N}\right)^n}{\left(\frac{\ell}{N}\right)^n-\left(\frac{\ell-1}{N}\right)^n} & \text{si } \max\limits_{1\leq i\leq n} u_i=\ell\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

donc $P_{[T_n=\ell]}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i=u_i]\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ell^n-(\ell-1)^n} & \text{si } \max\limits_{1\leq i\leq n} u_i=\ell\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et

ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(u_1,u_2,\dots,u_n)\in[\![1,N]\!]^n$ et pour tout $\ell\in[\![1,N]\!]$.

Q19 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $E(T_n)$ (resp. $E(Z_n)$) existe et vaut $N-d_n(N)$ (resp. $1+d_n(N)$)

Donc $E(T_n+Z_n-1)$ existe et vaut $N-d_n(N)+1+d_n(N)-1$ c'est-à-dire N.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n+Z_n-1 est un estimateur sans biais de N.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $\ell\in[\![1,N]\!]$.

$$E(T_n/[T_n=\ell])=\sum_{i=1}^{N} i\, P_{[T_n=\ell]}(T_n=i)=\sum_{i=1}^{N} i\,\frac{P([T_n=i]\cap[T_n=\ell])}{P(T_n=\ell)}.$$

$\forall i\in[\![1,N]\!]$, $P([T_n=i]\cap[T_n=\ell])=\begin{cases}P(T_n=\ell) & \text{si } i=\ell\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $E(T_n/[T_n=\ell])=\ell\,\dfrac{P(T_n=\ell)}{P(T_n=\ell)}=\ell$.

$E(Z_n/[T_n=\ell])=\dfrac{\ell^n}{\ell^n-(\ell-1)^n}$ d'après II Q9. b).

Ainsi $E(T_n+Z_n-1/[T_n=\ell])$ existe et vaut $\ell+\dfrac{\ell^n}{\ell^n-(\ell-1)^n}-1$

Donc $E(S_n/[T_n=\ell])=\dfrac{\ell^{n+1}-\ell(\ell-1)^n+\ell^n-\ell^n+(\ell-1)^n}{\ell^n-(\ell-1)^n}=\dfrac{\ell^{n+1}-(\ell-1)^{n+1}}{\ell^n-(\ell-1)^n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \ell \in [\![1,N]\!],\ E(S_n \mid [T_n=\ell]) = \frac{\ell^{n+1}-(\ell-1)^{n+1}}{\ell^n-(\ell-1)^n} = \psi_n(\ell).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. T_n est une variable aléatoire finie qui prend ses valeurs dans $[\![1,N]\!]$ et $[\![1,N]\!]$ est contenu dans le domaine de définition de ψ_n. Le théorème de transfert montre alors que $E(\psi_n(T_n))$ possède une espérance qui vaut $\sum_{k=1}^{N} \psi_n(k)\, P(T_n=k)$.

$$E(\psi_n(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} \psi_n(\ell)\, P(T_n=k) = \sum_{k=1}^{N} E(S_n / [T_n=\ell])\, P(T_n=\ell) = E(S_n) = N.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\ell \in [\![1,N]\!]$.

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = E\left((S_n-\lambda)^2 / [T_n=\ell]\right)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = E\left(S_n^2 - 2\lambda S_n + \lambda^2 / [T_n=\ell]\right) = E(S_n^2/[T_n=\ell]) - 2\lambda E(S_n/[T_n=\ell]) + \lambda^2.$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq E\left((S_n-\lambda)^2/[T_n=\ell]\right) = P(\lambda) = \left(\lambda - E(S_n/[T_n=\ell])\right)^2 + E(S_n^2 \mid [T_n=\ell]) - \left(E(S_n/[T_n=\ell])\right)^2$

$(S_n-\lambda)^2$ ne prend que des valeurs positives ou nulles

En posant : $\lambda = E(S_n/[T_n=\ell])$ il vient : $0 \leq E(S_n^2/[T_n=\ell]) - \left(E(S_n/[T_n=\ell])\right)^2$

Alors $0 \leq \varphi_n(\ell) - (\psi_n(\ell))^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \ell \in [\![1,N]\!],\ \left(E(S_n/[T_n=\ell])\right)^2 = (\psi_n(\ell))^2 \leq \varphi_n(\ell) = E(S_n^2/[T_n=\ell]).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\psi_n(T_n)$ et S_n sont des variables aléatoires finies donc elles possèdent une espérance.

$V(S_n) - \psi_n(T_n) = E(S_n^2) - N^2 - E\left((\psi_n(T_n))^2\right) + N^2 = E(S_n^2) - E\left((\psi_n(T_n))^2\right).$

$E(S_n) = E(\psi_n(T_n)) = N$

$\forall \ell \in [\![1,N]\!],\quad \psi_n^2(\ell) \leqslant \psi_n(\ell)$ et $P(T_n=\ell) \geqslant 0$.

donc $\forall \ell \in [\![1,N]\!],\quad \psi_n^2(\ell)\,P(T_n=\ell) \leqslant \psi_n(\ell)\,P(T_n=\ell) = E(S_n^2/[T_n=\ell])\,P(T_n=\ell)$

Alors $E((\psi_n(T_n))^2) \underset{\uparrow}{=} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} \psi_n^2(\ell)\,P(T_n=\ell) \leqslant \sum_{\ell=1}^{N} E(S_n^2/[T_n=\ell])\,P(T_n=\ell) \underset{\uparrow}{=} E(S_n^2)$

théorème du transfert — formule de l'espérance totale

donc $V(S_n) - V(\psi_n(T_n)) = E(S_n^2) - E((\psi_n(T_n))^2) \geqslant 0$.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad V(\psi_n(T_n)) \leqslant V(S_n)}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = T_n + Z_n - 1$ possède une variance car T_n et Z_n possèdent une variance.

$V(S_n) = V(T_n + Z_n) = V(T_n) + V(Z_n) + 2\,\mathrm{cov}(T_n, Z_n)$.

$V(S_n) \underset{\substack{\uparrow \\ V(Z_n)=V(T_n)}}{=} 2V(T_n) + 2\,(E(T_nZ_n) - E(T_n)E(Z_n))$.

$V(S_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{I}\text{ et }\mathrm{II}\ !!}}{=} 2\left[(2N-1)d_n(N) - 2N d_{n+1}(N) - d_n^2(N)\right] + 2\left[N(1+d_{n+1}(N)) - (N-d_n(N))(1+d_n(N))\right]$

$V(S_n) = 2\left[(2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N) + N + Nd_{n+1}(N) - N - Nd_n(N) + d_n(N) + d_n^2(N)\right]$

$V(S_n) = 2\left[Nd_n(N) - Nd_{n+1}(N)\right] = 2N\left[d_n(N) - d_{n+1}(N)\right]$.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad V(S_n) = 2N\left[d_n(N) - d_{n+1}(N)\right]}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_{n+1}(N) = 0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(S_n) = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant V(\psi_n(T_n)) \leqslant V(S_n)$. Par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(\psi_n(T_n)) = 0$.

R.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\psi_n(T_n)$ possède une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ 0 \leq P(|\psi_n(T_n) - E(\psi_n(T_n))| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\psi_n(T_n))}{\varepsilon^2}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\psi_n(T_n)) = 0$. Par encadrement il vient :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \lim_{n \to +\infty} P(|\psi_n(T_n) - E(\psi_n(T_n))| \geq \varepsilon) = 0$$

Soit encore $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \lim\limits_{n \to +\infty} P(|\psi_n(T_n) - N| \geq \varepsilon) = 0.$

Ainsi <u>$\psi_n(T_n)$ est un estimateur convergent de N.</u>

Q20 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous supposerons que $V(R_n)$ existe.

Notons que $E(R_n) = N$.

T_n prend ses valeurs dans $[\![1, N]\!]$ et f_n est définie sur $[\![1, N]\!]$ donc $E(f_n(T_n))$ et $V(f_n(T_n))$ existent.

$$E(f_n(T_n)) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{N} f_n(k) P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(R_n / [T_n = k]) P(T_n = k) = E(R_n) = N.$$

théorème de transfert

Alors $V(R_n) - V(f_n(T_n)) = E(R_n^2) - N^2 - E((f_n(T_n))^2) + N^2 = E(R_n^2) - E((f_n(T_n))^2)$.

Montrer que $V(f_n(T_n)) \leq V(R_n)$ revient à prouver que $E(R_n^2) - E((f_n(T_n))^2) \geq 0$.

Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi(\lambda) = E((R_n - \lambda)^2 / [T_n = k])$. (cette espérance existe car $E((R_n - \lambda)^2)$ existe puisque R_n possède une variance donc des moments d'ordre 1 et 2.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ 0 \leq E((R_n - \lambda)^2 / [T_n = k]) = E(R_n^2 / [T_n = k]) - 2\lambda E(R_n / [T_n = k]) + \lambda^2 = \varphi(\lambda).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ 0 \leq \varphi(\lambda) = (\lambda - E(R_n / [T_n = k]))^2 + E(R_n^2 / [T_n = k]) - (E(R_n / [T_n = k]))^2.$$

En posant $\lambda = E(R_n / [T_n = \ell])$ on obtient $0 \leq E(R_n^2 / [T_n = \ell]) - (E(R_n / [T_n = \ell]))^2$

En multipliant par $P(T_n = \ell)$ qui est positif et en sommant on obtient :

$$0 \leq \sum_{\ell=1}^{N} E(R_n^2 / [T_n = \ell]) P(T_n = \ell) - \sum_{\ell=1}^{N} (\psi_n(\ell))^2 P(T_n = \ell).$$

Donc $0 \leq E(R_n^2) - E((\psi_n(T_n))^2)$. Alors $V(\psi_n(T_n)) \leq V(R_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V(\psi_n(T_n)) \leq V(R_n).$

b) * Si $(\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall \ell \in [\![1, N]\!], F(\ell) = \psi_n(\ell))$ on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*, E(F(T_n)) = E(\psi_n(T_n)) = N$

* Réciproquement supposons que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad E(F(T_n)) = N$.

Alors $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad N = \sum_{\ell=1}^{N} F(\ell) P(T_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{N} F(\ell) \dfrac{\ell^n - (\ell-1)^n}{N^n}.$

Or $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad N = \sum_{\ell=1}^{N} \psi_n(\ell) P(T_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{N} \psi_n(\ell) \dfrac{\ell^n - (\ell-1)^n}{N^n}.$

Ce qui donne : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{\ell=1}^{N} F(\ell) [\ell^n - (\ell-1)^n] = \sum_{\ell=1}^{N} \psi_n(\ell) [\ell^n - (\ell-1)^n]$ ou :

$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{\ell=1}^{N} (F(\ell) - \psi_n(\ell)) [\ell^n - (\ell-1)^n] = 0$

Pour $N = 1$ on obtiendra : $(F(1) - \psi_n(1)) [1^n - 0^n] = 0$ donc $F(1) - \psi_n(1) = 0$.

Ainsi $F(1) = \psi_n(1)$.

Soit $N \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 0 = 0 - 0\,!}}{0} = \sum_{\ell=1}^{N} (F(\ell) - \psi_n(\ell)) [\ell^n - (\ell-1)^n] - \sum_{\ell=1}^{N-1} (F(\ell) - \psi_n(\ell)) [\ell^n - (\ell-1)^n].$$

Alors $0 = (F(N) - \psi_n(N)) [N^n - (N-1)^n]$ et $N^n - (N-1)^n \neq 0$ donc $F(N) = \psi_n(N)$.

Finalement : $F(1) = \psi_n(1)$ et $\forall N \in [\![2, +\infty[\![, \quad F(N) = \psi_n(N)$.

Ce qui donne clairement $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall \ell \in [\![1, N]\!], \quad F(\ell) = \psi_n(\ell)$.

Pour tout N de $\mathbb{N}^*$ $E(F(T_n))=N$ est vérifiée si et seulement si

$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1,N]\!], F(k)=\varphi_n(k)$ ou $\forall k \in \mathbb{N}^*, F(k)=\varphi_n(k)$.

c) Soit R_n un estimateur sans biais de N pour tout N dans $\mathbb{N}^*$

Alors $f_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de $\mathbb{N}$ tel que $V(f_n(T_n)) \leq V(R_n)$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

D) permet alors de dire que $f_n=\varphi_n$ et qu'alors $V(\varphi_n(T_n)) \leq V(R_n)$.

Donc $\varphi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N tel que $V(\varphi_n(T_n)) \leq V(R_n)$.

Ainsi dans l'ensemble des estimateurs sans biais de N, l'estimateur

$\varphi_n(T_n)$ est optimal dans le sens où $V(\varphi_n(T_n))$ est minimal.